

带有不确定性的多电机卷绕系统的分散最优保性能控制

侯海良^{1,2}, 年晓红¹, 王忠¹, 陈洁^{2†}

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 长沙 410083; 2. 湖南人文科技学院 信息学院, 湖南 娄底 417000)

摘要: 针对具有参数不确定、强耦合的多电机卷绕系统, 提出一种分散最优保性能控制方法. 首先, 将多电机卷绕系统看成由若干动态区间子系统组成的综合系统, 引入区间矩阵以处理子系统模型中的设定值改变和不确定参数; 在此基础上设计基于状态反馈的分散最优保性能控制器, 得到控制器存在的线性矩阵不等式(LMI)充分条件; 最后以三电机卷绕系统为研究对象, 对所设计的控制器进行仿真和平台实验, 实验结果表明, 所提出的分散最优保性能控制能有效降低控制代价, 增强系统的抗干扰能力, 保证张力和速度的控制精度.

关键词: 多电机卷绕系统; 综合系统; 分散最优保性能控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Decentralized optimal guaranteed cost control for multi-motor winding system with uncertainties

HOU Hai-liang^{1,2}, NIAN Xiao-hong¹, WANG Zhong¹, CHEN Jie^{2†}

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China; 2. School of Information, Hu'nan University of Humanities, Science and Technology, Loudi 417000, China)

Abstract: For the multi-motor winding system with parametric uncertainties and strong coupling, a decentralized optimal guaranteed cost control method is proposed. Firstly, a multi-motor winding system is regarded as a synthetic system with several dynamic interval subsystems. To describe the modifications of set point and the uncertain parameters, a interval matrix is introduced. Then, a decentralized optimal guaranteed cost controller is designed based on state feedback, and a sufficient condition for the existence of this controller is derived in terms of the linear matrix inequalities (LMIs). Finally, some simulation and experimental tests are conducted on a three-motor winding system. The experimental results show that the proposed decentralized optimal guaranteed cost controller can efficiently reduce control cost, strengthen the anti-jamming capability of the system, and ensure control precision of the tension and velocity.

Keywords: multi-motor winding system; synthetic system; decentralized optimal guaranteed cost control; linear matrix inequality

0 引言

多电机卷绕系统在纺织、印刷、金属箔、聚合物等生产工业中有着广泛应用^[1]. 这类系统的控制目标是保证系统各张力稳定在预设值的基础上, 尽可能地提高处理速度, 以达到保证产品质量的同时提高生产效率的目的^[2]. 实际多电机卷绕系统可以视为一些独立的机电子系统通过物料耦合而形成的复合系统^[3], 物料的张力与速度之间存在耦合, 系统的机械结构(辊轴的圆柱度、机械装配精度等)、物料的物理特性(物料的类型、材质的均匀度、弹性形变特性等)

和一些未知干扰等都会给张力和速度控制带来不利影响^[4-5]. 物料的连接作用使得子系统间不可避免地存在相互干扰, 张力与速度的耦合使得张力与速度之间存在相互影响, 整个卷绕过程中收、放卷半径变化很大, 有时根据生产工艺的要求还需要调整张力和速度的设定值, 再加上一些其他干扰(如环境温度、湿度对物料弹性模量的影响等)的作用, 要实现张力和速度的高精度控制难度较大.

多电机卷绕系统是一个典型的多输入多输出、非线性、强耦合不确定系统^[6], 其硬件方面存在的问

收稿日期: 2017-08-24; 修回日期: 2017-11-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473314, 61403425, 61472135, 61621062); 湖南省自然科学基金项目(2017JJ2126); 娄底市科技计划项目(2017ZD003).

责任编辑: 关治洪.

作者简介: 侯海良(1980—), 男, 副教授, 博士后, 从事复杂系统建模及优化、多电机协调控制等研究; 年晓红(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂多智能体系统协调控制及优化、变流技术与传动控制等研究.

†通讯作者. E-mail: cj1732@126.com.

题,如辊轴的圆柱度、材料的均匀度等难以得到彻底的解决.硬件方面的不足会使张力和速度产生波动,甚至不稳定,好的控制策略能够提高系统的稳定性和控制精度.因此,控制策略的研究已成为卷绕系统研究的热点问题^[7]. Dou等^[4]将 μ 方法用于分析卷绕系统各种参数不确定性对系统鲁棒稳定性的影响. Hakan等^[8]提出采用 H_∞ 控制策略减小张力与速度间的耦合,运用变增益和线性变参数控制策略(LPV)提高 H_∞ 控制对半径变化的鲁棒性. He等^[3]采用极点配置的方法实现了对板带钢平整机的张力与速度的解耦.文献[2]和文献[9]分别提出了基于 H_2 和 H_∞ 的2自由度增益调度控制方法,通过前馈单元实现张力与速度的解耦,通过反馈单元增强控制器的鲁棒性和抗干扰能力. Liu等^[10]采用滑模控制实现了对冷轧机张力和速度的稳定控制.一些组合控制策略,如神经网络PID^[11]、神经网络滑模控制^[12]、遗传神经网络滑模控制^[13]、粒子群优化算法^[14-15]和数据驱动控制^[16]等也被应用到两跨或多跨卷绕系统的控制中.

上述控制方法都实现了对卷绕系统的稳定控制,并且闭环系统对半径变化等具有良好的鲁棒性.在实际应用中,仅仅保证系统的稳定性和鲁棒性往往是不够的,在保证系统稳定的同时,一般还要求系统的动态响应满足一定的性能指标.因此,一定性能指标下卷绕系统的保性能控制问题也值得深入研究.本文针对复杂多电机卷绕系统提出一种基于LMI的分散最优保性能控制方法.首先将多电机卷绕系统分成若干子系统,将每个子系统的控制输入分解成参考控制输入和控制补偿两部分,得到了系统的误差模型.为了处理系统的参数不确定性和设定点的变化,将子系统视为动态区间系统,引入区间矩阵进行处理;为了消除子系统间的相互影响,提高控制精度,设计一种全状态反馈分散最优保性能控制器,推导出控制器存在的LMI条件,给出控制参数的计算方法.所设计的控制器可以减小控制代价,保证系统对参数变化和外部扰动的有性能鲁棒性^[17].最后以三电机卷绕系统为对象,通过仿真和实验平台的实验表明了所提出方法的有效性.

1 卷绕系统的数学模型

图1为复杂多电机卷绕系统分散控制的结构框图.其中: $t_i(i=1,2,\dots,n)$ 为第*i*跨物料的张力; v_i 、 M_i 、 $u_i(i=0,1,\dots,n)$ 分别表示第*i*段物料的速度、驱动电机和输入转矩;LC表示张力传感器.沿着物料的前进方向可将系统分成放卷系统、速度设定系统、

若干个处理系统和收卷系统等子系统,随着物料的释放和收集,放卷辊和收卷辊的半径不断变化.

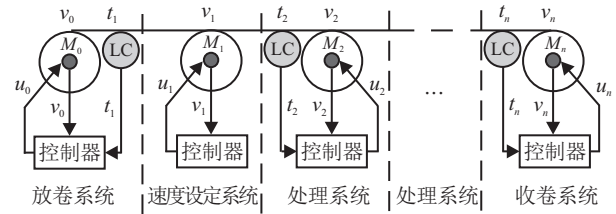


图1 多电机卷绕系统分散控制框图

在卷绕过程中不考虑物料与驱动辊之间的滑动,跨间物料张力和速度可用以下公式^[5]描述:

$$\dot{t}_i = \frac{ES}{L_i}(v_i - v_{i-1}) + \frac{1}{L_i}t_{i-1}v_{i-1} - \frac{1}{L_i}t_i v_i, \quad (1)$$

$$\dot{v}_i = \frac{R_i^2}{J_i}(t_i - t_{i-1}) - \frac{b_{fi}}{J_i}v_i - \frac{v_i}{J_i}\dot{J}_i + \frac{v_i}{R_i}\dot{R}_i + \frac{n_i R_i}{J_i}u_i. \quad (2)$$

其中: E 和 S 分别为物料的杨氏模量和截面积, L_i 为第*i*跨物料长度, b_{fi} 为物料与辊轴之间的摩擦系数, n_i 为第*i*个电机轴与对应的驱动辊之间的传动比, R_i 和 J_i 为第*i*个驱动辊的半径和有效转动惯量.对于放卷辊和收卷辊, R_i 和 $J_i(i=0,n)$ 可以描述为^[15]:

$$J_i = J_{ci} + n_i^2 J_{mi} + \frac{\pi}{2} b \rho (R_i^4 - R_{ci}^4), \quad (3)$$

$$\dot{R}_0 \approx -\frac{h}{2\pi} \frac{v_0}{R_0}, \quad \dot{R}_n \approx \frac{h}{2\pi} \frac{v_n}{R_n}. \quad (4)$$

其中: J_{ci} 为辊轴和空物料辊的转动惯量, J_{mi} 为电机侧旋转单元的转动惯量, b 、 ρ 和 h 分别为物料的宽度、密度和厚度, R_{ci} 为空物料辊的半径.

在卷绕系统中,物料的传输速度由速度设定系统确定,每跨的张力大小通过调节相应子系统的速度来实现.参考速度 v_i^* 和各参考张力 t_i^* 一般是提前设定的.定义如下变量:

$$\begin{aligned} \Delta v_i &= v_i - v_i^*, \quad \Delta u_i = u_i - u_i^*, \quad i = 0, 1, \dots, n; \\ \Delta t_i &= t_i - t_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

其中: v_i^* 、 t_i^* 和 u_i^* 分别为速度、张力和输入转矩的参考值, Δv_i 、 Δt_i 和 Δu_i 为跟踪误差.理想状态下,当各子系统处于稳定状态时,有 $v_i = v_i^*$ 和 $t_i = t_i^*$,此时,各子系统的输入转矩等于参考值 u_i^* .由于不确定性和干扰的存在,各子系统需要额外的输入补偿 Δu_i 使速度误差 Δv_i 和张力误差 Δt_i 收敛到0.

定义状态变量 $x_0 = [\Delta t_1, \Delta v_0]^T$ 、 $x_1 = \Delta v_1$ 和 $x_i = [\Delta t_i, \Delta v_i]^T, i = 2, 3, \dots, n$.将式(3)~(5)代入式(1)和(2),可以推导出各子系统的误差模型,并能计算出各子系统的 v_i^* 和 u_i^* .文献[18]给出了详细的推

导过程,限于篇幅,本文只将相应的结果总结如下.

各系统的状态方程可以统一写成^[1,18]

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i(\Delta u_i + f_i(\Delta v_i)) + \sum_{j=0, j \neq i}^n A_{ij} x_j. \quad (6)$$

对于不同子系统, A_i 、 B_i 、 A_{ij} 、 $f_i(\Delta v_i)$ 表达式如下:

放卷系统:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\frac{v_1^*}{L_1} & \frac{t_0^* - ES}{L_1} \\ \frac{R_0^2}{J_0} & -\frac{b_{f0}}{J_0} \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{n_0 R_0}{J_0} \end{bmatrix},$$

$$A_{01} = \begin{bmatrix} \frac{ES - t_1^*}{L_1} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$f_0(\Delta v_0) = \frac{h}{n_0} \left(\frac{J_0}{2\pi R_0^3} - b\rho R_0 \rho \right) (2v_0^* \Delta v_0 + \Delta v_0^2), \quad (7)$$

其中 t_0^* 为缠绕在放卷辊上物料的内张力.

速度设定系统:

$$A_1 = -b_{f1}/J_1, B_1 = -n_1 R_1/J_1, A_{10} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1^2}{J_1} & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{R_1^2}{J_1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

处理系统: 第1个处理系统中矩阵的表达式为

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{n_2 R_2}{J_2} \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{R_2^2}{J_2} & 0 \end{bmatrix}, A_{20} = \begin{bmatrix} \frac{v_1^*}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{v_2^*}{L_2} & \frac{ES - t_2^*}{L_2} \\ \frac{R_2^2}{J_2} & -\frac{b_{f2}}{J_2} \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} \frac{t_1^* - ES}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

对于其他处理系统 ($i = 3, 4, \dots, n-1$), 有

$$A_i = \begin{bmatrix} -\frac{v_i^*}{L_i} & \frac{ES - t_i^*}{L_i} \\ \frac{R_i^2}{J_i} & -\frac{b_{fi}}{J_i} \end{bmatrix},$$

$$A_{i(i-1)} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{i-1}^*}{L_i} & \frac{t_{i-1}^* - ES}{L_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{n_i R_i}{J_i} \end{bmatrix}, A_{i(i+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{R_i^2}{J_i} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

收卷系统:

$$A_n = \begin{bmatrix} -\frac{v_n^*}{L_n} & \frac{ES - t_n^*}{L_n} \\ \frac{R_n^2}{J_n} & -\frac{b_{fn}}{J_n} \end{bmatrix},$$

$$A_{n(n-1)} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{n-1}^*}{L_n} & \frac{ES - t_{n-1}^*}{L_n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{n_n R_n}{J_n} \end{bmatrix}^T,$$

$$f_n(\Delta v_n) = \frac{h}{n_n} \left(\frac{J_n}{2\pi R_n^3} - b\rho R_n \rho \right) (2v_n^* \Delta v_n + \Delta v_n^2). \quad (11)$$

参考输入转矩可由下式^[1]计算:

$$u_0^* = \frac{R_0}{n_0} t_1^* - \frac{b_{f0}}{n_0 R_0} v_0^* - \frac{h}{n_0} \left(\frac{J_0}{2\pi R_0^3} - R_0 b\rho \right) v_0^{*2};$$

$$u_i^* = \frac{b_{fi}}{n_i R_i} v_i^* + \frac{R_i}{n_i} (t_i^* - t_{i+1}^*), \quad 1 \leq i \leq n-1;$$

$$u_n^* = \frac{R_n}{n_n} t_n^* + \frac{b_{fn}}{n_n R_n} v_n^* - \frac{h}{n_n} \left(\frac{J_n}{2\pi R_n^3} - R_n b\rho \right) v_n^{*2}. \quad (12)$$

子系统的参考速度可由 t_i^* 和 v_1^* 计算, 即

$$v_i^* = \frac{ES - t_1^*}{ES - t_i^*} v_1^*, \quad i = 0, 2, 3, \dots, n. \quad (13)$$

由式(12)和(13)可以看出, v_i^* 和 u_i^* 对速度和张力设定值的改变具有自适应性, u_i^* 在卷绕过程中也能自动调整.

下面给出一些后面证明过程中需要用到的引理.

假设矩阵 $A^m = [a_{ij}^m]_{p \times q}$, $A^M = [a_{ij}^M]_{p \times q}$, 满足 $a_{ij}^m < a_{ij}^M$, 若 $A \in [A^m, A^M] = \{a_{ij} | a_{ij}^m \leq a_{ij} \leq a_{ij}^M, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$, 则称 A 为区间矩阵^[18].

引理1^[18] 区间矩阵 $A \in [A^m, A^M]$, A 可以写成

$$A = A_0 + \Delta A = A_0 + E_a \Sigma_a F_a, \quad \Sigma_a \in \Sigma_a^*. \quad (14)$$

其中

$$A_0 = (A^m + A^M)/2, \quad \Delta A = E_a \Sigma_a F_a,$$

$$H_a = (A^M - A^m)/2 = [s_{ij}]_{p \times q},$$

$$E_a = [\sqrt{s_{11}} e_1^p, \dots, \sqrt{s_{1q}} e_1^p, \dots, \sqrt{s_{p1}} e_p^p, \dots, \sqrt{s_{pq}} e_p^p],$$

$$F_a = [\sqrt{s_{11}} e_1^q, \dots, \sqrt{s_{1q}} e_q^q, \dots, \sqrt{s_{p1}} e_1^q, \dots, \sqrt{s_{pq}} e_q^q]^T,$$

$$\Sigma_a^* = \{\Sigma_a | \Sigma_a = \text{diag}[\chi_{11}, \dots, \chi_{1q}, \dots, \chi_{p1}, \dots, \chi_{pq}],$$

$$|\chi_{ij}| \leq 1, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\},$$

这里 $e_i^p (i = 1, 2, \dots, p)$ 和 $e_i^q (i = 1, 2, \dots, q)$ 分别为 p 和 q 维单位矩阵的第 i 个列向量. 显然 $\Sigma_a^T \Sigma_a \leq I$.

引理2^[19] 设 X, Y 和 Z 为合适维数的实矩阵并且有 $Z^T Z \leq I$, 对于任意给定的 $\lambda > 0$, 有

$$XZY + Y^T Z^T X^T \leq \lambda X X^T + \lambda^{-1} Y^T Y. \quad (15)$$

当 $Z = I$ 时, 不等式(15)可以简写成

$$XY + Y^T X^T \leq \lambda X X^T + \lambda^{-1} Y^T Y. \quad (16)$$

2 分散最优保性能控制器设计

式(6)为图1所示系统误差模型的通用表达式, 由式(7)~(11)可以看出: 矩阵 A_i 、 B_i 和 A_{ij} 中一些元素是 t_i^* 、 v_i^* 、 R_i 和 J_i 的函数. 在卷绕过程中, 放卷端和

收卷端的半径、转动惯量是不断变化的;根据生产工艺要求有时需要调整 v_1^* 和 t_i^* 的值. 当 v_1^* 和 t_i^* 改变时, 由式(13)可知, 各子系统的参考速度会发生改变. 受实际条件的限制, 这些变量都只能在一定的范围内变化, 因此, 它们可以视为区间变量, 根据区间代数运算法则^[20]可以计算出式(7)~(11)中矩阵的元素都是有界的. 因此, 式(6)描述的系统可以视为动态区间系统^[21]. 根据引理1, A_i 、 B_i 和 A_{ij} 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} A_i &= A_{i0} + \Delta A_i = A_{i0} + E_{ai} \Sigma_{ai} F_{ai}, \\ B_i &= B_{i0} + \Delta B_i = B_{i0} + E_{bi} \Sigma_{bi} F_{bi}, \\ A_{ij} &= A_{ij0} + \Delta A_{ij} = A_{ij0} + E_{aij} \Sigma_{aij} F_{aij}. \end{aligned} \quad (17)$$

设计如下的状态反馈分散控制律:

$$\Delta u_i = K_i x_i - f_i(\Delta v_i), \quad (18)$$

其中 K_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 为反馈增益矩阵. 引入式(17), 在分散控制器(18)的作用下系统(6)可改写成

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (A_{i0} + B_{i0} K_i + \Delta A_i + \Delta B_i K_i) x_i + \\ &\sum_{j=0, j \neq i}^n (A_{ij0} + \Delta A_{ij}) x_j. \end{aligned} \quad (19)$$

对于卷绕系统(6), 定义如下的二次性能指标:

$$J = \sum_{i=0}^n \int_0^{\infty} [x_i^T W_i x_i + (K_i x_i)^T S_i (K_i x_i)] dt, \quad (20)$$

其中 W_i 和 S_i 为已知的正定对称矩阵.

定义1 对于卷绕系统(6)和性能指标(20), 如果存在分散控制律(18)和正实数 J^* , 使得对于允许的不确定性, 其闭环系统(19)是渐近稳定的且满足

$$J \leq J^*, \quad (21)$$

则称分散控制律(18)为系统(6)的一个保性能控制律, J^* 为系统(6)的一个性能上界.

定理1 系统(6)在控制器(18)的作用下能保持渐近稳定的充分条件是, 存在正常数 α_i 、 β_i 、 ε_{ij} 和 λ_{ij} , 实对称正定矩阵 Q_i 和矩阵 M_i , 使得下面的LMI成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_i & Q_i F_a^T & M_i F_a^T & D_{Ai}^T & D_{Fi}^T & Q_i & M_i^T \\ F_a Q_i & -\alpha_i I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_a M_i & 0 & -\beta_i I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{Ai} & 0 & 0 & -A_{\varepsilon i} & 0 & 0 & 0 \\ D_{Fi} & 0 & 0 & 0 & -A_{\lambda i} & 0 & 0 \\ Q_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_i^{-1} & 0 \\ M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_i^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \Theta_i &= Q_i A_{i0}^T + A_{i0} Q_i + M_i^T B_{i0}^T + \\ &B_{i0} M_i + \alpha_i E_{ai} E_{ai}^T + \beta_i E_{bi} E_{bi}^T + \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n (\varepsilon_{ij} I + \lambda_{ij} E_{aij} E_{aij}^T),$$

$$D_{Ai} = [(A_{0i0} Q_i)^T, (A_{1i0} Q_i)^T, \dots, (A_{ni0} Q_i)^T]^T,$$

$$D_{Fi} = [(F_{a0i} Q_i)^T, (F_{a1i} Q_i)^T, \dots, (F_{ani} Q_i)^T]^T,$$

$$A_{\varepsilon i} = \text{diag}\{\varepsilon_{0i} I, \varepsilon_{1i} I, \dots, \varepsilon_{ni} I\},$$

$$A_{\lambda i} = \text{diag}\{\lambda_{0i} I, \lambda_{1i} I, \dots, \lambda_{ni} I\}.$$

则分散控制器(18)是卷绕系统(6)的一个保性能控制律, 并且有 $K_i = M_i Q_i^{-1}$, 系统性能上界为 $J^* = \sum_{i=0}^n x_{i0}^T P_i x_{i0}$, $P_i = Q_i^{-1}$, x_{i0} 为 x_i 的初始状态.

证明 选取如下的Lyapunov函数:

$$V(x(t)) = \sum_{i=0}^n x_i^T P_i x_i. \quad (23)$$

其中: $x(t) = [x_0^T, x_1^T, \dots, x_n^T]$, P_i 为正定对称矩阵. 显然有 $V(x(t)) > 0$. 定义 $\Xi = V(x(t)) + J$, 引入式(20), Ξ 沿轨迹(19)对时间求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\Xi} &= \\ &\sum_{i=0}^n \left\{ x_i^T [A_{i0}^T P_i + P_i A_{i0} + K_i^T B_{i0}^T P_i + P_i B_{i0} K_i + \right. \\ &P_i E_{ai} \Sigma_{ai} F_{ai} + (E_{ai} \Sigma_{ai} F_{ai})^T P_i + P_i E_{bi} \Sigma_{bi} F_{bi} K_i + \\ &K_i^T (E_{bi} \Sigma_{bi} F_{bi})^T P_i + W_i + K_i^T S_i K_i] x_i + \\ &\sum_{j=0, j \neq i}^n [x_j^T A_{ij0}^T P_i x_i + x_j^T (E_{aij} \Sigma_{aij} F_{aij})^T P_i x_i + \\ &x_i^T P_i A_{ij0} x_j + x_i^T P_i (E_{aij} \Sigma_{aij} F_{aij}) x_j \left. \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

根据引理2, 有下列不等式成立:

$$\begin{aligned} &P_i E_{ai} \Sigma_{ai} F_{ai} + (E_{ai} \Sigma_{ai} F_{ai})^T P_i + \\ &P_i (E_{bi} \Sigma_{bi} F_{bi}) K_i + K_i^T (E_{bi} \Sigma_{bi} F_{bi})^T P_i \leq \\ &\alpha_i P_i E_{ai} E_{ai}^T P_i + \alpha_i^{-1} F_{ai}^T F_{ai} + \\ &\beta_i P_i E_{bi} E_{bi}^T P_i + \beta_i^{-1} K_i^T F_{bi}^T F_{bi} K_i, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &x_j^T A_{ij0}^T P_i x_i + x_i^T P_i A_{ij0} x_j + x_j^T (E_{aij} \Sigma_{aij} F_{aij})^T \times \\ &P_i x_i + x_i^T P_i E_{aij} \Sigma_{aij} F_{aij} x_j \leq \\ &x_i^T P_i (\varepsilon_{ij} + \lambda_{ij} E_{aij} E_{aij}^T) P_i x_i + \\ &\varepsilon_{ij}^{-1} x_j^T A_{ij0}^T A_{ij0} x_j + \lambda_{ij}^{-1} x_j^T F_{aij}^T F_{aij} x_j. \end{aligned} \quad (26)$$

将式(25)和(26)代入(24), 调整后可得

$$\begin{aligned} \dot{\Xi} &\leq \\ &\sum_{i=0}^n \left\{ x_i^T [A_{i0}^T P_i + P_i A_{i0} + K_i^T B_{i0}^T P_i + P_i B_{i0} K_i + \right. \\ &\alpha_i P_i E_{ai} E_{ai}^T P_i + \beta_i P_i E_{bi} E_{bi}^T P_i + \alpha_i^{-1} F_{ai}^T F_{ai} + \\ &\beta_i^{-1} K_i^T F_{bi}^T F_{bi} K_i + W_i + K_i^T S_i K_i \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n (\varepsilon_{ij} P_i P_i + \lambda_{ij} P_i E_{aij} E_{aij}^T P_i) x_i + \sum_{j=0, j \neq i}^n x_j^T (\varepsilon_{ij}^{-1} A_{ij0}^T A_{ij0} + \lambda_{ij}^{-1} F_{aij}^T F_{aij}) x_j, \quad (27)$$

其中

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0, j \neq i}^n x_j^T (\varepsilon_{ij}^{-1} A_{ij0}^T A_{ij0} + \lambda_{ij}^{-1} F_{aij}^T F_{aij}) x_j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0, j \neq i}^n x_i^T (\varepsilon_{ji}^{-1} A_{ji0}^T A_{ji0} + \lambda_{ji}^{-1} F_{aji}^T F_{aji}) x_i. \quad (28)$$

引入式(28), 可将式(27)改写成

$$\dot{z} = \dot{V}(x(t)) + \dot{J} \leq \sum_{i=0}^n x_i^T \bar{\Omega}_i x_i. \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_i = & A_{i0}^T P_i + P_i A_{i0} + K_i^T B_{i0}^T P_i + P_i B_{i0} K_i + \\ & \alpha_i P_i E_{ai} E_{ai}^T P_i + \beta_i P_i E_{bi} E_{bi}^T P_i + W_i + \\ & K_i^T S_i K_i + \alpha_i^{-1} F_{ai}^T F_{ai} + \beta_i^{-1} K_i^T F_{bi}^T F_{bi} K_i + \\ & \sum_{j=0, j \neq i}^n (\varepsilon_{ij} P_i P_i + \lambda_{ij} P_i E_{aij} E_{aij}^T P_i + \\ & \varepsilon_{ji}^{-1} A_{ji0}^T A_{ji0} + \lambda_{ji}^{-1} F_{aji}^T F_{aji}). \end{aligned}$$

如果 $\bar{\Omega}_i < 0$, 则 $\dot{z} < 0$ 成立. 由式(20)可得 $\dot{J} = \sum_{i=0}^n (x_i^T W_i x_i + x_i^T K_i^T S_i K_i x_i) \geq 0$, 由式(29)有

$$\dot{V}(x(t)) < -\dot{J} < 0. \quad (30)$$

由Lyapunov定理知, 闭环系统(19)是渐近稳定的.

定义 $Q_i = P_i^{-1}$, $M_i = K_i Q_i$ 和 $\Omega_i = Q_i \bar{\Omega}_i Q_i$, 有

$$\begin{aligned} \Omega_i = & Q_i A_{i0}^T + A_{i0} Q_i + M_i^T B_{i0}^T + B_{i0} M_i + \\ & \alpha_i E_{ai} E_{ai}^T + \beta_i E_{bi} E_{bi}^T + \alpha_i^{-1} Q_i F_{ai}^T F_{ai} Q_i + \\ & \beta_i^{-1} M_i^T F_{bi}^T F_{bi} M_i + Q_i W_i Q_i + M_i^T S_i M_i + \\ & \sum_{j=0, j \neq i}^n (\varepsilon_{ij} I + \lambda_{ij} E_{aij} E_{aij}^T + \\ & \varepsilon_{ji}^{-1} Q_i A_{ji0}^T A_{ji0} Q_i + \lambda_{ji}^{-1} Q_i F_{aji}^T F_{aji} Q_i) < 0. \quad (31) \end{aligned}$$

由Schur补定理^[22]知, 式(31)等价于(22).

由于系统是渐近稳定的, 有 $V(x(\infty)) = 0$. 式(30)两边对时间从0到 ∞ 积分后, 可改写成

$$J \leq V(x(0)) - V(x(\infty)) = \sum_{i=0}^n x_{i0}^T P_i x_{i0} = J^*. \quad (32)$$

由定义1可知, 式(18)是系统(6)的一个保性能控制

律, $K_i = M_i Q_i^{-1}$. $J^* = \sum_{i=0}^n x_{i0}^T P_i x_{i0}$ 是闭环性能指标的一个上界. \square

注1 定理1中得到的保性能指标依赖于系统的初始状态 $x(0)$, 而在实际应用中往往难以精确获得系统的初始状态. 为了克服这一困难, 假定初始状态是一个满足 $E\{x(0)x^T(0)\} = I$ 的零均值随机变量. 计算性能指标的期望值, 可得

$$\bar{J} \leq E\{J^*\} = \sum_{i=0}^n \text{Trace}\{P_i\} \quad (33)$$

为系统的期望保性能指标, $\text{Trace}\{P_i\}$ 表示 P_i 的迹.

定理1中的式(22)是LMI, 通过Matlab的LMI工具箱可以判断LMI的可行性, 并可求出其可行解. 如果LMI有可行解, 则系统(6)存在分散保性能控制律. 为了进一步优化闭环系统(19)的保性能指标, 需要选择一个保性能控制律使系统的性能上界最小, 使性能上界最小的控制律称为最优保性能控制律.

定理2 对于卷绕系统(6)和性能指标(20), 如果以下的优化问题:

$$\min_{\alpha_i, \beta_i, \varepsilon_{ij}, \lambda_{ij}, Q_i, M_i} \text{Trace}\{Y_i\}. \quad (34)$$

$$\text{s.t. 1) } \begin{bmatrix} \Theta_i & Q_i F_a^T M_i F_a^T & D_{A_i}^T & D_{F_i}^T & Q_i & M_i^T \\ F_a Q_i - \alpha_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_a M_i & 0 & -\beta_i I & 0 & 0 & 0 \\ D_{A_i} & 0 & 0 & -\Lambda_{\varepsilon_i} & 0 & 0 \\ D_{F_i} & 0 & 0 & 0 & -\Lambda_{\lambda_i} & 0 & 0 \\ Q_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_i^{-1} & 0 \\ M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_i^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

$$2) \begin{bmatrix} Y_i & I_i \\ I_i & Q_i \end{bmatrix} > 0$$

有解 $(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\varepsilon}_{ij}, \hat{\lambda}_{ij}, \hat{Q}_i, \hat{M}_i)$, 则控制律(18)是系统(6)的分散最优保性能控制律, 其增益 $\hat{K}_i = \hat{M}_i \hat{Q}_i^{-1}$, 相应的性能上界是 $\bar{J} = \sum_{i=0}^n \text{Trace}\{\hat{P}_i\}$, $\hat{P}_i = \hat{Q}_i$.

证明 如果 $(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\varepsilon}_{ij}, \hat{\lambda}_{ij}, \hat{Q}_i, \hat{M}_i)$ 是优化问题(34)的一个解, 则必定是(34)中约束条件1)的一个可行解, 同样也是定理1中式(22)的可行解. 因此, $\hat{K}_i = \hat{M}_i \hat{Q}_i^{-1}$ 是系统(18)的一个分散保性能控制律的增益矩阵. 根据Schur补定理^[22], 式(34)中约束条件2)等价于 $Y_i > Q_i^{-1} = P_i > 0$. 于是, $\text{Trace}\{Y_i\}$ 最小使得 $\text{Trace}\{P_i\}$ 也最小, 即最小化系统期望保性能指标(33). 因此, 满足条件(34)的控制律为分散最优保性能控制律. \square

优化问题(34)也可以采用LMI工具箱进行求解. 由前面的分析可知, 本文提出的控制策略原理如图2所示.

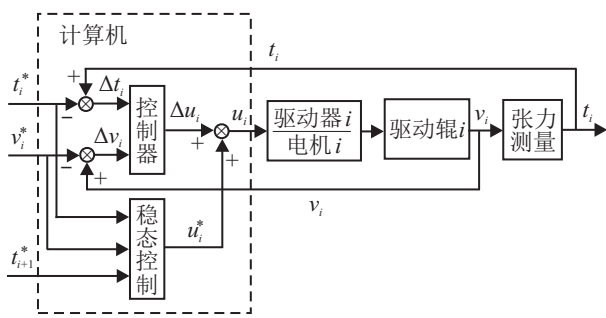


图2 本文提出的控制策略原理框图

3 仿真与实验

为了验证本文所设计的控制器的有效性,对所提出的分散最优保性能控制进行仿真和平台实验,并与文献[23]提出的经典分散控制进行比较。

实验平台采用如图3所示的三电机卷绕系统,它可划分为放卷系统、速度设定系统和收卷系统3个子系统,可分别用式(7)、(8)和(11)进行描述。每个驱动辊固定套接在电机轴上(有 $n_0 = n_1 = n_2 = 1$)。系统的标称参数为: $b = 0.1 \text{ m}$, $J_1 = 8.67 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $E = 1.6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $b_{f0} = b_{f2} = 0.005 \text{ (N} \cdot \text{m)/(rad/s)}$, $h = 1.2 \times 10^{-4} \text{ m}$, $L_1 = L_2 = 1.2 \text{ m}$, $t_0 = 4 \text{ N}$, $R_1 = 0.02 \text{ m}$, $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, $b_{f1} = 0.0065 \text{ (N} \cdot \text{m)/(rad/s)}$, $J_{c0} + n_0^2 J_{m0} = 4.56 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_{c2} + n_2^2 J_{m2} = 4.52 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

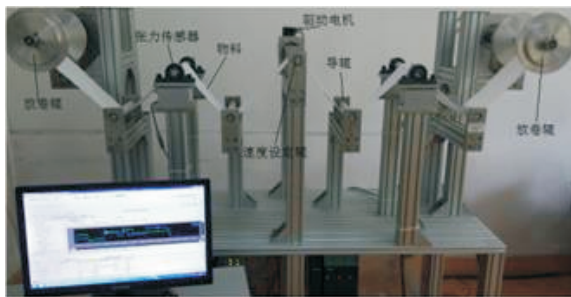


图3 三电机卷绕系统实验平台

由于放卷/收卷半径 (R_0 和 R_2) 和转动惯量 (J_0 和 J_2) 是时变的,根据工艺要求各子系统的张力设定 (t_1^* 和 t_2^*) 和速度设定 (v_1^*) 也需要调整。如前所述,这些变量都可视为区间变量,因此,系统模型中包含上述变量的矩阵都可视为区间矩阵。选取如下限制条件:

$$\begin{aligned} 0.1 \text{ m} &\leq R_0 \leq 0.2 \text{ m}, 0.1 \text{ m} \leq R_2 \leq 0.2 \text{ m}, \\ 0 \text{ m/s} &\leq v_1^* \leq 3 \text{ m/s}, 0 \text{ N} \leq t_1^* \leq 22 \text{ N}, \\ 0 \text{ N} &\leq t_2^* \leq 22 \text{ N}. \end{aligned} \quad (35)$$

根据式(13)、(35)和区间代数运算法则^[20]可以计算出参考速度 (v_0^* 和 v_2^*) 的变化范围。同理,根据区间代数运算法则和引理1可以得到系统的等效描述。

选定二次性能指标(20)中的正定矩阵

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, W_1 = 1, W_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$S_0 = 0.01, S_1 = 1, S_2 = 0.01. \quad (36)$$

根据定理2可以得到三电机卷绕系统稳定的LMI条件,求解LMI可以计算出最优保性能控制器的增益 \hat{K}_i 和矩阵 \hat{P}_i 为

$$\hat{K}_0^T = \begin{bmatrix} -12.3756 \\ 316.3978 \end{bmatrix}, \hat{P}_0 = \begin{bmatrix} 0.0113 & -0.1177 \\ -0.1177 & 3.0081 \end{bmatrix},$$

$$\hat{K}_1 = -192.8936, \hat{P}_1 = 12.6969,$$

$$\hat{K}_2^T = \begin{bmatrix} -8.8019 \\ -191.3841 \end{bmatrix}, \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.0070 & 0.0835 \\ 0.0835 & 2.7635 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

为了说明本文提出的分散最优保性能控制器的性能,与文献[23]所提出的分散鲁棒控制器的控制效果进行比较,在相同的参数条件下可以求出分散鲁棒控制器的控制参数 K_i 和矩阵 P_i 为

$$K_0^T = \begin{bmatrix} -21.1076 \\ 1469.0639 \end{bmatrix}, P_0 = \begin{bmatrix} 0.0582 & -0.3379 \\ -0.3379 & 24.4314 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = -294.4864, P_1 = 48.9610,$$

$$K_2^T = \begin{bmatrix} -3.5977 \\ -299.2864 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.0392 & 0.3657 \\ 0.3657 & 28.7516 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

为了比较分散最优保性能控制器和分散鲁棒控制器的性能,根据式(33)可以计算出两种控制器的期望性能指标上界,并求出控制器增益的2-范数,结果见表1。由表1可以看出,分散最优保性能控制的性能上界明显小于分散鲁棒控制,这说明分散最优保性能控制能减小系统的控制代价,而且各子系统的控制器增益的2-范数都小于分散鲁棒控制器的增益。

表1 两种控制器的性能指标比较

性能指标	分散最优保性能控制	分散鲁棒控制
J	18.4868	102.2415
$\ K_1\ $	316.6397	1469.2516
$\ K_2\ $	192.8936	294.4864
$\ K_3\ $	191.5864	299.3080

下面将分两种情况对控制系统进行仿真。

情况1:放卷张力、收卷张力和速度的设定值分别在不同时刻改变;

情况2:放卷张力、收卷张力和速度的参考轨迹与情况1一样,假设 J_{c0} 、 J_{m0} 、 J_1 、 J_{c2} 和 J_{m2} 存在 $\pm 30\%$ 的随机干扰, E 、 b_{f0} 、 b_{f1} 和 b_{f2} 存在 $\pm 50\%$ 的随机干扰。

情况1主要是测试控制器对设定值的跟踪性能,

情况2主要是测试控制器抑制参数干扰的能力. 两种控制器作用下张力和速度的仿真结果见图4和图5.

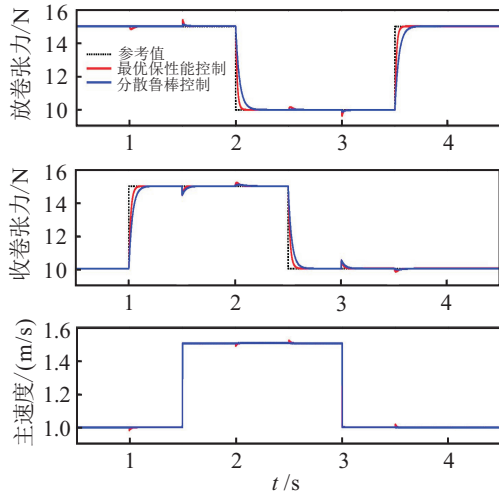


图4 情况1下的仿真结果

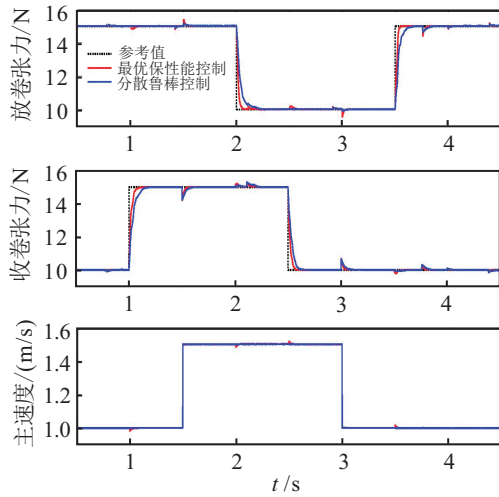


图5 情况2下的仿真结果

由图4可以看出,两种控制器作用下张力和速度都具有较好的跟踪性能. 相比较而言,当参考值发生改变时,采用分散最优保性能控制可使放卷张力和收卷张力的跟踪速度更快;但在抑制放卷张力与收卷张力之间以及张力与速度之间的相互影响方面,分散最优保性能控制比分散鲁棒控制略差.

由图5可以看出,当系统参数存在扰动时,两种控制器作用下的张力和速度都出现了波动,但波动的幅度并不大,而且两种控制方法下张力和速度的波动没有明显的差距. 考虑到系统参数为变化剧烈的随机扰动,且变化量高达30%,部分参数变化量甚至达到50%,由此可见,两种控制方法对参数扰动具有很强的鲁棒性.

为了进一步验证分散最优保性能控制的性能,采用图3所示的实验平台进行实验,实验中张力和速度的参考轨迹与仿真情况1相似. 分散最优保性能控制和分散鲁棒控制的实验结果见图6和图7;两种控制

方法作用下,参考值改变时张力和速度的相对误差结果见表2.

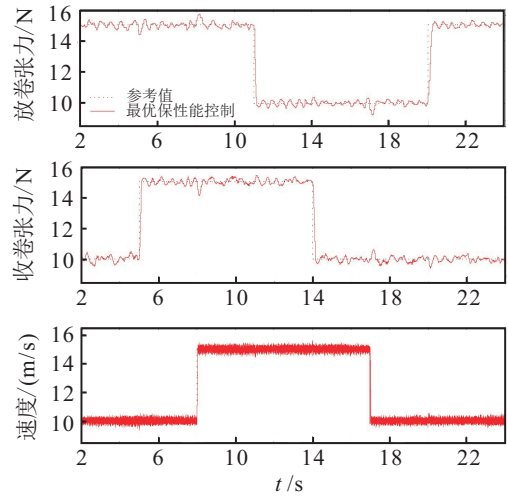


图6 最优保性能控制的实验结果

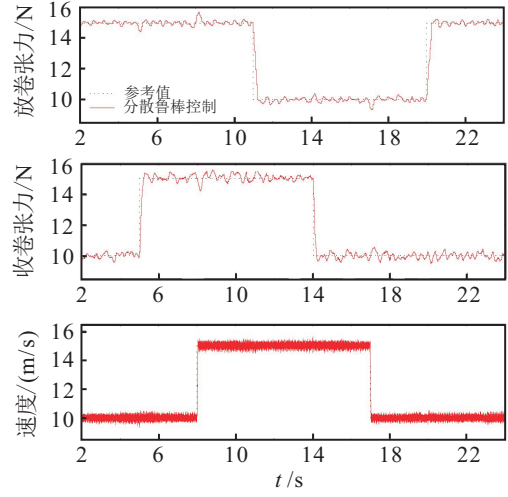


图7 分散鲁棒控制的实验结果

表2 两种控制器作用下张力和速度的相对误差

时间/s	分散最优保性能控制/%			分散鲁棒控制/%		
	δ_{t1}	δ_{t2}	δ_{v1}	δ_{t1}	δ_{t2}	δ_{v1}
5	4.05	—	6.75	3.84	—	6.65
8	4.73	5.83	—	4.67	5.33	—
11	—	2.81	4.85	—	3.64	4.45
14	3.87	—	5.82	3.81	—	5.61
17	7.55	6.06	—	6.57	5.83	—
20	—	5.84	5.17	—	5.11	5.13

通过对比图6和图7可以看出,当张力设定值改变时,最优保性能控制具有更快的跟踪速度. 在抑制张力和速度相互干扰方面,当速度增加50%时(第8s),分散最优保性能控制下,放卷张力和收卷张力的最大相对误差分别为4.73%和5.83%;而采用分散鲁棒控制时,两者的最大相对误差分别为4.67%和5.33%. 同样,在速度减小50%时(第17s),放卷张力在分散最优保性能和分散鲁棒控制下的最大相对误差分别为7.55%和6.57%,而收卷张力分别为6.06%和5.83%. 可以看出,速度变化时采用分散最优鲁棒

控制,放卷张力和收卷张力的误差略大.同样的结论也可以通过分析放卷张力与收卷张力之间的相互影响得到.综合仿真和实验结果可知,与分散鲁棒控制相比,分散最优保性能控制的张力跟踪速度更快,但抑制张力与速度之间的相互影响能力略差.考虑到控制代价问题,分散最优保性能控制在实际控制中具有一定的优势.

4 结论

本文针对复杂的多电机卷绕系统提出了一种分散最优保性能控制.首先,将复杂的多电机卷绕系统分解成若干子系统,考虑到系统参数和设定值的变化,将子系统视为动态区间系统,引入区间矩阵进行处理;然后,考虑控制代价问题,设计了基于状态反馈的分散最优保性能控制器,将分散最优保性能控制器的设计问题和闭环系统的稳定性问题归结为LMI的求解问题,采用Lyapunov稳定性理论推导出了闭环系统渐近稳定的LMI充分条件;最后,以实验室的三电机卷绕系统为应用对象,通过仿真和平台实验表明了所提出的分散最优保性能控制的有效性.

参考文献(References)

- [1] Hou H L, Nian X H, Xiong H Y, et al. Robust decentralized coordinated control of a multi-motor web-winding system[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2016, 24(4): 1495-1503.
- [2] Claveau F, Chevrel P, Knittel K. A 2DOF gain-scheduled controller design methodology for a multi-motor web transport system[J]. Control Engineering Practice, 2008, 16(5): 609-622.
- [3] He J J, Yu S Y, Zhong J. Tension-speed decoupling control of temper mill for plate-strip steel[J]. Control and Decision, 2003, 18(5): 522-526.
- [4] Dou X, Wang W. Robust control of multistage printing systems[J]. Control Engineering Practice, 2010, 18(3): 219-229.
- [5] Raul P R, Manyan S G, Pagilla P R, et al. Output regulation of nonlinear systems with application to roll-to-roll manufacturing system[J]. IEEE-ASME Trans on Mechatronics, 2015, 20(3): 1089-1098.
- [6] Zhang Y F, Chang Y L, Gao Y Y, et al. Fuzzy ADRC applied in gravure press tension control system[J]. J of Xi'an University of Technology, 2015, 31(2): 144-149.
- [7] Pagilla P R, King E O, Dreinhoefer L H, et al. Robust observer-based control of an aluminum strip processing line[J]. IEEE Trans on Industry Applications, 2000, 36(3): 865-870.
- [8] Hakan Koc, Dominique Knittel, Michel de Mathelin, et al. Modeling and robust control of winding systems for elastic webs[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2002, 10(2): 197-208.
- [9] Knittel D, Laroche E, Gigan D, et al. Tension control for winding system with two-degrees-of controllers[J]. IEEE Trans on Industry Applications, 2003, 39(1): 113-120.
- [10] Liu L, Fang Y M, Li J X, et al. Dynamic sliding mode decoupling control for speed and tension system of reversible cold strip mill[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(8): 581-586.
- [11] Deng X, Hu M Y. Application of PID neural network in paper tension control system[J]. Trans of China Pulp and Paper, 2014, 29(1): 44-48.
- [12] Chen C L, Chang K M, Chang C M. Modeling and control of a web-fed machine[J]. Applied Mathematical Modelling, 2004, 28(10): 863-876.
- [13] Zhang C F, Wang Y N, He J. GA-NN-integrated sliding mode control system and its application in the printing press[J]. Control Theory & Applications, 2003, 20(2): 217-222.
- [14] Sun J Q, Lv S, Dai H. Study on optimization of reduction amount and tension in cold rolling mill based on particle swarm optimization[J]. ICIC Express Letters, 2010, 4(4): 1385-1392.
- [15] Priya N H, Kavitha P, Muthukumar N, et al. Design of PSO-based PI controller for tension control in web transport systems[C]. Int Conf on Soft Computing Systems. India: Springer, 2016: 509-516.
- [16] Xiao L, Ding Y S, Ren L H, et al. Data-driven cooperative intelligent controller based on the endocrine regulation mechanism[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2014, 22(1): 94-101.
- [17] Chen Y X, Wang Y C. Study on guaranteed cost control for linear motor servo system[J]. Proc of the CSEE, 2006, 26(24): 174-178.
- [18] Hou H L, Nian X H, Peng Z, et al. State feedback robust control for three-motor winding system—LMI approach[J]. Electric Machines and Control, 2016, 20(7): 111-118.
- [19] Mao W, Chun J. Quadratic stability and stabilization of dynamic interval systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 32(3): 1007-1012.
- [20] Alefeld G, Herzberger J. Introduction to interval Computation[M]. New York: Academic Press, 1983: 2-19.
- [21] Boyd S, Ghaoui E I, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994: 43-52.
- [22] Petersen I R, McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(9): 1971-1977.
- [23] Hou H L, Nian X H, Xu S Z, et al. Robust decentralized control for large-scale web-winding systems: A linear matrix inequality approach[J]. Trans of the Institute of Measurement and Control, 2017, 39(7): 953-964.
- [24] Wang Y W, Gong Y Z, Xiao Q, et al. Variable range analysis based on interval computation[J]. J of Beijing University of Post and Telecommunication, 2009, 32(3): 36-41.