

# 基于遗传算法的灰色区间数的GM(1,1)优化模型

邬丽云, 吴正鹏, 齐英剑<sup>†</sup>

(中国传媒大学 理工学部, 北京 100024)

**摘要:** 利用遗传算法作为优化工具对基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型中的参数进行优化提取. 首先, 利用变权均值生成思想取代非偏生成, 将区间灰数转化为实数序列; 然后, 对此实数序列进行建模. 在优化过程中, 选取区间灰数预测的平均相对误差最小为目标函数, 通过遗传算法寻找到最优的参数, 建立新的灰色区间数的GM(1,1)模型. 算例仿真显示该新模型的平均模拟相对误差和预测误差有了明显的降低, 表明该新模型具有有效性和可行性.

**关键词:** 灰色系统理论; 灰色区间预测模型; 遗传算法; 优化; GM(1,1)

**中图分类号:** N941.5

**文献标志码:** A

## GM(1,1) model for interval grey number based on genetic algorithm

WU Li-yun, WU Zheng-peng, QI Ying-jian<sup>†</sup>

(Faculty of Science and Technology, Communication University of China, Beijing 100024, China)

**Abstract:** In this paper, we use the genetic algorithm as a tool to optimize the parameter of the model based on grey number layers and grey number interval prediction. Firstly, the mean variable weight generating thoughts is used instead of the non-bias generator to obtain the real number from the interval grey number. Then the GM(1,1) model is built according to the real number sequence. The optimal-operator is designed by minimizing the average relative error of the grey interval prediction. The example simulation is given to illustrate that the average relative error and prediction error of the proposed model are significantly lower than that of other models, which shows the effectiveness and feasibility of the proposed model.

**Keywords:** grey system theory; grey interval prediction model; genetic algorithm; optimize; GM(1,1)

## 0 引言

近几年,有很多学者致力于对区间灰数这一表征系统发展和变化的指标进行深入的探索和研究. 叶璟等<sup>[1-3]</sup>提出的基于广义“灰度不减”公理的区间灰数预测模型和基于函数变换的区间灰数预测模型都取得了不错的预测效果. 曾波等<sup>[4]</sup>提出了基于灰数带和灰数层的区间灰数预测,该方法中应用灰数层的面积挖掘区间灰数所蕴含的几何意义,通过计算灰数层的面积以及灰数层中位线中点的坐标,在不损失已有灰数信息的条件下,将区间灰数序列转变成实数序列,并建立了一种基于区间灰数的GM(1,1)预测模型. 本文在曾波的研究基础上,推广并扩充了由区间灰数生成实数序列的方法. 由变权的均值生成思想<sup>[5]</sup>取代非偏生成的梯形面积和中位数中点的纵坐标这两种区间灰数的处理方法,并引入权值 $\lambda$ 建立灰色区间数预测模型,通过遗传算法(GA)<sup>[6]</sup>来寻找最优的

权参数,使得由区间灰数提取实数序列的建模过程的搜索范围扩大到了整个灰数带中;然后以平均相对误差最小为目标函数在大范围内借助优化算法GA来搜索最优的权值,从而保证用来建模的灰数序列是该区间灰数的最优信息,以此来提高预测精度.

本文在建模时可以借用Matlab软件直接、方便地求解参数并建立模拟和预测效果最优的GM(1,1)模型. 本文提出的基于遗传算法的灰色区间数的优化算法充分降低了模拟及预测结果的灰度,为区间灰数的建模及预测问题提出了一种全新的思路,对拓展灰色预测模型的适用范围具有重要意义.

## 1 基于长度变权均值生成预测公式的建立

设区间灰数序列<sup>[4]</sup> $X(\otimes) = (\otimes(t_1), \otimes(t_2), \dots, \otimes(t_n)), \otimes(t_k) \in [a_k, b_k], \Delta(t_k) = t_{k+1} - t_k = 1, k = 1, 2, \dots, n - 1$ . 由文献[4]中的定义,对灰数层 $p$ 的长

收稿日期: 2017-08-09; 修回日期: 2017-11-21.

责任编辑: 张维海.

作者简介: 邬丽云(1977-),女,副教授,博士生,从事智能计算、灰色系统及其应用等研究; 齐英剑(1973-),女,副教授,博士,从事智能计算、灰色系统及其应用等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: qiyingjian@cuc.edu.cn.

度作变权均值生成序列  $s(p) = \lambda l_p + (1 - \lambda)l_{p+1}, p = 1, 2, \dots, n - 1$ , 即

$$s(p) = \lambda(b_p - a_p) + (1 - \lambda)(b_{p+1} - a_{p+1}), \quad p = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (1)$$

通过式(1)对灰数带中所有灰数层的长度作变权均值生成实数序列, 并记为  $S = (s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_{n-1}))$ . 对序列  $S$  建立 GM(1,1) 模型, 得时间响应序列为

$$\hat{s}^{(1)}(k + 1) = \left[ s^{(0)}(1) - \frac{b_s}{a_s} \right] e^{-a_s k} + \frac{b_s}{a_s}, \quad (2)$$

还原值为

$$\hat{s}^{(0)}(k + 1) = (1 - e^{a_s}) \left[ s^{(0)}(1) - \frac{b_s}{a_s} \right] e^{-a_s k}. \quad (3)$$

通过式(3), 可实现灰数层长度的变权均值生成序列的模拟及预测. 根据式(1), 有

$$s(p) = \lambda(b_p - a_p) + (1 - \lambda)(b_{p+1} - a_{p+1}) \Rightarrow \hat{b}_{p+1} - \hat{a}_{p+1} = \frac{s(p) - \lambda(b_p - a_p)}{1 - \lambda}. \quad (4)$$

$$\text{当 } p = 1 \text{ 时, 有 } \hat{b}_2 - \hat{a}_2 = \frac{\hat{s}^{(0)}(1) - \lambda(b_1 - a_1)}{1 - \lambda};$$

$$\text{当 } p = 2 \text{ 时, 有 } \hat{b}_3 - \hat{a}_3 = \frac{\hat{s}^{(0)}(2) - \lambda(b_2 - a_2)}{1 - \lambda};$$

⋮

当  $p = n - 1$  时, 有

$$\begin{aligned} \hat{b}_n - \hat{a}_n = & \frac{1}{1 - \lambda} \hat{s}^{(0)}(n - 1) - \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2} \hat{s}^{(0)}(n - 2) + \\ & \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda)^3} \hat{s}^{(0)}(n - 3) - \dots + \\ & (-1)^{n-2} \frac{\lambda^{n-2}}{(1 - \lambda)^{n-2}} (b_2 - a_2). \end{aligned} \quad (5)$$

由式(3), 有

$$\hat{s}^{(0)}(n - 1) = (1 - e^{-a_s}) \left[ s^{(0)}(1) - \frac{b_s}{a_s} \right] e^{-a_s(n-2)},$$

$$\hat{s}^{(0)}(n - 2) = (1 - e^{-a_s}) \left[ s^{(0)}(1) - \frac{b_s}{a_s} \right] e^{-a_s(n-3)},$$

⋮

由上可知, 式(5)的前  $(n - 2)$  项是以  $q = -\frac{\lambda}{1 - \lambda} e^{a_s}$  为公比的等比数列. 根据等比数列的求和公式, 整理  $\hat{b}_n - \hat{a}_n$ , 得

$$\begin{aligned} \hat{b}_n - \hat{a}_n = & \frac{1}{1 - \lambda} (1 - e^{a_s}) \cdot \\ & \left[ s^{(0)}(1) - \frac{b_s}{a_s} \right] e^{-a_s(n-2)} \left[ 1 - \left( -\frac{\lambda}{1 - \lambda} e^{a_s} \right)^{(n-2)} \right] / \\ & \left( 1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} e^{a_s} \right) + (-1)^n \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)^{n-2} (b_2 - a_2). \end{aligned} \quad (6)$$

## 2 基于灰数层区间中点的变权均值纵坐标生成预测公式的建立

利用基于灰数层区间中点的变权均值纵坐标生成所构成的实数序列, 建立基于  $\hat{b}^n + \hat{a}^n$  的预测公式.

记区间灰数的上下界的中点纵坐标为  $y_p = (a_p + b_p)/2$ , 用均值生成方法对灰数带中的灰数层的两个相邻区间的中点纵坐标进行处理, 得到  $\lambda y_p + (1 - \lambda)y_{p+1}$ , 则整个灰数带的灰数层中点的变权均值纵坐标组成的实数序列记作  $W = (w(1), w(2), \dots, w(n - 1))$ , 其中

$$w(p) = \lambda \frac{(a_p + b_p)}{2} + (1 - \lambda) \frac{(a_{p+1} + b_{p+1})}{2}. \quad (7)$$

对序列建立 GM(1,1) 模型, 得时间响应序列

$$\hat{w}^{(1)}(k + 1) = \left[ w^{(0)}(1) - \frac{b_w}{a_w} \right] e^{-a_w k} + \frac{b_w}{a_w}, \quad (8)$$

还原值为

$$\hat{w}^{(0)}(k + 1) = (1 - e^{a_w}) \left[ w^{(0)}(1) - \frac{b_w}{a_w} \right] e^{-a_w k}. \quad (9)$$

通过式(9), 可对灰数层中点的均值生成纵坐标进行预测. 由式(7)可得

$$\begin{aligned} \hat{w}^{(0)}(p) = & \lambda \frac{(a_p + b_p)}{2} + (1 - \lambda) \frac{(a_{p+1} + b_{p+1})}{2} \Rightarrow \\ \hat{b}_p + \hat{b}_{p+1} = & \frac{2}{1 - \lambda} \hat{w}^{(0)}(p) - \frac{\lambda}{1 - \lambda} (\hat{a}_p + \hat{a}_{p+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

当  $p = 1$  时, 有

$$\hat{b}_2 + \hat{a}_2 = \frac{2}{1 - \lambda} \hat{w}^{(0)}(1) - \frac{\lambda}{1 - \lambda} (\hat{b}_1 + \hat{a}_1);$$

当  $p = 2$  时, 有

$$\hat{b}_3 + \hat{a}_3 = \frac{2}{1 - \lambda} \hat{w}^{(0)}(2) - \frac{\lambda}{1 - \lambda} (\hat{b}_2 + \hat{a}_2);$$

⋮

当  $p = n - 1$  时, 有

$$\hat{b}_n + \hat{a}_n = \quad (11)$$

$$\frac{2}{1 - \lambda} \hat{w}^{(0)}(n - 1) - \frac{\lambda}{1 - \lambda} (\hat{b}_{n-1} + \hat{a}_{n-1}) \Rightarrow$$

$$\hat{a}_n + \hat{b}_n =$$

$$\frac{2}{1 - \lambda} \hat{w}^{(0)}(n - 1) - \frac{2\lambda}{(1 - \lambda)^2} \hat{w}^{(0)}(n - 2) +$$

$$\frac{2\lambda^2}{(1 - \lambda)^3} \hat{w}^{(0)}(n - 3) - \dots +$$

$$(-1)^{n-2} \frac{\lambda^{n-2}}{(1 - \lambda)^{n-2}} (a_2 + b_2). \quad (12)$$

由式(9), 有

$$\hat{w}^{(0)}(n - 1) = (1 - e^{-a_w}) \left[ w^{(0)}(1) - \frac{b_w}{a_w} \right] e^{-a_w(n-2)},$$

$$\hat{w}^{(0)}(n - 2) = (1 - e^{-a_w}) \left[ w^{(0)}(1) - \frac{b_w}{a_w} \right] e^{-a_w(n-3)},$$

⋮

由此可知,式(11)的前 $(n-2)$ 项是以 $q = -\frac{\lambda}{1-\lambda}e^{a_w}$ 为公比的等比数列. 根据等比数列的求和公式,整理 $\hat{b}_n + \hat{a}_n$ ,得

$$\begin{aligned} \hat{b}_n + \hat{a}_n &= \frac{2}{1-\lambda}(1 - e^{a_w}) \cdot \\ &\frac{\left[ w^{(0)}(1) - \frac{b_w}{a_w} \right] e^{-a_w(n-2)} \left[ 1 - \left( -\frac{\lambda}{1-\lambda} e^{a_w} \right)^{(n-2)} \right]}{1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} e^{a_w}} + \\ &(-1)^{n-2} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^{n-2} (b_2 + a_2). \end{aligned} \quad (13)$$

### 3 区间灰数预测模型的建立

综合上述两个预测模型得出区间灰数的上下界的预测模型. 联合式(6)和(12),通过解方程组的形式可得到区间灰数上界和下界的模拟及预测值

$$\begin{cases} \hat{a}_n = \frac{-F_s - C_s + F_w + C_w}{2}, \\ \hat{b}_n = \frac{F_s + C_s + F_w + C_w}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{\left[ s^{(0)}(1) - \frac{b_s}{a_s} \right] e^{-a_s(n-2)} \left[ 1 - \left( -\frac{\lambda}{1-\lambda} e^{a_s} \right)^{(n-2)} \right]}{1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} e^{a_s}} \\ &\frac{1}{1-\lambda}(1 - e^{a_s}) + (-1)^n \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^{n-2} (b_2 - a_2), \\ F_w &= \frac{\left[ w^{(0)}(1) - \frac{b_w}{a_w} \right] e^{-a_w(n-2)} \left[ 1 - \left( -\frac{\lambda}{1-\lambda} e^{a_w} \right)^{(n-2)} \right]}{1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} e^{a_w}} \\ &\frac{2}{1-\lambda}(1 - e^{a_w}) + (-1)^{n-2} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^{n-2} (b_2 + a_2), \\ C_s &= (-1)^{n-2} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^{n-2} (b_2 - a_2), \\ C_w &= (-1)^{n-2} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^{n-2} (b_2 + a_2). \end{aligned}$$

### 4 基于遗传算法的最优值求解过程

本文提出的基于遗传算法的区间灰数预测的GM(1,1)模型的建模过程具体流程如下.

Step 1: 建立基于长度变权均值生成的预测公式.

Step 2: 建立基于灰数层区间中点的变权均值纵坐标生成的预测公式.

Step 3: 联立上两步得出区间灰数的上下界的预测模型方程组,解出带有参数 $\lambda$ 的区间灰数上界和下界的模拟及预测值 $\hat{a}_i$ 和 $\hat{b}_i$ .

Step 4: 设立平均相对模拟误差最小为遗传算法的目标函数,即

$$f(\lambda) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (|\hat{a}_i - a_i| + |\hat{b}_i - b_i|).$$

其中: $n$ 为样本数据的个数; $a_i, b_i$ 为样本数据, $\hat{a}_i, \hat{b}_i$ 为模拟数据.

Step 5: 用Matlab工具箱实现遗传算法的这部分工作,在工具箱中任选遗传算法的初值,选择、交叉和变异操作,选出使得模拟数据平均相对误差达到最小的参数值 $\lambda_0$ .

Step 6: 将 $\lambda_0$ 代入区间灰数序列模型中求取预测值及预测误差.

## 5 算例分析

### 5.1 算例1

为了验证算法的有效性和可行性,并与文献[4]作比较,选用其中的数据作为样本数据. 首先,建立变权均值的区间灰数序列的预测模型;其次,取 $n=6$ 的平均模拟误差达到最小为目标;再次,利用遗传算法选出最优的参数 $\lambda$ ;最后,利用这个最优值计算样本数据的模拟误差和预测数据的预测误差.

图1为遗传算法用于参数选择时的误差图,参数 $\lambda$ 在0.538附近使得平均相对误差达到最小值.

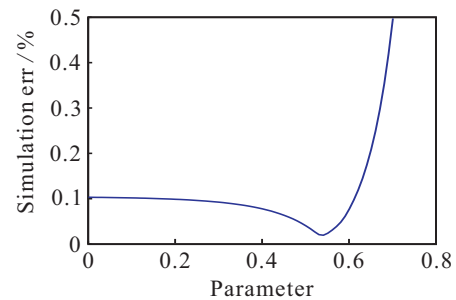


图1 遗传算法用于参数选择误差

表1是将最优的 $\lambda$ 值用于计算最优模拟值和模拟误差的具体数据,其中的平均相对误差是所有区间灰数上界和下界模拟误差的平均值. 对照灰色系统预测模型的精度检验等级参照表[7]可知,模型的平均相对误差小于5%,精度等级为1级,完全可用于区间灰数预测. 这表明本文提出的灰色预测模型是有效、可行的.

表1 区间灰数的模拟值及模拟误差

灰数	原始值	原算法 $\lambda = 0.5$		本文算法 $\lambda = 0.538$	
		模拟值	模拟误差/%	模拟值	模拟误差/%
$\otimes(t_1)$	[1.2, 3.8]				
$\otimes(t_2)$	[3.1, 5.7]	[3.1, 5.7]	0.0	[3.1, 5.7]	0.0
$\otimes(t_3)$	[2.4, 5.1]	[2.5, 5.2]	4.48	[2.5, 5.2]	3.63
$\otimes(t_4)$	[4.3, 6.9]	[4.0, 6.2]	6.22	[4.1, 6.7]	3.81
$\otimes(t_5)$	[3.2, 6.0]	[3.5, 6.2]	6.50	[3.2, 6.0]	0.76
$\otimes(t_6)$	[5.2, 7.9]	[5.0, 7.7]	3.21	[5.0, 8.0]	1.52
平均相对误差		$\Delta e = 4.08\%$		$\Delta e = 1.94\%$	

## 5.2 算例2

为与本模型的结果进行效果对比,选用区间灰数的3种方法的预测误差作为对比参照.方法1选取基本的建模方法,即GM(1,1)模型,拟合区间灰数上下界序列;方法2选取常用的基于区间灰数核与测度的建模方法;方法3选用最新的文献[2]中的基于余切函数变换的区间灰数预测模型.

表2中的数据来源于《上海统计年鉴》、《江苏统计年鉴》和《浙江统计年鉴》中的工业排放量和常住人口数<sup>[2]</sup>.本文采用2005~2012年长江三角洲地区人均工业废水排放量的区间灰数进行建模,2013年和2014年的数据作为误差验证数据.

表2 2005~2014年长江三角洲地区人均工业废水排放量

年份	人均工业废水排放量	年份	人均工业废水排放量
2005	[27.03, 39.05]	2010	[18.82, 35.98]
2006	[24.61, 39.35]	2011	[19.00, 33.39]
2007	[23.05, 39.03]	2012	[20.04, 32.03]
2008	[20.60, 38.46]	2013	[18.80, 29.77]
2009	[18.64, 38.56]	2014	[18.10, 27.12]

表3中的平均预测误差显示,本模型对长江三角洲地区的人均工业废水排放量的预测结果要大大优于方法1和方法2,总体的预测误差也优于方法3.从预测的各年份上下界预测值的误差来看,本文方法的误差最大值不超过12%,明显低于前两种方法的最大值13.8%,与第3种方法持平.从平均预测误差来看,第1步预测的平均误差本文的模型也与方法3一样,保持在5%左右,明显优于前两种方法的7.50%和7.33%;第2步预测的平均相对误差的8.29%也稍小于方法3的8.87%,远远低于前两种方法的11%和10.8%.由此可见,本文提出的模型具有很好的预测效果和很强的实用性.

表3 4种方法对2013年和2014年长江三角洲地区人均工业废水排放量的预测误差

	年份	预测值		预测误差/%		年平均 误差	平均 误差
		下界	上界	下界	上界		
方法1	2013	17.35	31.94	-7.72	7.29	7.50	9.25
	2014	16.62	30.87	-8.18	13.82	11.00	
方法2	2013	17.39	31.91	-7.46	7.20	7.33	9.065
	2014	16.67	30.84	-7.89	13.72	10.80	
方法3	2013	17.64	28.50	-6.17	-4.27	5.22	7.045
	2014	16.97	24.00	-6.22	-11.51	8.87	
本文 方法	2013	17.78	31.47	-5.43	5.72	5.57	6.93
	2014	17.19	30.25	-5.02	11.56	8.29	

## 6 结论

区间灰数的预测因为其原始数据结构的复杂性而增加了建模的难度.本文从区间灰数的特点出

发,利用变权均值生成取代非偏生成,将区间灰数转化成带权的实数序列,然后对其建立离散灰色模型GM(1,1),期间通过遗传算法搜索到最优的权值参数,保证了建模信息的最优化,从而提高了建模精度.从两个算例的仿真实验结果来看,通过与其他模型进行效果比较,显示了新模型在模拟和预测精度上的优势,也证明了本文所提出的方法具有现实意义.本文引入优化算法,用变权均值替代非偏生成,给区间灰数的建模提供了新的思路.

## 参考文献(References)

- [1] 叶璟, 党耀国, 丁松. 基于广义“灰度不减”公理的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1831-1836.  
(Ye J, Dang Y G, Ding S. Grey prediction model of interval grey numbers based on axiom of generalized non-decrease grey degree[J]. Control and Decision, 2016, 31(10): 1831-1836.)
- [2] 叶璟, 党耀国, 刘震. 基于余切函数变换的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2017, 32(4): 688-694.  
(Ye J, Dang Y G, Liu Z. Grey prediction model of interval grey numbers based on cotangent function transformation[J]. Control and Decision, 2017, 32(4): 688-694.)
- [3] 曾波, 刘思峰, 方志耕, 等. 灰色组合预测模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2009, 17(5): 150-155.  
(Zeng B, Liu S F, Fang Z G, et al. Grey combined forecast models and its application[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 17(5): 150-155.)
- [4] 曾波, 刘思峰, 谢乃明, 等. 基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1585-1592.  
(Zeng B, Liu S F, Xie N M, et al. Prediction model for interval grey number based on grey band and grey layer[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1585-1592.)
- [5] 周明, 孙树栋. 遗传算法原理及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999: 146-254.  
(Zhou M, Sun S D. Genetic algorithm and its application[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1999: 146-254.)
- [6] 邓聚龙. 灰色系统基本方法[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004: 26-34.  
(Deng J L. The primary methods of grey theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2004: 26-34.)
- [7] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 第3版. 北京: 科学出版社, 2004: 3-4, 164.  
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theories and its applications[M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2004: 3-4, 164.)

(责任编辑: 孙艺红)