文章编号: 1001-0920(2019)03-0527-08
DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1145

加权犹豫模糊集的群决策方法

曾文艺[1], 李德清[1,2], 尹 乾[1†]

(1. 北京师范大学 信息科学与技术学院，北京 100875；2. 军械工程学院 基础部，石家庄 050003)

摘 要: 对于犹豫模糊元中的不同隶属度值赋予不同的权重,由此构造出一种应用范围更广、更符合实际需要的犹豫模糊集合 —— 加权犹豫模糊集合. 针对加权犹豫模糊集中的加权犹豫模糊元,定义了加权犹豫模糊集合和加权犹豫模糊元的并、交、余、数乘和幂等运算及其运算法则,并讨论它们的运算性质;同时,给出加权犹豫模糊元的得分函数和离散函数,进而给出一种比较加权犹豫模糊元的排序法则. 在此基础上,提出两类集成算子:加权犹豫模糊元的加权算术平均算子和加权犹豫模糊元的加权几何平均算子,并针对专家权重(已知和未知)的两种情形,将加权犹豫模糊集合应用于群决策,给出两种基于加权犹豫模糊集合的群决策方法. 最后,通过一个应用实例表明所提出的群决策方法的有效性和实用性.

关键词: 犹豫模糊集；犹豫模糊元；加权犹豫模糊集；加权犹豫模糊元；群决策；决策分析

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Group decision making approach of weighted hesitant fuzzy sets

ZENG Wen-yi[1], *LI De-qing*[1,2], *YIN Qian*[1†]

(1. College of Information Science and Technology，Beijing Normal University，Beijing 100875，China；2. Department of Basic Course，Ordnance Engineering College，Shijiazhuang 050003，China)

Abstract: In this paper, we introduce the concept of weighted hesitant fuzzy set, in which different weights are designed to these possible membership values, and the weights indicate that the decision maker has different confidence in giving every possible assessment of the membership degree. Then we define some basic operations such as union, intersection, complement, multiplication and power operation of weighted hesitant fuzzy elements and weighted hesitant fuzzy sets, discuss their operation properties, and propose the score function and variance function of the weighted hesitant fuzzy element to compare two weighted hesitant fuzzy elements. Furthermore, we present two aggregation operators such as the weighted hesitant fuzzy element weighted averaging (WHFWA) operator and the weighted hesitant fuzzy element weighted geometric (WHFWG) operator to aggregate weighted hesitant fuzzy information, and build the mathematical model of group decision making based on the expert weights (known and unknown). Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: hesitant fuzzy sets；hesitant fuzzy elements；weighted hesitant fuzzy sets；weighted hesitant fuzzy elements；group decision making；decision making analysis

0 引 言

模糊集理论[1]经过几十年的发展已经成功地应用于各个领域. 然而,在处理一些不确定信息时,模糊集理论仍存在一定的局限性. 为此，众多研究者对其进行了不同形式的推广,得到了诸如: 直觉模糊集[2]、2-型模糊集[3]等研究成果. 人们在对事物进行决策时,常常在多个决策信息之间犹豫,同时决策者之间又不愿相互妥协,使得最终决策结果难以达成一致. 鉴于此,西班牙学者Torra[4]给出了模糊集的另一种推广形式,即犹豫模糊集. 犹豫模糊集的特点是: 决策者在确定隶属度值时在多个数值之间犹豫不定,难以取舍,最终选定多个数值作为最终的隶属度值. 这样的情形在实际决策过程中经常出现,例如,假定某单位要对某个项目验收,请10位专家对评审项目进行匿名打分,结果有3位专家给出92分,5位专家给出85分,2位专家给出80分. 将评判结果转化为对项目

收稿日期: 2017-08-28；**修回日期:** 2018-03-06.
基金项目: 国家自然科学基金项目(10971243, 61472043).
责任编委: 冯俊娥.
作者简介: 曾文艺(1966−), 男, 教授, 博士, 从事模糊信息处理及其应用等研究；尹乾(1975−), 女, 副教授, 从事计算智能及其应用的研究.
†通讯作者. E-mail: yinqian@bnu.edu.cn.

满意的隶属度值,则决策者有3个值 $\{0.92,\ 0.85,\ 0.8\}$ 可供选择. 究竟选取哪一个值作为隶属度值,决策者很可能会在这3个值中犹豫,此时将这3个值都保留而用犹豫模糊集来描述则最为恰当. 这表明犹豫模糊集是一种非常实用的模糊信息处理工具.

目前,关于犹豫模糊集的理论研究和应用方法已引起了学者们的广泛关注和重视[5],一些学者做了大量的工作,并取得了一批有意义的研究成果. 例如: Xia等[6-7]提出了几类犹豫模糊信息集成算子,并分别应用于决策和群决策; Zhu等[8]、Wei[9]、Zhang[10]分别研究了犹豫模糊几何Bonferroni平均算子、犹豫模糊优先序算子和犹豫模糊幂算子,更多的成果参见文献[11]. 陈树伟等[12]和Qian等[13]分别提出了区间值犹豫模糊集和广义犹豫模糊集; Wei等[14]、Chen等[15]和吴婉莹等[16]分别研究了区间值犹豫模糊集成算子、区间值犹豫模糊偏序关系和直觉对偶犹豫模糊集成算子; Rodríguez等[17-18]研究了犹豫模糊语言的集成算子并应用于决策和群决策; Wei等[19]研究了犹豫模糊语言集的比较与排序; 刘小弟等[20]和王坚强等[21]研究了犹豫模糊信息下的决策方法; Xu等[22-23]研究了犹豫模糊集的距离与贴近度; Peng等[24]研究了广义犹豫模糊集的加权距离; Zhu等[25]研究了犹豫模糊语言偏序关系的一致性测度; Li等[26-27]研究了一种基于犹豫度的犹豫模糊集合的距离和贴近度.

犹豫模糊集的一个主要特征是每个犹豫模糊元都有多个可能的值,它们都可以作为某个模糊集的隶属度,并且出现的可能性相同. 然而,在实际应用时不同的值被选为隶属度的可能性却往往不一样. 例如在上面讨论的项目评估问题中,虽然有3个评估值0.92, 0.85, 0.8可供选择,但决策者对这3个值应该有不同的偏好. 比如,对0.85和0.8两个值,有5位专家给出的是0.85,只有2位专家给出0.8,虽然从犹豫模糊集的角度来看它们都可以当作隶属度值,但它们在决策者心中的份量是不一样的. 这说明,此时应对犹豫模糊元中的不同值赋予不同的权重. 显然,犹豫模糊集或犹豫模糊元并不能传递上述信息. 如果利用犹豫模糊集来处理上述问题,则可能会得到不科学的结论. 例如:某学院要对两位青年骨干A、B进行中期评审,为此,学院组织10位专家根据两位培养对象的德才表现进行评价,以确定培养对象的表现是否符合学院的规划要求. 假定10位专家给培养对象A打分时有8位给出0.9, 2位给出0.5;给培养对象B打分时有8位给出0.5, 2位给出0.9. 这样,学院领导在确定A的评价结果时将在两个值0.9、0.5之间犹豫,因而可用犹豫模糊集来表示. 按照Xia等[8]提供的方法,则A的评价结果可用犹豫模糊集表示为$A = \{0.9, 0.5\}$. 同样,B的评价结果也可用犹豫模糊集表示为$B = \{0.9, 0.5\}$. 这样,A和B的评价结果完全相同,二者不容易区分. 显然,这个结论不完全符合实际情况,因此,它的表达不十分精确和合理.

为了克服上述不足,有必要对犹豫模糊集进行相应的改进,进行更精细化的处理. 为此,本文引入一个新的概念 —— 加权犹豫模糊集. 加权犹豫模糊集中的元素称为加权犹豫模糊元. 其主要特点是,每个可能作为隶属度值的数值都被赋予相应的权重,用以强调每个值被选为隶属度值的可能性的大小. 然后,系统地讨论加权犹豫模糊元之间的运算法则和相关性质,以及加权犹豫模糊元的得分函数和离散函数. 在此基础上,构建两类加权犹豫模糊元的集成算子(加权算术平均算子和加权几何平均算子),并应用于加权犹豫模糊集的群决策. 最后,通过一个应用实例来说明本文所提出的群决策方法的有效性.

1 预备知识

定义1[4,6] 给定论域X,称$E = \{\langle x, h_E(x)\rangle | x \in X\}$为$X$上的一个犹豫模糊集(Hesitant fuzzy set, HFS),其中,$h_E(x) \subseteq [0,1]$是对象x关于模糊集合E的所有可能隶属度值构成的集合,并且称$h_E(x)$为一个犹豫模糊元(Hesitant fuzzy element, HFE). 为书写方便,一般将$h_E(x)$简记为$h(x)$.

给定3个HFE,即$h(x)$、$h_1(x)$和$h_2(x)$, Torra[4]定义了如下运算法则.

定义2[4] 给定3个HFE $h(x)$、$h_1(x)$和$h_2(x)$,则:

1) $h^-(x) = \min h(x), h^+(x) = \max h(x)$;

2) $h^c(x) = \bigcup\limits_{\gamma \in h(x)} \{1-\gamma\}$;

3) $h_1(x) \bigcup h_2(x) = \{\gamma \in h_1(x) \bigcup h_2(x) | \gamma \geqslant \max(h_1^-(x), h_2^-(x))\}$;

4) $h_1(x) \bigcap h_2(x) = \{\gamma \in h_1(x) \bigcap h_2(x) | \gamma \leqslant \min(h_1^+(x), h_2^+(x))\}$.

为了比较不同的犹豫模糊集和犹豫模糊元, Zhu等[8]给出了如下比较法则

定义3[8] 设$h(x)$为犹豫模糊元,则称

$$s(h(x)) = \frac{1}{(h(x))} \sum_{\gamma \in h(x)} \gamma$$

为$h(x)$的得分函数,其中$(h(x))$表示$h(x)$包含的元素个数.

给定两个犹豫模糊元$h_1(x)$、$h_2(x)$,若$s(h_1(x)) > s(h_2(x))$,则$h_1(x) > h_2(x)$;若$s(h_1(x)) = s(h_2(x))$,则$h_1(x) = h_2(x)$.

为了能更精细区分犹豫模糊元,对于给定的犹豫模糊元$h(x)$, Liao等[28]定义离散函数如下:

定义4[28] 对于给定的犹豫模糊元$h(x)$,称

$$v(h(x))=\frac{1}{(h(x))}\sqrt{\sum_{\gamma_i,\gamma_j\in h(x)}(\gamma_i-\gamma_j)^2}$$

为$h(x)$的离散函数,其中$(h(x))$表示$h(x)$所包含的元素个数. $v(h(x))$也称为$h(x)$的离散度.

给定两个犹豫模糊元$h_1(x)$、$h_2(x)$,基于得分函数和离散函数, Liao等[28]给出了如下比较法则:

1) 如果$s(h_1(x))>s(h_2(x))$,则$h_1(x)>h_2(x)$.

2) 如果$s(h_1(x))=s(h_2(x))$,则:

2.1) $v(h_1(x))>v(h_2(x))$时,有$h_1(x)<h_2(x)$;

2.2) $v(h_1(x))=v(h_2(x))$时,有$h_1(x)=h_2(x)$.

针对犹豫模糊元, Xia等[6]给出了如下一些运算法则.

定义5[6] 给定3个犹豫模糊元$h(x)$、$h_1(x)$和$h_2(x)$,则:

1) $h(x)^\lambda=\bigcup_{\gamma\in h(x)}\{\gamma^\lambda\}$;

2) $\lambda h(x)=\bigcup_{\gamma\in h(x)}\{1-(1-\gamma)^\lambda\}$;

3) $h_1(x)\oplus h_2(x)=\bigcup_{\gamma_1\in h_1(x),\gamma_2\in h_2(x)}\{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2\}$;

4) $h_1(x)\otimes h_2(x)=\bigcup_{\gamma_1\in h_1(x),\gamma_2\in h_2(x)}\{\gamma_1\gamma_2\}$.

假定$h_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$为犹豫模糊元, Liao等[28]将上述运算中的3)和4)推广为:

5) $\bigoplus_{i=1}^{n}h_i(x)=\bigcup_{\gamma_i\in h_i(x)}\Big\{1-\prod_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)\Big\}$.

6) $\bigotimes_{i=1}^{n}h_i(x)=\bigcup_{\gamma_i\in h_i(x)}\Big\{\prod_{i=1}^{n}\gamma_i\Big\}$.

2 加权犹豫模糊集及其运算法则

定义6 给定论域X,则称$E^w=\{\langle x,h^w(x)\rangle|x\in X\}$为$X$上的一个加权犹豫模糊集(Weighted hesitant fuzzy set, WHFS),并且称$h^w(x)$为一个加权犹豫模糊元(Weighted hesitant fuzzy element, WHFE),其中

$$h^w(x)=\{\langle\gamma_1,w_1\rangle,\langle\gamma_2,w_2\rangle,\cdots,\langle\gamma_m,w_m\rangle\}.$$

这里: $\gamma_j\in[0,1](j=1,2,\cdots,m)$是对象$x$关于模糊集合$E^w$的所有可能隶属度值构成的集合; w_j是γ_j的权重,满足$w_j\in[0,1](j=1,2,\cdots,m)$, $\sum_{j=1}^{m}w_j=1$.

在加权犹豫模糊元中,权重w_i刻画了γ_i被选为隶属度值的可能性大小. 因此,加权犹豫模糊元比犹豫模糊元能更准确地反映决策者的犹豫心理,能更科学地描述决策问题中的实际背景. 下面给出加权犹豫模糊元的运算法则.

定义7 设$h^w(x)$为加权犹豫模糊元,则称$h^{w-}(x)=\langle\min h^w(x),w\rangle$为$h^w(x)$的下界, $h^{w+}(x)=\langle\max h^w(x),w'\rangle$为$h^w(x)$的上界,其中$w$和$w'$分别是隶属度值$\min h^w(x)$和$\max h^w(x)$对应的权重.

定义8 给定加权犹豫模糊元$h^w(x)$、$h_1^w(x)$和$h_2^w(x)$,则:

1) $(h^w)^c(x)=\bigcup_{\langle\gamma,w_\gamma\rangle\in h^w(x)}\{\langle1-\gamma,w_\gamma\rangle\}$.

2) $h_1^w(x)\bigcup h_2^w(x)=\bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\langle\gamma_2,w_{\gamma_2}\rangle\in h_2^w(x)}\{\langle\max\{\gamma_1,\gamma_2\},w'_{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}}\rangle\}$,

其中集合$\{w'_{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}}\}$是权重集合$\{w_{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}}\}$的归一化结果. 如果$\gamma_1=\gamma_2$,则规定$w_{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}}=(w_{\gamma_1}+w_{\gamma_2})/2$.

3) $h_1^w(x)\bigcap h_2^w(x)=\bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\langle\gamma_2,w_{\gamma_2}\rangle\in h_2^w(x)}\{\langle\min\{\gamma_1,\gamma_2\},w'_{\min\{\gamma_1,\gamma_2\}}\rangle\}$,

其中集合$\{w'_{\min\{\gamma_1,\gamma_2\}}\}$是权重集合$\{w_{\min\{\gamma_1,\gamma_2\}}\}$的归一化结果. 如果$\gamma_1=\gamma_2$,则$w_{\min\{\gamma_1,\gamma_2\}}=(w_{\gamma_1}+w_{\gamma_2})/2$.

4) $(h^w)^\lambda(x)=\bigcup_{\langle\gamma,w_\gamma\rangle\in h^w(x)}\{\langle\gamma^\lambda,w_\gamma\rangle\}$.

5) $\lambda h^w(x)=\bigcup_{\langle\gamma,w_\gamma\rangle\in h^w(x)}\{\langle1-(1-\gamma)^\lambda,w_\gamma\rangle\}$.

6) $h_1^w(x)\oplus h_2^w(x)=\bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\langle\gamma_2,w_{\gamma_2}\rangle\in h_2^w(x)}\{\langle\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2,w_{\gamma_1}w_{\gamma_2}\rangle\}$.

7) $h_1^w(x)\otimes h_2^w(x)=\bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\langle\gamma_2,w_{\gamma_2}\rangle\in h_2^w(x)}\{\langle\gamma_1\gamma_2,w_{\gamma_1}w_{\gamma_2}\rangle\}$.

针对上述运算法则,有如下结论.

定理1 给定3个加权犹豫模糊元$h^w(x)$、$h_1^w(x)$和$h_2^w(x)$,则有:

1) $(h_1^w(x)\bigcup h_2^w(x))^c=(h_1^w)^c(x)\bigcap(h_2^w)^c(x)$;

2) $(h_1^w(x)\bigcap h_2^w(x))^c=(h_1^w)^c(x)\bigcup(h_2^w)^c(x)$;

3) $((h^w)^c(x))^\lambda=(\lambda h^w(x))^c$;

4) $\lambda(h^w)^c(x)=((h^w)^\lambda(x))^c$;

5) $(h_1^w(x)\oplus h_2^w(x))^c=(h_1^w)^c(x)\otimes(h_2^w)^c(x)$;

6) $(h_1^w(x)\otimes h_2^w(x))^c=((h_1^w)^c(x)\oplus(h_2^w)^c(x))$.

证明 为叙述方便,在此只证明1),其他结论可类似证明.

$$(h_1^w(x)\bigcup h_2^w(x))^c=$$

$$\Big(\bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\langle\gamma_2,w_{\gamma_2}\rangle\in h_2^w(x),\gamma_1\neq\gamma_2}\{\langle1-\max\{\gamma_1,\gamma_2\},w'_{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}}\rangle\}\Big)\bigcup$$

$$\Big(\bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\langle\gamma_2,w_{\gamma_2}\rangle\in h_2^w(x),\gamma_1=\gamma_2}\{\langle1-$$

$$\max\{\gamma_1,\gamma_2\}, w'_{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}}\rangle\}) =$$

$$(\bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\langle\gamma_2,w_{\gamma_2}\rangle\in h_2^w(x),\gamma_1\neq\gamma_2}\{\langle\min\{1-\gamma_1,1-\gamma_2\}, w_{\min\{1-\gamma_1,1-\gamma_2\}}\rangle\})\bigcup$$

$$(\bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\langle\gamma_2,w_{\gamma_2}\rangle\in h_2^w(x),\gamma_1=\gamma_2}\{\langle\min\{1-\gamma_1,1-\gamma_2\}, w'_{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}}\rangle\}) =$$

$$(h_1^w)^c(x)\bigcap(h_2^w)^c(x).$$

下面给出加权犹豫模糊元的排序法则.

定义9 设$h^w(x)$为加权犹豫模糊元,则称

$$s(h^w(x)) = \sum_{\langle\gamma,w_\gamma\rangle\in h^w(x)} w_\gamma\gamma \tag{1}$$

为$h^w(x)$的得分函数.

定义10 设$h^w(x)$为加权犹豫模糊元,则称

$$v(h^w(x)) = \sqrt{\sum_{\langle\gamma,w_\gamma\rangle\in h^w(x)} w_\gamma(\gamma - s(h^w(x)))^2} \tag{2}$$

为$h^w(x)$的离散函数,或称$v(h^w(x))$为$h^w(x)$的离散度.

利用上述两个函数,并设$h_1^w(x)$、$h_2^w(x)$为两个加权犹豫模糊元,可以给出如下的比较法则:

1) 如果$s(h_1^w(x)) > s(h_2^w(x))$,则$h_1^w(x) > h_2^w(x)$.

2) 如果$s(h_1^w(x)) = s(h_2^w(x))$,则:

2.1) $v(h_1^w(x)) > v(h_2^w(x))$时,有$h_1^w(x) < h_2^w(x)$;

2.2) $v(h_1^w(x)) = v(h_2^w(x))$时,有$h_1^w(x) = h_2^w(x)$.

3 加权犹豫模糊集的群决策方法

首先,根据上述的运算法则,本文给出两类加权犹豫模糊元的集成算子.

定义11 设$h_1^w(x), h_2^w(x),\cdots,h_n^w(x)$为加权犹豫模糊元,则称

$$\mathrm{WHFWA}(h_1^w(x), h_2^w(x),\cdots,h_n^w(x)) = \bigoplus_{j=1}^n(\omega_j h_j^w(x)) = \bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\cdots,\langle\gamma_n,w_{\gamma_n}\rangle\in h_n^w(x)}\Big\{\Big\langle 1-\prod_{j=1}^n(1-\gamma_j)^{\omega_j}, w_{\gamma_1}w_{\gamma_2}\cdots w_{\gamma_n}\Big\rangle\Big\} \tag{3}$$

为加权犹豫模糊元的加权算术平均算子,其中$\omega = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$为加权犹豫模糊元$h_j^w(x)(j=1,2,\cdots,n)$所对应的权重向量,且满足$\omega_j\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^n\omega_j = 1$.

定义12 设$h_1^w(x), h_2^w(x),\cdots,h_n^w(x)$为加权犹豫模糊元,则称

$$\mathrm{WHFWG}(h_1^w(x), h_2^w(x),\cdots,h_n^w(x)) = \bigotimes_{j=1}^n(h_j^w(x))^{\omega_j} = \bigcup_{\langle\gamma_1,w_{\gamma_1}\rangle\in h_1^w(x),\cdots,\langle\gamma_n,w_{\gamma_n}\rangle\in h_n^w(x)}\Big\{\Big\langle\prod_{j=1}^n\gamma_j^{\omega_j}, w_{\gamma_1}w_{\gamma_2}\cdots w_{\gamma_n}\Big\rangle\Big\} \tag{4}$$

为加权犹豫模糊元的加权几何平均算子,其中$\omega = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$为加权犹豫模糊元$h_j^w(x)(j=1,2,\cdots,n)$所对应的权重向量,且满足$\omega_j\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^n\omega_j = 1$.

接下来,将给出加权犹豫模糊集的群决策计算方法.

一般来说,群决策问题可描述如下[29]:给定待选方案$A = \{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,专家组$E = \{e_1,e_2,\cdots,e_t\}$根据与决策相关的准则$C = \{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$分别给出方案的评估结果. 设$r_{ij}^k\in[0,1]$表示专家$e_k$根据准则$C_j$给方案$A_i$打出的评估结果,于是,决策者将根据这些评估结果选出最佳方案.

下面,利用加权犹豫模糊元构建一种新的群决策模型,其具体计算方法如下.

Step 1: 在每一个准则C_j下,考虑任一个方案A_i的评估结果. 为了构造加权犹豫模糊元,分两种情形进行讨论.

情形1: 每个专家的权重未知.

此时构造如下加权犹豫模糊元:

$$h_{ij}^w(C_j) = \{\langle r_{ij}, w_{ij}\rangle | w_{ij} = p/t\}. \tag{5}$$

其中: $r_{ij}\in\bigcup_k\{r_{ij}^k\}$, p为给出评估值r_{ij}的专家人数.

情形2: 每个专家的权重已知.

假定评判专家$e_1,e_2,\cdots,e_t$对应的权重向量为$v = (v_1,v_2,\cdots,v_t)^{\mathrm{T}}$,满足$v_k\geqslant 0$并且$\sum_{k=1}^t v_k = 1$,则构造如下的加权犹豫模糊元:

$$h_{ij}^w(C_j) = \Big\{\langle r_{ij}, w_{ij}\rangle | w_{ij} = \sum_{k\in N(r_{ij})} v_k\Big\}. \tag{6}$$

其中: $r_{ij}\in\bigcup_k\{r_{ij}^k\}$, $N(r_{ij})$表示所有给出评估值r_{ij}的专家.

Step 2: 假定准则权重为$\omega = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)^{\mathrm{T}}$,满足$\omega_j\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^m\omega_j = 1$. 对于每一个方案A_i,利用WHFWA算子或WHFWG算子综合犹豫模糊元信息$h_{ij}^w(C_j)(j=1,2,\cdots,m)$,得到$h^w(A_i)$.

例如,若采用WHFWA算子,则有

$$h^w(A_i) = \mathrm{WHFWA}(h^w_{i1}(C_1), h^w_{i2}(C_2), \cdots, h^w_{im}(C_m)). \quad (7)$$

Step 3: 利用式(1)和(2)分别计算$h^w(A_i)$的得分函数和离散度.

Step 4: 根据每个方案评估结果的得分函数$s(h^w(A_i))$和离散度$v(h^w(A_i))(i = 1, 2, \cdots, n)$对方案进行排序选优.

4 实例分析

舰船总体方案决策是舰船总体设计过程中的重要环节,而且其建造成本和维护费用巨大,因此,在舰船的总体设计阶段有必要对设计方案进行论证. 此外,由于舰船的设计涉及众多学科,并且包含许多定性和不确定因素,舰船设计方案的选择需要多名经验丰富的专家进行方案的群决策[30].

对舰船总体性能的评估,本文选用郭海鹏等[30]构建的评估指标体系,分别从作战能力、作战保障能力和作战适用性进行考虑,共有11个指标,即C_1: $\mathrm{C^3I}$系统能力、C_2: 对空作战能力、C_3: 对海作战能力、C_4: 反潜作战能力、C_5: 居住性、C_6: 补给能力、C_7: 三防能力、C_8: 兼容性、C_9: 机动性、C_{10}: 隐蔽性、C_{11}: 生命力,指标权重向量为$w = (0.1, 0.15, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.05, 0.1, 0.05, 0.1, 0.05)^{\mathrm{T}}$. 假设有5个舰船总体方案$A_1 \sim A_5$,邀请4位专家$e_1 \sim e_4$对每一方案针对各指标按照$0 \sim 1$标度进行评估打分,评估结果见表1～表4[30].

现在利用上面给出的群决策方法分两种情形对上述数据进行处理.

情形1: 假定每位专家的权重未知.

表 1　专家 e_1 的评估矩阵

A_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
A_1	0.8	0.6	0.9	0.7	0.6	0.8	0.7	0.9	0.8	0.7	0.6
A_2	0.7	0.9	0.6	0.8	0.7	0.5	0.6	0.9	0.4	0.7	0.6
A_3	0.9	0.6	0.5	0.8	0.7	0.4	0.6	0.5	0.7	0.8	0.9
A_4	0.8	0.5	0.6	0.9	0.7	0.9	0.8	0.4	0.6	0.7	0.5
A_5	0.6	0.8	0.5	0.9	0.9	0.8	0.6	0.5	0.7	0.5	0.8

表 2　专家 e_2 的评估矩阵

A_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
A_1	0.8	0.5	0.7	0.8	0.9	0.4	0.8	0.6	0.7	0.9	0.5
A_2	0.9	0.8	0.9	0.5	0.4	0.6	0.7	0.5	0.9	0.8	0.7
A_3	0.8	0.6	0.5	0.7	0.9	0.6	0.8	0.7	0.8	0.6	0.7
A_4	0.9	0.6	0.5	0.7	0.8	0.6	0.5	0.5	0.8	0.6	0.8
A_5	0.7	0.8	0.6	0.5	0.9	0.7	0.6	0.8	0.7	0.8	0.6

表 3　专家 e_3 的评估矩阵

A_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
A_1	0.8	0.6	0.9	0.7	0.8	0.6	0.5	0.9	0.6	0.8	0.7
A_2	0.8	0.7	0.6	0.6	0.8	0.9	0.7	0.6	0.8	0.6	0.8
A_3	0.9	0.5	0.6	0.8	0.7	0.6	0.8	0.9	0.5	0.7	0.6
A_4	0.8	0.6	0.9	0.7	0.7	0.8	0.6	0.5	0.8	0.6	0.7
A_5	0.8	0.6	0.9	0.7	0.8	0.6	0.8	0.9	0.6	0.7	0.6

表 4　专家 e_4 的评估矩阵

A_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
A_1	0.9	0.8	0.6	0.7	0.9	0.6	0.5	0.8	0.7	0.9	0.7
A_2	0.8	0.5	0.7	0.6	0.9	0.8	0.5	0.7	0.9	0.5	0.8
A_3	0.8	0.6	0.7	0.5	0.9	0.5	0.7	0.6	0.9	0.8	0.7
A_4	0.9	0.5	0.7	0.6	0.8	0.7	0.9	0.5	0.7	0.8	0.6
A_5	0.9	0.6	0.8	0.7	0.5	0.6	0.8	0.9	0.7	0.6	0.8

Step 1: 利用式(5)构造加权犹豫模糊集$A = (\langle r_{ij}, w_{r_{ij}}\rangle)$,分别得到方案$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$、$A_5$基于犹豫模糊元的评估结果(见表5～表9).

表 5　权重未知时方案 A_1 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.8, 0.75\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.5\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.7, 0.75\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.4, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.5\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.5, 0.5\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.5\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.5\rangle\}$

表 6　权重未知时方案 A_2 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.6, 0.5\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.5\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.4, 0.25\rangle\langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.5\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.4, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle\}$

表7 权重未知时方案 A_3 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.8, 0.5\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.75\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.5, 0.5\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.7, 0.5\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.4, 0.25\rangle, \langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.5\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.5\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$

表8 权重未知时方案 A_4 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.8, 0.5\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.5, 0.5\rangle, \langle 0.6, 0.5\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.5\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.7, 0.5\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.4, 0.25\rangle, \langle 0.5, 0.75\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.6, 0.5\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$

表9 权重未知时方案 A_5 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.6, 0.5\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.5\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.6, 0.5\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.6, 0.5\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.5\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.75\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.6, 0.5\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle\}$

Step 2: 利用WHFWA算子综合犹豫模糊元信息 $h^w_{ij(C_j)}(j=1,2,\cdots,11)$,得到方案 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 基于犹豫模糊元的评估结果 $h^w(A_i)(i=1,2,\cdots,5)$,因每个评估结果所含数值太多,故在此略去,下同.

Step 3: 利用式(1)和(2),分别计算 $h^w(A_i)$ 的得分函数和离散度,有

$$s(h^w(A_1))=0.760\,2,\ v(h^w(A_1))=0.033\,1;$$
$$s(h^w(A_2))=0.734\,7,\ v(h^w(A_2))=0.044\,6;$$
$$s(h^w(A_3))=0.715\,2,\ v(h^w(A_3))=0.032\,4;$$
$$s(h^w(A_4))=0.711\,1,\ v(h^w(A_1))=0.033\,2;$$
$$s(h^w(A_5))=0.742\,4,\ v(h^w(A_1))=0.040\,3.$$

Step 4: 根据每个方案评估结果的得分函数 $s(h^w(A_i))$ 和离散度 $v(h^w(A_i))(i=1,2,\cdots,5)$ 对方案进行排序选优.

由于每个得分函数不尽相同,由得分函数即可进行排序选优. 因 $s(h^w(A_1)) > s(h^w(A_5)) > s(h^w(A_2)) > s(h^w(A_3)) > s(h^w(A_4))$,故排序结果为 $A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$.

情形2: 每位专家的权重已知.

为说明本文所构建模型的科学性,本文将采用郭海鹏等[30]所给定的专家权重向量 $w=(0.35, 0.25, 0.2, 0.2)$.

Step 1: 利用式(6)构造加权犹豫模糊集 $A=(\langle r_{ij}, w_{r_{ij}}\rangle)$,分别得到方案 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 基于犹豫模糊元的评估结果(见表10～表14).

Step 2: 利用WHFWA算子综合犹豫模糊元信息 $h^w_{ij}(C_j)(j=1,2,\cdots,11)$,得到方案 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 基于犹豫模糊元的评估结果 $h^w(A_i)(i=1,2,\cdots,5)$.

Step 3: 利用式(1)和(2),分别计算 $h^w(A_i)$ 的得分函数和离散度,有

表10 权重已知时方案 A_1 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.8, 0.8\rangle, \langle 0.9, 0.2\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.55\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.55\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.7, 0.75\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.6, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.45\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.4, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.4\rangle, \langle 0.8, 0.35\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.5, 0.4\rangle, \langle 0.7, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.55\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.45\rangle, \langle 0.8, 0.35\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.7, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.45\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.35\rangle, \langle 0.7, 0.4\rangle\}$

表11 权重已知时方案 A_2 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.7, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.4\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.5, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.35\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.6, 0.55\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.25\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.4\rangle, \langle 0.8, 0.35\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.4, 0.25\rangle\langle 0.7, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.2\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.5, 0.35\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.2\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.5, 0.2\rangle, \langle 0.6, 0.35\rangle, \langle 0.7, 0.45\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.35\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.4, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.45\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.5, 0.2\rangle, \langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.6, 0.35\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.4\rangle\}$

表 12 权重已知时方案 A_3 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.8, 0.45\rangle, \langle 0.9, 0.55\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.5, 0.2\rangle, \langle 0.6, 0.8\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.5, 0.6\rangle, \langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.5, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.55\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.7, 0.55\rangle, \langle 0.9, 0.45\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.4, 0.35\rangle, \langle 0.5, 0.2\rangle, \langle 0.6, 0.45\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.6, 0.35\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.8, 0.45\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.5, 0.35\rangle, \langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.2\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.5, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.2\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.8, 0.55\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.45\rangle, \langle 0.9, 0.35\rangle\}$

表 13 权重已知时方案 A_4 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.8, 0.55\rangle, \langle 0.9, 0.45\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.5, 0.55\rangle, \langle 0.6, 0.45\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.35\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.2\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.45\rangle, \langle 0.9, 0.35\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.7, 0.55\rangle, \langle 0.8, 0.45\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.35\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.8, 0.35\rangle, \langle 0.9, 0.2\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.4, 0.35\rangle, \langle 0.5, 0.65\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.6, 0.35\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.8, 0.45\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.6, 0.45\rangle, \langle 0.7, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.5, 0.35\rangle, \langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$

表 14 权重已知时方案 A_5 基于犹豫模糊元的评估结果

C_1	$\{\langle 0.6, 0.35\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.2\rangle\}$
C_2	$\{\langle 0.6, 0.4\rangle, \langle 0.8, 0.6\rangle\}$
C_3	$\{\langle 0.5, 0.35\rangle, \langle 0.6, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.2\rangle\}$
C_4	$\{\langle 0.5, 0.25\rangle, \langle 0.7, 0.4\rangle, \langle 0.9, 0.35\rangle\}$
C_5	$\{\langle 0.5, 0.2\rangle, \langle 0.8, 0.2\rangle, \langle 0.9, 0.6\rangle\}$
C_6	$\{\langle 0.6, 0.4\rangle, \langle 0.7, 0.25\rangle, \langle 0.8, 0.35\rangle\}$
C_7	$\{\langle 0.6, 0.6\rangle, \langle 0.8, 0.4\rangle\}$
C_8	$\{\langle 0.5, 0.35\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle, \langle 0.9, 0.4\rangle\}$
C_9	$\{\langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.8\rangle\}$
C_{10}	$\{\langle 0.5, 0.35\rangle, \langle 0.6, 0.2\rangle, \langle 0.7, 0.2\rangle, \langle 0.8, 0.25\rangle\}$
C_{11}	$\{\langle 0.6, 0.45\rangle, \langle 0.8, 0.55\rangle\}$

$$s(h^w(A_1)) = 0.758\,8,\ v(h^w(A_1)) = 0.033\,7;$$
$$s(h^w(A_2)) = 0.736\,4,\ v(h^w(A_2)) = 0.045\,6;$$
$$s(h^w(A_3)) = 0.713\,2,\ v(h^w(A_3)) = 0.031\,9;$$
$$s(h^w(A_4)) = 0.710\,8,\ v(h^w(A_1)) = 0.033\,8;$$
$$s(h^w(A_5)) = 0.741\,3,\ v(h^w(A_1)) = 0.041\,3.$$

Step 4: 根据每个方案评估结果的得分函数 $s(h^w(A_i))$ 和离散度 $v(h^w(A_i))(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 对方案进行排序选优.

由于每个得分函数不尽相同, 由得分函数即可进行排序选优. 因 $s(h^w(A_1)) > s(h^w(A_5)) > s(h^w(A_2)) > s(h^w(A_3)) > s(h^w(A_4))$, 故排序结果为 $A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$.

注 1 由本文给出的两种排序方法所得到的结果可知, 最优方案均为 A_1, 其结论与郭海鹏等[30] 的结果相一致, 但本文的方法比郭海鹏等[30] 所提供的方法更为简便可行. 郭海鹏等[30] 采用全息粒子群智能算法, 每次寻优进行 1 000 次迭代. 在其 20 次寻优运算中, 有 19 次是 A_1 为最优, 1 次 A_5 为最优.

注 2 由本文给出的两种排序方法所得到的结果可知, 将 A_1 和 A_5 排在前两位是合理的, 其结论与郭海鹏等[30] 的结果和侯远杭等[31] 的结果相一致. 郭海鹏等[30] 在采用侯远杭等[31] 的方法时, 在其 20 次寻优运算中, 有 15 次是 A_1 为最优, 5 次 A_5 为最优.

注 3 本文将进一步应用所提出的加权犹豫模糊集及其排序方法于实际需求中, 以进一步验证本文方法的有效性.

5 结 论

犹豫模糊集允许多个隶属度值的存在, 非常便于处理复杂的不确定性决策问题. 但是, 因为不同的隶属度值被赋予相同的重要性, 这又导致其不能更真实地反映现实问题中那些必须考虑隶属度值重要性的模糊信息. 因此, 本文提出了加权犹豫模糊集和加权犹豫模糊元的概念, 可以更为方便地处理此类模糊信息. 通过建立加权犹豫模糊元之间运算法则和排序法则, 使犹豫模糊集有了更为完整的理论体系. 在此基础上, 本文提出了两类加权犹豫模糊元的集成算子 (WHFWA 算子和 WHFWG 算子), 使加权犹豫模糊集理论能更广泛地处理犹豫模糊环境下的不确定性.

接下来的工作是进一步开展加权犹豫模糊集的集成算子和加权犹豫模糊语言值的研究, 从而进一步深入开展基于加权犹豫模糊集理论的群决策的方法研究, 并应用于实际决策中, 进一步为群决策的理论与方法提供新思路与新途径.

参考文献 (References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Informmation and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets and systems: Theory and applications[M]. New York: Academic Press, 1980: 40-60.

[4] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[5] Rodríguez R M, Martínez L, Torra V, et al. Hesitant fuzzy sets: State of the art and future directions[J]. Int J of Intelligent Systems, 2014, 29(4): 495-524.

[6] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation

in decision making[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 395-407.

[7] Xia M M, Xu Z S, Chen N. Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making[J]. Group Decision Negotiation, 2013, 22(2): 259-279.

[8] Zhu B, Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy geomeric Bonferroni means[J]. Information Sciences, 2012, 182(11): 72-85.

[9] Wei G W. Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 31(1): 176-182.

[10] Zhang Z M. Hesitant fuzzy power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. Information Sciences, 2013, 234(1): 150-181.

[11] 廖虎昌. 复杂模糊多属性决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2016: 80-120.
(Liao H C. Theory and method for complicated fuzzy multiple attribute decision[M]. Beijing: Science Press, 2016: 80-120.)

[12] 陈树伟, 蔡丽娜. 区间值犹豫模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(6): 38-44.
(Chen S W, Cai L N. Interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27(6): 38-44.)

[13] Qian G, Wang H, Feng X. Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37(3): 357-365.

[14] Wei G W, Zhao X F, Lin R. Some hesitant interval-valued fuzzy aggregation operators and their applications to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 31(2): 176-182.

[15] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37(5): 528-540.

[16] 吴婉莹, 何迎东, 郭甦, 等. 直觉对偶犹豫模糊集的集结算子及其应用[J]. 武汉理工大学学报: 信息与管理工程版, 2014, 36(2): 225-228.
(Wu W Y, He Y D, Guo S, et al. Intuitionistic dual hesitant fuzzy set operators and its application[J]. J of Wuhan University of Technology: Information & Management Engineering, 2014, 36(2): 225-228.)

[17] Rodríguez R M, Martínez L, Herrera F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20(2): 109-119.

[18] Rodríguez R M, Martínez L, Herrera F. A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Information Sciences, 2013, 241(3): 28-42.

[19] Wei C P, Zhao N, Tang X J. Comparisons of hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(5): 575-585.

[20] 刘小弟, 朱建军, 刘思峰. 犹豫模糊信息下的双向投影决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(10): 2637-2644.
(Liu X D, Zhu J J, Liu S F. Bidirectional projection method with hesitant fuzzy information[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(10): 2637-2644.)

[21] 王坚强, 吴佳亭. 基于优序关系的犹豫模糊语言多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(5): 887-891.
(Wang J Q, Wu J T. Method for multi-criteria decision-making with hesitant fuzzy linguistic based on outranking relation[J]. Control and Decision, 2015, 30(5): 887-891.)

[22] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[23] Xu Z S, Xia M M. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information[J]. Int J of Intelligent Systems, 2014, 26(5): 410-425.

[24] Peng D H, Gao C Y, Gao Z F. Generalized hesitant fuzzy synergetic weighted distance measures and their application to multiple criteria decision-making[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(8): 5837-5850.

[25] Zhu B, Xu Z S. Consistency measures for hesitant fuzzy linguistic preference relations[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(2): 35-45.

[26] Li D Q, Zeng W Y, Li J H. New distance and similarity measures on hesitant fuzzy sets and their applications in multiple criteria decision making[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2015, 40(5): 11-16.

[27] Li D Q, Zeng W Y, Zhao Y B. Note on distance measure of hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2015, 321(5): 103-115.

[28] Liao H C, Xu Z S, Xia M M. Multiplicative consistency of hesitant fuzzy preference relation and its application in group decision making[J]. Int J of Information Technology & Decision Making, 2014, 13(4): 47-76.

[29] 岳超源. 决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 30-60.
(Yue C Y. Decision making theory and methods[M]. Beijing: Science Press, 2003: 30-60.)

[30] 郭海鹏, 黄胜, 王超. 基于改进德尔菲法的舰船总体方案群决策方法[J]. 上海交通大学学报, 2014, 48(4): 515-519.
(Guo H P, Huang S, Wang C. Group decision-making method of warship overall scheme based on improved Delphi[J]. J of Shanghai Jiaotong University, 2014, 48(4): 515-519.)

[31] 侯远杭, 胡玉龙, 王文全, 等. 船型方案优选的多目标群决策方法[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(3): 385-389.
(Hou Y H, Hu Y L, Wang W Q, et al. Ship type selection based on group with multi-objects[J]. J of Shanghai Jiaotong University, 2012, 46(3): 385-389.)

(责任编辑：李君玲)