

基于递推近似最小一乘的多传感器系统 偏差稳健估计算法

郭蕴华^{1†}, 汪敬东¹, 任文峰¹, 胡义¹, 牟军敏²

(1. 武汉理工大学 船舶动力工程技术交通行业重点实验室,
武汉 430063; 2. 武汉理工大学 航运学院, 武汉 430063)

摘要: 对于多传感器多目标跟踪问题,系统偏差对航迹融合精度有较大影响,因此在信息融合系统中,首先要对各传感器的系统偏差进行估计,而在含错误关联和观测野值的复杂环境下,传统系统偏差估计方法的性能会严重退化. 对此,提出一种具有递推形式的近似最小一乘稳健估计算法,以减少异常噪声对偏差估计的不利影响. 使用平方根平滑逼近函数替代最小一乘法的目标函数,基于牛顿方向及其秩1修正推导出该方法的递推求解框架. 基于条件数分析,证明所提出算法的数值稳定性好于Huber方法. 通过两个仿真算例,将所提出算法与已有其他算法进行对比验证. 仿真结果表明,在含错误关联和观测野值的条件下,所提出算法可以改善偏差估计精度,并且明显好于已有的其他算法.

关键词: 偏差估计; 传感器配准; 最小一乘法; 稳健估计; 牛顿方向; 秩1修正

中图分类号: TP212.9

文献标志码: A

Multi-sensor bias robust estimation based on recursive approximate least absolute deviation

GUO Yun-hua^{1†}, WANG Jing-dong¹, REN Wen-feng¹, HU Yi¹, MOU Jun-min²

(1. Key Lab of Marine Power Engineering & Technology of Ministry of Communications, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China; 2. School of Navigation, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China)

Abstract: For the problem of multisensor-multitarget tracking, the sensor bias has great influence on the accuracy of track fusion. Thus, the sensor bias should be estimated at first in the system of information fusion. However the performance of the traditional methods of bias estimation will degrade dramatically in the complex environment that exists the misassociations and observed outliers. Therefore, an algorithm of robust estimation based on the recursive approximate least absolute deviation (RALAD) is proposed, aiming to decrease the adverse impacts of the misassociations and observed outliers. A smooth approximate function in the square-root form is used to replace the least absolute cost function, and the recursive framework is derived based on the Newton method and its rank-one modification. It is verified by the condition number analysis that the proposed algorithm has better numerical stability than the Huber-based method. Performance comparisons between the proposed and existing algorithms are carried out through two simulation examples. The results show that the proposed algorithm is obviously superior to the existing algorithms, and it can improve the estimation accuracy significantly in the case of the misassociations and observed outliers.

Keywords: bias estimation; sensor registration; least absolute deviation; robust estimation; Newton direction; rank one update

0 引言

在目标跟踪领域,多传感器信息融合被认为是一种可以提高精度和可靠性的方法^[1]. 但在实际工程

中,由于传感器量测存在系统偏差,可能导致融合性能不升反降. 因此,在信息融合过程中,首先需要对系统偏差进行估计,常用的方法包括:EX方法^[2]、极大

收稿日期: 2017-09-13; 修回日期: 2017-12-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51579201).

责任编委: 俞立.

作者简介: 郭蕴华(1975—),男,教授,博士,从事信息融合及工程优化等研究;汪敬东(1993—),男,硕士生,从事信息融合的研究.

[†]通讯作者. E-mail: wtugyh@163.com.

似然法^[3-4]、基于贝叶斯的联合估计与辨识^[5]等. 近年来, Lan等^[6]提出了基于最大期望的联合跟踪算法, 兼顾了状态估计的误差和模型参数辨识的偏差; Yong等^[7]提出一种仅基于目标位置的偏差配准算法, 以得到对目标机动性不敏感的估计结果; Taghavi等^[8]提出一种适用于分布式跟踪系统的偏差估计算法, 该算法不需使用滤波增益信息. 然而, 这些算法都是基于最小二乘框架, 当出现错误关联和观测野值时估计精度会严重下降^[9]. 为此, Du等^[10]提出一种针对角度的广义最小二乘估计算法, 去掉了斜距离的估计, 从而提高了角度估计精度; Taghavi等^[11]提出一种基于三角剖分的针对角度偏差的估计算法, 可用于较大噪声环境中; 田威等^[12]提出一种基于最小平方中值(LMedS)的稳健估计器, 用于出现错误关联时的偏差估计.

通常, 最小二乘法受野值影响较大, 稳健性较差. 对此, 研究人员提出了稳健估计的方法. Huber^[13]提出一种光滑的分段函数, 用最小二乘法替换最小一乘法中不可求导的部分, 以实现计算的稳健估计; 吴昊等^[14]提出了一种基于广义 M 估计的鲁棒滤波算法以减小异常误差对非线性物理系统的影响; Chang等^[15]分析了Huber、Hampel、IGG等几种 M 估计算法的性能, 这些算法在含有突出干扰的情况下仍具有较好的估计性能; Khodabandeh等^[16]提出一种 L_1 范数估计算法, 将最小一乘问题等效为含等式约束的线性规划问题, 使用Dikin法求解, 能得到较高精度, 但其时间复杂度仍然较大; Zeng等^[17]提出一种基于三角模糊数的模糊最小一乘估计算法, 该算法具有较好的稳健性; Liu等^[18]提出一种 L_1 范数的估计算法, 将最小一乘问题转换为带二次等式约束的最小化问题, 使用迭代阈值收缩算法(ISTA)求解; Xu等^[19]提出一种三角函数形式下的近似最小一乘函数, 但由于 $\tanh$ 函数本身的性质, 该算法的稳健性反而受到影响; Caccetta等^[20]提出了一种具有全局二次收敛性质的最小一乘近似函数.

利用文献[20]中的近似函数, 本文提出一种基于递推近似最小一乘(Recursion approximate least absolute deviation, RALAD)的多传感器偏差估计算法. 该算法使用一个平方根平滑逼近函数替代最小一乘目标函数, 并具有基于牛顿法的递推求解框架. 通过Monte-Carlo仿真实验, 与EX算法、基于Huber的 M 估计算法、LMedS算法进行对比分析. 仿真结果表明, 本文算法可以提高偏差估计精度, 实时性较好.

1 多传感器偏差估计模型

1.1 运动模型和测量模型

在以大地为基准的笛卡尔坐标系中, 目标的运动模型可以描述为

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1}. \quad (1)$$

其中: $\mathbf{X}_k = [x_k \ y_k \ z_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k \ \dot{z}_k]^T$; $\mathbf{v}_{k-1}$ 为过程噪声, 假定其为零均值高斯白噪声, 其方差 $\mathbf{Q}_k = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]$; $\mathbf{F}$ 为状态转移矩阵.

考虑两个位置坐标为 I, J 的传感器 i 和 j 的多目标跟踪场景. 对于第 l ($l = 1, 2, \dots, N$) 个目标, 传感器 i 在 k 时刻的量测为 $\mathbf{Z}_{i,k,l}^m = [r_{i,k,l}^m \ \beta_{i,k,l}^m \ \epsilon_{i,k,l}^m]^T$, $r_{i,k,l}^m$ 、 $\beta_{i,k,l}^m$ 和 $\epsilon_{i,k,l}^m$ 分别为斜距离量测、方位角量测和高低角量测. $\mathbf{Z}_{i,k,l}^m$ 在笛卡尔坐标系下的转换量测为

$$\mathbf{Z}_{i,k,l} = \begin{bmatrix} x_{i,k,l}^m \\ y_{i,k,l}^m \\ z_{i,k,l}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{i,k,l}^m \cos \epsilon_{i,k,l}^m \cos \beta_{i,k,l}^m \\ r_{i,k,l}^m \cos \epsilon_{i,k,l}^m \sin \beta_{i,k,l}^m \\ r_{i,k,l}^m \sin \epsilon_{i,k,l}^m \end{bmatrix}. \quad (2)$$

应用泰勒展开式, 并忽略高阶项, 得到

$$\mathbf{Z}_{i,k,l} = \mathbf{H}\mathbf{X}_{i,k,l} + \mathbf{B}_{i,k,l}\mathbf{b}_i + \mathbf{w}_{i,k,l}. \quad (3)$$

其中: $\mathbf{H} = [\mathbf{I}_3 \ \mathbf{O}_3]$; 系统偏差 $\mathbf{b}_i = [\Delta r_i \ \Delta \beta_i \ \Delta \epsilon_i]^T$; 转换测量噪声 $\mathbf{w}_{i,k,l}$ 为零均值高斯白噪声, 且 $\mathbf{R}_{i,k,l} = E[\mathbf{w}_{i,k,l} \mathbf{w}_{i,k,l}^T]$; 系统偏差转移矩阵 $\mathbf{B}_{i,k,l}$ 可表示为

$$\mathbf{B}_{i,k,l} = \begin{bmatrix} \cos \epsilon_{i,k,l} \cos \beta_{i,k,l} & -r_{i,k,l} \cos \epsilon_{i,k,l} \sin \beta_{i,k,l} \\ \cos \epsilon_{i,k,l} \sin \beta_{i,k,l} & r_{i,k,l} \cos \epsilon_{i,k,l} \cos \beta_{i,k,l} \\ \sin \epsilon_{i,k,l} & 0 \\ -r_{i,k,l} \sin \epsilon_{i,k,l} \cos \beta_{i,k,l} \\ \leftarrow -r_{i,k,l} \sin \epsilon_{i,k,l} \sin \beta_{i,k,l} \\ r_{i,k,l} \sin \epsilon_{i,k,l} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

传感器 j 的测量方程同传感器 i , 不再复述. 在 k 时刻, 可以构造差分量测方程

$$\mathbf{Z}_{k,l} = \mathbf{B}_{k,l}\mathbf{b} + \mathbf{w}_{k,l}. \quad (5)$$

其中: $\mathbf{Z}_{k,l} = \mathbf{Z}_{i,k,l} - \mathbf{Z}_{j,k,l} + (\mathbf{I} - \mathbf{J})$; $\mathbf{B}_{k,l} = [\mathbf{B}_{i,k,l} - \mathbf{B}_{j,k,l}]$; $\mathbf{b} = [\mathbf{b}_i \ \mathbf{b}_j]^T$, $\mathbf{b}_i$ 和 $\mathbf{b}_j$ 分别为两传感器系统偏差; $\mathbf{w}_{k,l} = \mathbf{w}_{i,k,l} - \mathbf{w}_{j,k,l}$, 且 $\mathbf{R}_{k,l} = E[\mathbf{w}_{k,l} \mathbf{w}_{k,l}^T] = \mathbf{R}_{i,k,l} + \mathbf{R}_{j,k,l}$. 对于式(5), 可以采用传统的最小二乘法进行求解, 其目标函数为

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{b}}) = \min_{\mathbf{b}} \sum_k \sum_l (\mathbf{Z}_{k,l} - \mathbf{B}_{k,l}\hat{\mathbf{b}})^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} (\mathbf{Z}_{k,l} - \mathbf{B}_{k,l}\hat{\mathbf{b}}). \quad (6)$$

1.2 错误关联和观测野值的影响

由文献[21]可知,发生错误关联时,有 $\mathbf{X}_{i,k,l_1} \neq \mathbf{X}_{j,k,l_2}$ (以 l_1 和 l_2 代表不同的目标),则有

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k,l} &= \mathbf{Z}_{i,k,l_1} - \mathbf{Z}_{j,k,l_2} = \\ &[\mathbf{B}_{i,k,l_1} - \mathbf{B}_{j,k,l_2}]\mathbf{b} + \mathbf{w}_{k,l} + \mathbf{H}(\mathbf{X}_{i,k,l_1} - \mathbf{X}_{j,k,l_2}). \end{aligned} \quad (7)$$

比较式(5)和(7)可知,当发生错误关联时,方程中多出了一项 $\mathbf{H}(\mathbf{X}_{i,k,l_1} - \mathbf{X}_{j,k,l_2})$,这样便产生了“系统野值”.此外, $\mathbf{B}_{k,l}$ 中亦包含误关联所带来的误差.如果传感器对目标的量测中本身就含有观测野值,则 $\mathbf{w}_{k,l}$ 不能再视为单纯的高斯噪声,而是含有冲击噪声的混合噪声.此时,可将式(7)改写为

$$\mathbf{Z}_{k,l} = (\mathbf{B}_{k,l} + \Delta\mathbf{B}_{k,l})\mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}_{k,l}. \quad (8)$$

其中: $\Delta\mathbf{B}_{k,l} = [0, \mathbf{B}_{j,k,l_1} - \mathbf{B}_{j,k,l_2}]$; $\boldsymbol{\epsilon}_{k,l} = \mathbf{w}_{k,l} + \mathbf{H}(\mathbf{X}_{j,k,l_1} - \mathbf{X}_{j,k,l_2})$,可以视为有偏的混合高斯分布.由文献[22]知,对于含有冲击噪声的正态分布,当冲击噪声出现的概率高于0.002时,最小一乘估计的效率优于最小二乘估计.因此,本文提出基于递推近似最小一乘的偏差估计算法对该问题进行求解.

2 RALAD系统偏差估计算法

2.1 算法推导

使用文献[20]提出的一个 $f(x) = |x|$ 的光滑近似函数: $f_\mu = \sqrt{x^2 + \mu^2}$ (μ 为一个很小的正实数),将式(6)中最小二乘法的目标函数替换为

$$\begin{aligned} J(\hat{\mathbf{b}}) &= \min_{\mathbf{b}} \sum_k \sum_l ((\mathbf{Z}_{k,l} - \\ &\mathbf{B}_{k,l}\hat{\mathbf{b}})^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} (\mathbf{Z}_{k,l} - \mathbf{B}_{k,l}\hat{\mathbf{b}}) + \mu^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

使用高斯牛顿方向作为 $\hat{\mathbf{b}}$ 的搜索方向^[23],并考虑秩1修正以提高数值稳定性,有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_{k,l} &= \hat{\mathbf{b}}_{k,l-1} - [\mathbf{H}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) + \\ &\alpha_{k,l} \mathbf{d}_{k,l} \mathbf{d}_{k,l}^T]^{-1} \mathbf{G}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}). \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $\mathbf{G}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 为目标函数 $J(\hat{\mathbf{b}})$ 的1阶梯度矩阵, $\mathbf{H}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 为目标函数 $J(\hat{\mathbf{b}})$ 的Hessian矩阵, $\alpha_{k,l}$ 为一个正实数, $\mathbf{d}_{k,l}$ 为一个列向量.由式(9)有

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &= \\ \mathbf{J}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &+ \\ \sqrt{(\mathbf{Z}_{k,l} - \mathbf{B}_{k,l}\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} (\mathbf{Z}_{k,l} - \mathbf{B}_{k,l}\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) + \mu^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

令

$$\mathbf{e}_{k,l} = \mathbf{Z}_{k,l} - \mathbf{B}_{k,l}\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}, \quad (12)$$

$$\lambda_{k,l} = \sqrt{\mathbf{e}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l} + \mu^2}, \quad (13)$$

则式(11)的1阶导数为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &= \frac{\partial \mathbf{J}_{k,l}}{\partial \mathbf{b}} \Big|_{\mathbf{b}=\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}} = \\ \mathbf{G}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &- \frac{\mathbf{B}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l}}{\lambda_{k,l}}. \end{aligned} \quad (14)$$

若 $\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}$ 为使 $\mathbf{J}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 最小化的最优估计,则有

$$\mathbf{G}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) = 0, \quad \mathbf{H}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) > 0. \quad (15)$$

于是式(14)可以化为

$$\mathbf{G}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) = -\frac{\mathbf{B}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l}}{\lambda_{k,l}}. \quad (16)$$

式(11)的2阶导数为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &= \frac{\partial^2 \mathbf{J}_{k,l}}{\partial \mathbf{b}^2} \Big|_{\mathbf{b}=\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}} = \\ \mathbf{H}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &+ \\ \mathbf{B}_{k,l}^T \left(\frac{\mathbf{R}_{k,l}^{-1}}{\lambda_{k,l}} - \frac{\mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l} \mathbf{e}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1}}{\lambda_{k,l}^3} \right) \mathbf{B}_{k,l}. \end{aligned} \quad (17)$$

令

$$\alpha_{k,l} = 1/\lambda_{k,l}^3, \quad (18)$$

$$\mathbf{d}_{k,l} = \mathbf{B}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l}, \quad (19)$$

则有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{k,l}^1(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &= \mathbf{H}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) + \alpha_{k,l} \mathbf{d}_{k,l} \mathbf{d}_{k,l}^T = \\ \mathbf{H}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &+ \mathbf{B}_{k,l}^T (\lambda_{k,l} \mathbf{R}_{k,l})^{-1} \mathbf{B}_{k,l}. \end{aligned} \quad (20)$$

令

$$\mathbf{P}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) = [\mathbf{H}_{k,l}^1(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})]^{-1}, \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) = [\mathbf{H}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})]^{-1}, \quad (22)$$

利用矩阵求逆定理,有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &= \\ \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &- \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) \mathbf{B}_{k,l}^T \times \\ &[\mathbf{B}_{k,l} \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) \mathbf{B}_{k,l}^T + \lambda_{k,l} \mathbf{R}_{k,l}]^{-1} \times \\ &\mathbf{B}_{k,l} \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}). \end{aligned} \quad (23)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) &= \\ \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) \mathbf{B}_{k,l}^T &[\mathbf{B}_{k,l} \mathbf{P}_{k,l-1} \mathbf{B}_{k,l}^T + \lambda_{k,l} \mathbf{R}_{k,l}]^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

则式(23)可以写为

$$\mathbf{P}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) =$$

$$\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) - \mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}). \quad (25)$$

由式(24)可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) \cdot \lambda_{k,l} \mathbf{R}_{k,l} = \\ & [\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) - \\ & \mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})]\mathbf{B}_{k,l}^T = \\ & \mathbf{P}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T, \end{aligned} \quad (26)$$

则式(10)可以写为

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{b}}_{k,l} = \\ & \hat{\mathbf{b}}_{k,l-1} - \mathbf{P}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) \left(-\frac{\mathbf{B}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l}}{\lambda_{k,l}} \right) = \\ & \hat{\mathbf{b}}_{k,l-1} + \mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) \mathbf{e}_{k,l}. \end{aligned} \quad (27)$$

结合式(12)、(13)、(24)、(25)和(27)便可得到 $\hat{\mathbf{b}}_{k,l}$

的递推公式.

现将RALAD算法归纳如下:

$$\mathbf{e}_{k,l} = \mathbf{Z}_{k,l} - \mathbf{B}_{k,l}\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}, \quad (28)$$

$$\lambda_{k,l} = \sqrt{\mathbf{e}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l} + \mu^2}, \quad (29)$$

$$\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) =$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T \times \\ & [\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \lambda_{k,l}\mathbf{R}_{k,l}]^{-1}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{k,l} = \hat{\mathbf{b}}_{k,l-1} + \mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{e}_{k,l}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) = \\ & \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) - \mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}). \end{aligned} \quad (32)$$

此外,作如下近似:

$$\mathbf{P}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l}) \approx \mathbf{P}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}). \quad (33)$$

式(33)用于下一次递推计算. 当 k 时刻所有航迹的量测被用于偏差估计之后,在 $k+1$ 时刻进行如下的初始化:

$$\hat{\mathbf{b}}_{k+1,0} = \mathbf{b}_{k,N}, \quad (34)$$

$$\mathbf{P}_{k+1,0}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l}) = \mathbf{P}_{k,N}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l}). \quad (35)$$

递推初值为 $\mathbf{P}_{0,0}(\hat{\mathbf{b}}_{0,0}) = \omega \mathbf{I}$, ω 为一个较大的数

$\hat{\mathbf{b}}_{0,0} = 0$.

2.2 算法理论分析

表1给出了RALAD算法、Huber函数法以及RLS算法中的增益 $\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ (由于LMedS算法不具有递推性质,不在本节讨论).

表1 3种递推算法的比较

算法	增益
RALAD	$\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) = \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T [\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \lambda_{k,l}\mathbf{R}_{k,l}]^{-1}$
Huber	$\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) = \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T [\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + (\mathbf{R}_{k,l})^{0.5}\Psi^{-1}(\mathbf{R}_{k,l}^T)^{0.5}]^{-1}$
RLS	$\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) = \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T [\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}]^{-1}$

Huber函数法的稳健因子 $\Psi_{k,l} = \text{diag}[\psi_{k,l}^x, \psi_{k,l}^y, \psi_{k,l}^z]$. 其中

$$\psi_{k,l}^x = \begin{cases} 1, & |v^x| \leq \beta; \\ \beta/|v^x|, & |v^x| > \beta. \end{cases} \quad (36)$$

这里 $\mathbf{v} = [v^x \ v^y \ v^z]^T = (\mathbf{R}_{k,l})^{-0.5} \mathbf{e}_{k,l}$. $\psi_{k,l}^y$ 和 $\psi_{k,l}^z$ 具有与式(36)相同的形式.

3种算法中,RLS算法的增益 $\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 与残差 $\mathbf{e}_{k,l}$ 无关;而RALAD和Huber函数法的 $\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 均会根据残差自适应地调整大小,以减弱异常数据对估计的影响.

RALAD算法的稳健因子不会改变协方差矩阵 $\lambda_{k,l}\mathbf{R}_{k,l}$ 的条件数. 在Huber函数法中,当出现某单一维度上的观测野值时,其稳健因子 $\Psi_{k,l}$ 部分维度上的数值会较小,此时协方差矩阵 $(\mathbf{R}_{k,l})^{0.5}\Psi_{k,l}^{-1}(\mathbf{R}_{k,l}^T)^{0.5}$

的条件数会增大. 对于

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})[\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}] = \\ & \mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T, \end{aligned} \quad (37)$$

设 $\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T$ 含有扰动 $\delta[\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T]$, $\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 含有扰动 $\delta[\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})]$, $\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1} \times (\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}$ 含有扰动 $\delta[\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}]$,则有

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}) + \delta[\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})]\} \times \\ & \{\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l} + \\ & \delta[\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}]\} = \\ & \{\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \delta[\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T]\}. \end{aligned} \quad (38)$$

由式(38)可得

$$\frac{\|\delta[\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})]\|}{\|\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\|} \leq \frac{\text{cond}[\mathbf{A}]}{1 - \text{cond}[\mathbf{A}]} \cdot \frac{\|\delta[\mathbf{A}]\|}{\|\mathbf{A}\|} \times \left\{ \frac{\|\delta[\mathbf{A}]\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\delta[\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T]\|}{\|\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T\|} \right\}, \quad (39)$$

其中

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}. \quad (40)$$

当 $\delta[\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}]$ 较小时, 式(39)可以写为

$$\frac{\|\delta[\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})]\|}{\|\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\|} \leq \text{cond}[\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}] \times \left\{ \frac{\|\delta[\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}]\|}{\|\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}\|} + \frac{\|\delta[\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T]\|}{\|\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T\|} \right\}. \quad (41)$$

由式(41)可知, Huber算法中协方差矩阵条件数增大将导致 $\text{cond}[\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l}]$ (即误差放大倍数) 的增加, 此时式(30)数值稳定性下降, 从而影响 $\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 的估计精度. 由式(28)~(32)可知, $\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 的误差会影响 $\hat{\mathbf{b}}_{k,l}$ 和 $\mathbf{P}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 的精度, 进而导致算法估计性能下降. 仿真结果将会对此进行验证.

此外, 从稳健因子的形式上考虑, 本文算法也可写成类似Huber函数的分段形式. 即将式(29)替换为下式:

$$\lambda_{k,l} = \begin{cases} 1, & \sqrt{\mathbf{e}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l} + \mu^2} \leq \beta; \\ \sqrt{\mathbf{e}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l} + \mu^2}, & \sqrt{\mathbf{e}_{k,l}^T \mathbf{R}_{k,l}^{-1} \mathbf{e}_{k,l} + \mu^2} > \beta. \end{cases} \quad (42)$$

3 仿真实验

3.1 仿真条件

采用 Monte-Carlo 方法对 RALAD 算法、Huber 函数法、LMedS 算法和 RLS 算法进行对比实验, 仿真次数为 100. 考虑异地三坐标雷达 i 和雷达 j , 位置坐标分别为 $[-4000 \text{ m}, -4000 \text{ m}, 0 \text{ m}]$ 和 $[4000 \text{ m}, 4000 \text{ m}, 0 \text{ m}]$, 每部雷达的斜距离量测噪声标准差均为 30 m, 方位角和高低角测量噪声标准差均为 0.5° , 其系统偏差分别为 $[20 \text{ m}, -0.5^\circ, 0.5^\circ]$ 和 $[-20 \text{ m}, 0.5^\circ,$

$-0.5^\circ]$. 目标数量为 40, 初始位置离原点的水平距离随机分布在 $19.9 \text{ km} \sim 20 \text{ km}$ 之间, 高度随机分布在 $2 \text{ km} \sim 3 \text{ km}$ 之间, 且与 y 轴夹角在 $[0, 2\pi)$ 之间随机生成; 各目标飞行速度为 250 m/s , XOY 面的速度方向均指向原点处边长为 10 m 的正方形内随机一点, Z 方向速度为 0. 各雷达的采样间隔为 0.1 s , 所有算法均采用 Matlab 编程实现. 仿真实验采用的硬件配置为: CPU 为酷睿 i5-480 M (主频 2.67 GHz), 2 G 内存、 240 G 固态硬盘, 未采用 CPU 超频技术和多线程技术.

算例 1 40 条航迹中有 4 条分别为其余航迹中某 4 条的平行航迹, 两平行航迹间距为 1500 m , 共 4 对平行航迹, 且每对航迹的误差关联量测点数占 40%. 量测过程中两传感器均以 5% 的概率出现观测野值, 野值量测噪声的标准差扩大为正常值的 50 倍.

算例 2 40 条航迹中有 6 条分别为其余航迹中某 6 条的平行航迹, 两平行航迹间距为 1500 m , 共 6 对平行航迹, 且每对航迹的误差关联量测点数占 50%. 量测过程中两传感器均以 10% 的概率出现观测野值, 野值量测噪声的标准差扩大为正常值的 50 倍.

3.2 实验结果与分析

本文选取文献[2]中的 RLS 算法 (EX 算法)、文献[12]中的 LMedS 算法、文献[14]中基于 Huber 的 M 估计算法与 RALAD 算法进行比较. 仿真结果如图 1~图 8 和表 2~表 6 所示.

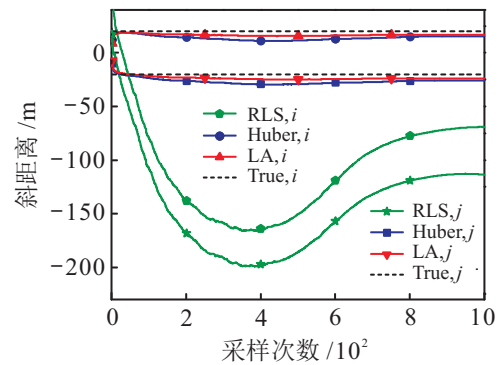


图 1 传感器 i, j 斜距离偏差估计 (算例 1)

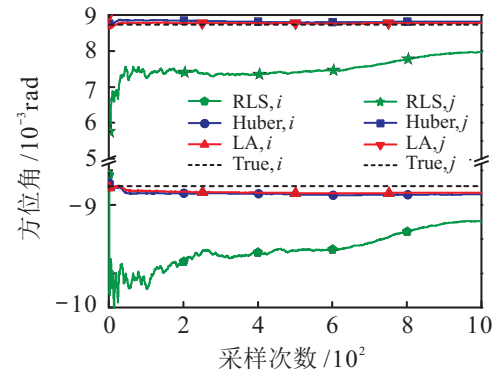


图 2 传感器 i, j 方位角偏差估计 (算例 1)

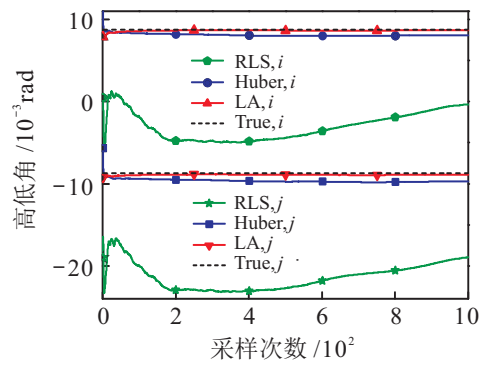


图3 传感器*i, j*高低角偏差估计(算例1)

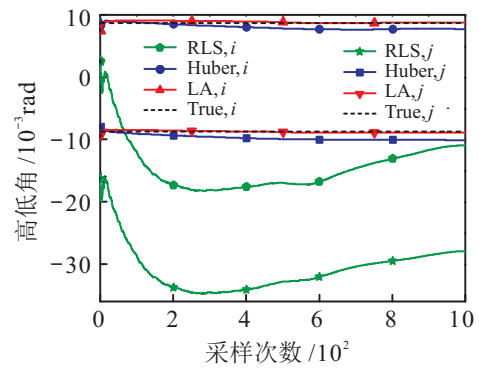


图6 传感器*i, j*高低角偏差估计(算例2)

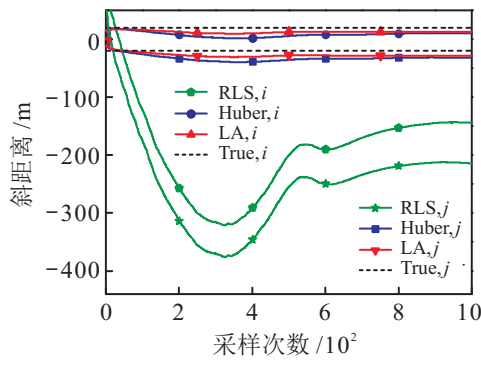


图4 传感器*i, j*斜距离偏差估计(算例2)

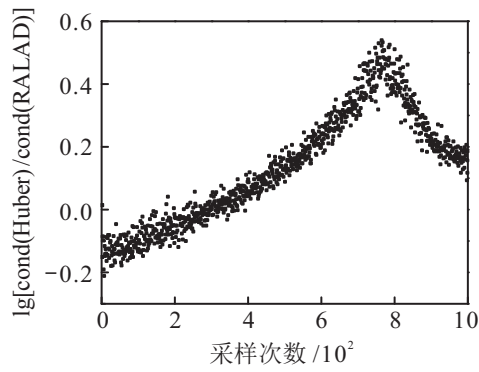


图7 算法条件数比较(算例1)

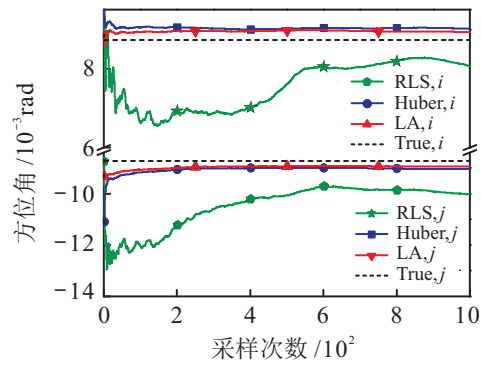


图5 传感器*i, j*方位角偏差估计(算例2)

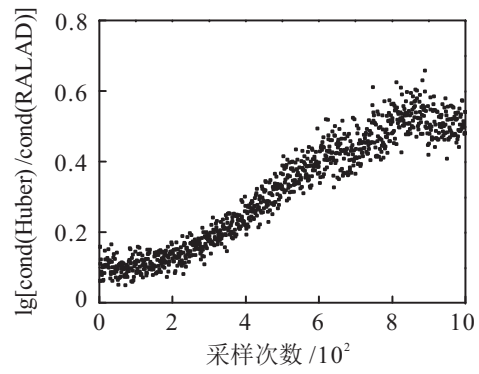


图8 算法条件数比较(算例2)

表2 传感器*i*估计结果(算例1)

传感器 <i>i</i>	斜距离/m	误差/%	方位角/(rad × 10 ⁻³)	误差/%	高低角/(rad × 10 ⁻³)	误差/%
真值	20.000	—	-8.726 6	—	8.726 6	—
RLS算法	69.191	445.9	-9.243 2	5.919	-0.372 7	104.3
Huber算法	15.380	23.09	-8.843 9	1.344	8.095 6	7.231
LMeds算法	32.550	62.75	-8.723 8	0.032	9.704 1	11.20
RALAD算法	16.999	15.01	-8.821 0	1.081	8.690 3	0.416

表3 传感器*j*估计结果(算例1)

传感器 <i>j</i>	斜距离/m	误差/%	方位角/(rad × 10 ⁻³)	误差/%	高低角/(rad × 10 ⁻³)	误差/%
真值	-20.000	—	8.726 6	—	-8.726 6	—
RLS算法	1.137 4	468.7	7.974 3	8.620	-18.958	117.2
Huber算法	-25.770	28.85	8.814 9	1.011	-9.705 4	11.22
LMeds算法	-6.768 1	66.16	9.005 6	3.197	-7.720 6	11.53
RALAD算法	-23.816	19.08	8.777 6	0.583	-8.899 5	1.981

表4 传感器*i*估计结果(算例1)

传感器 <i>i</i>	斜距离/m	误差/%	方位角/(rad × 10 ⁻³)	误差/%	高低角/(rad × 10 ⁻³)	误差/%
真值	20.000	—	-8.726 6	—	8.726 6	—
RLS算法	-144.34	821.7	-10.012	14.72	-10.937	225.3
Huber算法	9.961 5	50.20	-9.025 6	3.425	7.711 7	11.63
LMeds算法	3.455 5	82.72	-9.329 0	6.902	9.760 2	11.84
RALAD算法	12.901	35.50	-8.938 3	2.424	8.765 8	0.449

表5 传感器*i*估计结果(算例2)

传感器 <i>j</i>	斜距离/m	误差/%	方位角/(rad × 10 ⁻³)	误差/%	高低角/(rad × 10 ⁻³)	误差/%
真值	-20.000	—	8.726 6	—	-8.726 6	—
RLS算法	-214.41	972.1	8.071 1	7.512	-27.921	219.9
Huber算法	-31.998	59.99	9.013 5	3.288	-10.143	16.24
LMeds算法	-49.409	147.0	8.023 8	8.054	-7.475 2	14.34
RALAD算法	-28.271	41.36	8.931 5	2.347	-8.913 5	2.142

表6 算法运行时间比较

	RLS算法	Huber算法	LMeds算法	RALAD算法
算例1	1.866	5.332	2.466	3.988
算例2	1.908	5.289	2.445	3.979

由图1~图3可以看出:算例1中假设错误关联与观测野值比例较低,此时EX算法已偏离真值;与EX算法相比,Huber函数法具有明显优势;而本文算法的估计结果更加接近真值.由图4~图6可以看出:在算例2中适当增加了错误关联与观测野值的比例,因EX算法中使用了标准RLS,故受野值的影响较大,其估计结果偏离真值较远;Huber函数法此时的精度有所下降;而本文算法以近似最小一乘得到目标函数,抗野值能力强,仍能保证较好的估计精度.

图7和图8给出了算例1和算例2中第1条航迹Huber算法与本文算法协方差矩阵条件数的比较,图中以采样次数为横坐标,以两种算法条件数比值的对数

$$\lg[\text{cond}(\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + (\mathbf{R}_{k,l})^{0.5}\Psi_{k,l}^{-1}(\mathbf{R}_{k,l}^T)^{0.5}) / \text{cond}(\mathbf{B}_{k,l}\mathbf{P}_{k,l-1}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{B}_{k,l}^T + \mathbf{R}_{k,l})]$$

为纵坐标.可以看出:绝大多数情况下,Huber函数法的协方差矩阵的条件数均比本文算法大;而由式(31)可知,增量 $\Delta\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1} = \mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})\mathbf{e}_{k,l}$,当出现野值时, $\mathbf{W}_{k,l}(\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1})$ 因协方差矩阵条件数增大而影响 $\Delta\hat{\mathbf{b}}_{k,l-1}$ 的计算精度,这也表明本文算法的数值稳定性较高.

由表2~表5可以看出:LMeds算法总体上优于RLS,仅在个别参数上优于其余算法,但该算法不能用于实时递推;而本文算法可在实时递推的前提下仍有较高的稳健性.

表6给出了100轮仿真下两个算例中4种算法每轮所需的平均时间.可以看出:RLS算法用时最少;因需对数据排序,LMeds算法用时其次;RALAD算法再次;由于稳健因子的分段形式以及需要计算协方差矩阵 $\mathbf{R}_{k,l}$ 的平方根,基于Huber函数的M估计算法所需时间最长.与Huber函数法相比,RALAD算法不需要计算协方差矩阵 $\mathbf{R}_{k,l}$ 的平方根,其计算代价大大降低.

4 结 论

本文使用一个近似最小一乘函数替换偏差估计问题中常用的最小二乘函数,基于牛顿方向及其秩1修正推导出递推求解框架.该方法克服了最小一乘函数不可求导的困难,并提高了算法的稳健性,在保证算法的实时性的前提下明显改善了估计精度.通过Monte-Carlo仿真表明,在含有较多错误关联和观测野值的情况下,本文算法仍具有较好的稳健性,所得估计结果更接近真值,具有一定的工程应用价值.

参考文献(References)

- [1] Lee E H, Song T L. Multi-sensor track-to-track fusion with target existence in cluttered environments[J]. Iet Radar Sonar & Navigation, 2017, 11(7): 1108-1115.
- [2] Lin X D, Bar-Shalom Y, Kirubarajan T. Multisensor multitarget bias estimation for general asynchronous sensors[J]. IEEE Trans on Aerospace & Electronic

- Systems, 2005, 41(3): 899-921.
- [3] Zhu H Y, Wang C. Joint track-to-track association and sensor registration at the track level[J]. Digital Signal Processing, 2015, 41: 48-59.
- [4] He Y, Zhu H W, Tang X M. A joint maximum likelihood algorithm for simultaneous track correlation and sensor bias estimation[J]. Science China Information Sciences, 2013, 56(10): 1-11.
- [5] Okello N N, Challa S. Joint sensor registration and track-to-track fusion for distributed trackers[J]. IEEE Trans on Aerospace & Electronic Systems, 2004, 40(3): 808-823.
- [6] Lan H, Wang X, Pan Q, et al. A survey on joint tracking using expectation-maximization based techniques[J]. Information Fusion, 2016, 30: 52-68.
- [7] Yong X J, Fang Y W, Wu Y L, et al. An asynchronous sensor bias estimation algorithm utilizing targets' positions only[J]. Information Fusion, 2015, 27: 54-63.
- [8] Taghavi E, Tharmarasa R, Kirubarajan T, et al. A practical bias estimation algorithm for multisensor-multitarget tracking[J]. IEEE Trans on Aerospace & Electronic Systems, 2016, 52(1): 2-19.
- [9] 郭蕴华, 袁成. 一种异步航迹关联的变异蚁群算法[J]. 电子学报, 2012, 40(11): 2200-2205.
(Guo Y H, Yuan C. A mutation ant colony algorithm for the asynchronous track correlation[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(11): 2200-2205.)
- [10] Du X J, Wang Y, Shan X M. Robust sensor bias estimation for ill-conditioned scenarios[J]. Tsinghua Science and Technology, 2012, 17(3): 319-323.
- [11] Taghavi E, Tharmarasa R, Kirubarajan T, et al. Multisensor-multitarget bearing-only sensor registration[J]. IEEE Trans on Aerospace & Electronic Systems, 2016, 52(4): 1654-1666.
- [12] 田威, 王钺, 山秀明, 等. 稳健的联合航迹关联与系统偏差估计[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2013, 53(7): 946-950.
(Tian W, Wang Y, Shan X M, et al. Robust method for joint track association and sensor bias estimation[J]. J of Tsinghua University: Science and Technology, 2013, 53(7): 946-950.)
- [13] Huber P J. Robust estimation of a location parameter[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1964, 35(1): 73-101.
- [14] 吴昊, 陈树新, 杨宾峰, 等. 基于广义M估计的鲁棒容积卡尔曼滤波目标跟踪算法[J]. 物理学报, 2015, 64(21): 448-455.
(Wu H, Chen S X, Yang B F, et al. Robust cubature Kalman filter target tracking algorithm based on generalized M-estimation[J]. Acta Physics Sinica, 2015, 64(21): 448-455.)
- [15] Chang L, Li K. Unified form for the robust gaussian information filtering based on M-estimate[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(4): 412-416.
- [16] Khodabandeh A, Amiri-Simkooei A R. Recursive algorithm for L_1 norm estimation in linear models[J]. J of Surveying Engineering, 2011, 137(1): 1-8.
- [17] Zeng W, Feng Q, Li J. Fuzzy least absolute linear regression[J]. Applied Soft Computing, 2017, 52: 1009-1019.
- [18] Liu L, Lu W. A fast L_1 linear estimator and its application on predictive deconvolution[J]. IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters, 2015, 12(5): 1056-1060.
- [19] Xu B C, Zhang Y D. New identification method for Hammerstein models based on approximate least absolute deviation[J]. Int J of Systems Science, 2016, 47(9): 2201-2213.
- [20] Caccetta L, Qu B, Zhou G L. A globally and quadratically convergent method for absolute value equations[J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 48(1): 45-58.
- [21] 田威. 复杂环境下多传感器航迹关联与抗差处理[D]. 北京: 清华大学, 2014: 43-44.
(Tian W. Multisensor track-to-track association and bias removal in complex environments[D]. Beijing: Tsinghua University, 2014: 43-44.)
- [22] Huber P J. Robust statistics[M]. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009: 1-5.
- [23] Argyros I K, Magrenan A. Improved local convergence analysis of the Gauss-Newton method under a majorant condition[J]. Computational Optimization and Applications, 2015, 60(2): 423-439.

(责任编辑: 李君玲)