

随机利率与随机波动率环境下的 DC 型养老金计划

常浩^{1,2†}, 王春峰¹, 房振明¹

(1. 天津大学管理与经济学部, 天津 300072; 2. 天津工业大学理学院, 天津 300387)

摘要: 为实现养老金的保值增值, 基金管理人将养老金投资于金融市场. 假设金融市场包含一种无风险资产、一种股票和一种零息票债券, 其中, 利率期限结构满足随机仿射利率模型, 而股票价格波动率满足 Heston 随机波动率模型. 基金管理人希望寻找一种最优投资组合以最大化其终端财富的期望效用. 假设基金管理人对风险的偏好满足幂效用或指数效用, 运用随机动态规划原理和变量替换方法, 得到幂效用和指数效用下最优投资策略的显式解. 最后, 通过数值算例分析主要模型参数对最优投资策略的影响. 研究表明, 利率风险、股市波动风险以及缴费率都对缴费确定 (DC) 型养老金的投资决策产生较大的影响.

关键词: 仿射利率; Heston 模型; DC 型养老金; 幂效用; 指数效用; 最优投资组合

中图分类号: F830.48; O211.67

文献标志码: A

Defined-contribution pension plan with stochastic interest rate and stochastic volatility

CHANG Hao^{1,2†}, WANG Chun-feng¹, FANG Zhen-ming¹

(1. College of Management and Economics, Tianjin University, Tianjin 300072, China; 2. School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China)

Abstract: In order to preserve and increase the value of pension fund, a fund manager can invest pension fund into a financial market with a risk-free asset, a stock and a zero-coupon bond. In the financial market, short rate is assumed to follow stochastic affine interest rate model, while stock price is supposed to be driven by Heston's stochastic volatility model. The fund manager expects to obtain an optimal portfolio to maximize the expected utility of terminal utility. Assuming the risk-aversion of the fund manager to satisfy power utility or exponential utility, the explicit solutions to the optimal portfolios with power utility or exponential utility are obtained by using the principle of stochastic dynamic programming and the variable change technique. Finally, a numerical example is given to analyse the impact of main market parameters on the optimal portfolios. Research results show that interest rate risk, volatility risk and contribution rate have a considerable influence on decision-making of fund manager for the defined-contribution pension fund.

Keywords: affine interest rate; Heston model; defined-contribution pension fund; power utility; exponential utility; optimal portfolios

0 引言

养老金是一项重大的公共政策问题. 在大多数国家, 养老金占据了政府财政负债的很大比重, 且随着“婴儿潮”一代人的逐渐退休, 这一比例还将继续增大. 同时, 由于股票市场的回报低和不断降低的利率以及人们寿命的延长, 许多机构的养老金计划都面临着严重的资金困难. 常见的养老金计划有两种: 收益确定 (DB) 型和缴费确定 (DC) 型. DB 型计划中, 养

老金支付是确定的, 而且不管养老金如何提供支持, 都要承诺基于确定的收益支付养老金, 这类计划不考虑收益水平或后期发生的通货膨胀. DC 型计划中, 缴费的比率是固定的, 养老金支付水平取决于至退休前的期间内累积的缴费值以及投资所得. 由此可见, DC 型养老金计划比较符合现行的养老金管理机制.

近年来, 许多学者对不同投资环境下的 DC 型养老金计划进行研究, 取得了研究成果. 谷爱玲

收稿日期: 2017-08-25; 修回日期: 2018-01-13.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (71671122); 中国博士后科学基金项目 (2014M560185, 2016T90203); 教育部人文社会科学研究基金规划项目 (16YJA790004); 天津市自然科学基金项目 (15JCQNJC04000); 天津市高校“中青年骨干创新人才培养计划”项目.

责任编辑: 唐万生.

作者简介: 常浩 (1979—), 男, 副教授, 博士后, 从事金融工程与风险管理等研究; 王春峰 (1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事金融工程与风险管理等研究.

†通讯作者. E-mail: ch8683897@126.com.

等^[1]假设股票瞬时收益率服从Ornstein-Uhlenbeck过程,运用随机最优控制理论得到了幂效用下最优投资策略的显式解,并分析了瞬时收益率对最优投资策略的影响.考虑到养老金的投资期限比较长,一般可以达到20~40年,受很多随机因素的影响,利率一般不是常数或时间的有界确定函数,而是一种随机过程,因此,一些学者对随机利率下的DC型养老金计划进行了研究.如:Boulier等^[2]对随机利率环境下带有最低保障水平的DC型计划进行研究,运用对偶方法得到了幂效用下最优投资策略的显式解,并分析了投资期限对最优投资策略和财富水平的影响;Deelstra等^[3]将Boulier等^[2]的模型拓展到仿射利率模型下,并假设保障水平和缴费率都是随机的,运用对偶方法进一步研究了DC型养老金计划问题;Gao^[4]在Deelstra等^[3]模型基础上进一步对仿射利率模型下的DC型计划进行研究,运用随机最优控制理论得到了对数效用下最优投资策略的显式解;张初兵等^[5]在Gao市场模型^[4]基础上进一步对幂效用和指数效用下的DC型养老金计划进行了研究.

另一方面,在长达20~40年的投资决策过程中,单位货币的购买力一般会随着时间的推移而减少,即长期投资决策过程中的通胀风险不可忽视,因而一些学者开始对通胀风险环境下的DC型计划进行了研究.如:殷俊等^[6]同时考虑利率风险和通胀风险,研究了幂效用下DC型计划的最优投资策略;伍慧玲等^[7]考虑通胀风险和随机收入的情形,研究了均值-方差准则下多周期DC型计划的最优投资策略和风险-收益的数量关系,研究结果表明,通胀风险和随机收入将对最优投资策略和有效边界产生本质的影响;常浩等^[8]假设计划参与人对风险的偏好满足HARA效用函数,该效用函数包含幂效用、指数效用和对数效用,运用随机最优控制理论和Legendre变换-对偶理论研究了通胀风险环境下的DC型养老金计划.这些研究成果为通胀风险环境下的投资决策提供了理论依据.

金融资产价格的波动风险也是一种常见的金融市场风险.Heston模型^[9]是刻画金融资产价格波动风险的最常见的模型之一,该模型结构简单,已被证实能够很好地刻画金融资产价格的波动率,是目前连续时间金融中广泛研究的随机波动率模型.目前,许多学者对Heston随机波动率模型下的各种投资问题进行研究,取得了很多研究成果.如:Kraft^[10]研究了Heston模型下的投资组合选择问题;Li等^[11]研究了Heston模型下的时间一致投资-再保险策略

问题;Zhao等^[12]研究了Heston模型下的超额损失投资-再保险策略问题;张初兵等^[13]研究了Heston模型下的DC型养老金计划问题.这些研究成果分析了Heston模型下各种投资问题中最优投资策略的动态变化过程,丰富和发展了投资组合选择理论.

上述模型大多是在单一风险环境下取得的,而实际的金融市场通常是多种风险并存的,如当利率发生波动时,金融资产价格也会产生一定的波动.因此,人们发现同时考虑利率风险和波动风险比较符合实际的投资过程.Liu^[14]、Li等^[15]以及Noh等^[16]根据利率动态对金融资产价格波动的不同影响,分别构造了3种不同的随机利率与随机波动率模型,并研究了这些模型下的一些投资问题.在这3种模型中,Liu^[14]以及Noh等^[16]给出的模型比较一般,但往往不能得到最优投资组合的显式解;Li等^[15]给出的模型虽能得到显式解,但没有考虑利率变化对股票价格的影响趋势.随后,Chang等^[17]在Li等^[15]市场模型基础上进一步研究了投资-消费问题;Guan等^[18]在Liu^[14]的市场模型基础上进一步考虑了最低保障水平,研究了DC型养老金计划问题.这些成果为随机利率和随机波动率模型的投资决策提供了理论依据,但这些成果都是在幂效用下取得的.与幂效用相比较,指数效用属于常系数绝对风险厌恶效用函数,其对风险的厌恶程度不依赖于当前财富水平.在效用理论中,幂效用和指数效用经常被用于刻画不同投资者对风险的厌恶程度,已广泛地应用到投资组合选择理论中.就问题解决的难度而言,指数效用下最优投资策略的求解更加困难,原因在于原HJB方程解的形式以及其产生的偏微分方程解的形式都发生了本质的变化,猜想这些方程解的形式比较困难.

据笔者对现有文献的查阅情况来看,尚无其他文献研究随机利率与随机波动率模型下的DC型养老金计划问题,除了文献[18]以外.但文献[18]考虑了最低保障水平,模型处理方法比较特殊,且仅得到了幂效用下的最优投资策略.本文在文献[18]的市场模型基础上,进一步研究计划参与人退休前养老金投资过程的投资决策问题,通过假设基金管理人对其风险的偏好满足幂效用或指数效用,运用随机最优控制理论对随机利率和随机波动率环境下的DC型养老金计划问题进行研究,得到最优投资策略的显式解,给出算例并分析利率参数和波动率参数对最优投资策略的影响.数值结果表明:利率风险、波动风险和缴费率都会对养老金的投资决策产生较大的影响.与现有文献相比较,本文有如下几个创新点:1)对随机

利率和随机波动率模型下的DC型养老金计划问题进行研究;2) 得到幂效用和指数效用下最优投资策略的显式解;3) 克服了指数效用下价值函数猜想方面的难点,为其他更加复杂投资问题的解决提供了理论参考。

1 DC型养老金的连续时间模型

假设 $[0, T]$ 是固定的有限投资期, 其中 T 为终端时刻, $(W_r(t), W_s(t))$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ 上相互独立的二维标准布朗运动, $\{F_t\}_{t \in [0, T]}$ 是由 $(W_r(t), W_s(t))$ 所产生的信息流. 假设金融市场是无摩擦的、没有交易成本且是完备的, 存在一种无风险资产、一种风险资产和一种零息债券可连续交易。

第1种资产为无风险资产, 可视为现金或银行账户, 其时刻 t 的价格记为 $S_0(t), t \in [0, T]$, 则 $S_0(t)$ 满足微分方程

$$dS_0(t) = S_0(t)r(t)dt, S_0(0) = 1, \quad (1)$$

其中 $r(t)$ 表示瞬时利率. 本文假设利率 $r(t)$ 是随机过程, 其期限结构满足随机仿射利率模型^[3]

$$\begin{aligned} dr(t) &= (a - br(t))dt - \sigma_r dW_r(t), \\ r(0) &= r_0 > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $\sigma_r = \sqrt{k_1 r(t) + k_2}$, 且 a, b, k_1 和 k_2 均为正常数, 参数 a 表示利率的均值回复水平, 参数 b 表示利率回复到均值的速度, σ_r 表示利率的波动率。

注1 式(2)包含两种常见的利率模型(作为特例): 一种是 Vasicek 利率模型(当 $k_1 = 0$ 时); 另一种是 CIR 利率模型(当 $k_2 = 0$ 时). 当 $k_2 = 0$ 时, 式(2)退化为 CIR 利率模型, 这时需要条件 $2a > k_1$ 来确保 $r(t) > 0$.

第2种资产为风险资产, 可视为股票, 其时刻 t 的价格记为 $S_1(t), t \in [0, T]$. 考虑到利率波动必然对股票价格产生很大的影响, 本文在原 Heston 随机波动率模型基础上考虑利率动态对股票价格的影响, 因而可假设 $S_1(t)$ 服从如下随机微分方程^[18]:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1(t)}{S_1(t)} &= r(t)dt + \sigma_s \sigma_r (\lambda_r \sigma_r dt + dW_r(t)) + \\ &\quad \sqrt{L(t)}(v\sqrt{L(t)}dt + dW_s(t)), \\ S_1(0) &= 1; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} dL(t) &= \alpha(\delta - L(t))dt + \sigma_l \sqrt{L(t)}dW_s(t), \\ L(0) &= l_0 > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $\sigma_s, \lambda_r, v, \alpha, \delta$ 和 σ_l 均为正常数且满足条件 $2\alpha\delta > \sigma_l^2$, 该条件可确保对于任意的 $t \in [0, T]$, 恒有 $L(t) > 0$. 在方程(3)中, $\sigma_s \sigma_r$ 表示由利率波动引起

的股票价格波动率, $\lambda_r \sigma_r$ 表示利率风险的市场价格, $v\sqrt{L(t)}$ 表示股市波动风险的市场价格, $\sqrt{L(t)}$ 表示股票价格的波动率; 在方程(4)中, 参数 α 表示股票波动率回复到均值的速度, δ 表示股票波动率的均值回复水平, $\sigma_l \sqrt{L(t)}$ 表示股票波动率所引起的波动率。

注2 注意方程(3)中包含两种不同的布朗运动 $W_r(t)$ 和 $W_s(t)$, 它们相互独立, 这表示股票价格的不确定性来源于两部分: 一部分是由利率的不确定性所引起的; 另一部分是由股票价格自身的不确定性所引起的. 为了能够成功地开展本文工作, 这里假设波动率的不确定性来源于股票的不确定性, 即方程(4)中的布朗运动也用 $W_s(t)$ 来表示。

第3种资产为到期时刻为 T 的零息票债券, 其时刻 t 时的价格记为 $B(t, T), t \in [0, T]$, 则 $B(t, T)$ 服从如下随机微分方程^[3]:

$$\begin{aligned} \frac{dB(t, T)}{B(t, T)} &= r(t)dt + \varphi_1(t)\sigma_r(\lambda_r \sigma_r dt + dW_r(t)), \\ B(T, T) &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{2(e^{m(T-t)} - 1)}{m - (b - k_1 \lambda_r) + e^{m(T-t)}(m + b - k_1 \lambda_r)}, \\ m &= \sqrt{(b - k_1 \lambda_r)^2 + 2k_1}. \end{aligned}$$

进一步, 解方程(5), 可以得到 $B(t, T) = e^{\varphi_0(t) - \varphi_1(t)r}$, 其中 $\varphi_0(t)$ 由下式确定:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \\ &\frac{k_2}{k_1}(T-t) - \frac{k_2}{k_1}\varphi_1(t) + \frac{2(ak_1 + bk_2)}{k_1^2} \times \\ &\quad \ln \frac{2me^{0.5(m+b-k_1\lambda_r)(T-t)}}{m - (b - k_1 \lambda_r) + e^{m(T-t)}(m + b - k_1 \lambda_r)}. \end{aligned}$$

本文主要考虑退休前养老金投资过程中应采取的最优投资策略问题. 为了实现养老金的保值增值, 基金管理者将其财富投资于金融市场. 假设投保人的缴费率是常数, 记为 c , 时刻 t 投资在股票和零息票债券的资金数量分别记为 $\pi_s(t)$ 和 $\pi_B(t)$, 则时刻 t 投资在银行账户的资金数量可记为 $\pi_0(t)$, 且 $\pi_0(t) = X(t) - \pi_s(t) - \pi_B(t)$, 其中 $X(t)$ 表示时刻 t 的财富过程. 假设股票市场允许卖空和借贷, 则在投资策略 $\pi_s(t)$ 和 $\pi_B(t)$ 下基金管理者的财富过程 $X(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} dX(t) &= (X(t)r(t) + \pi_s(t)vL(t) + c + \\ &\quad \lambda_r(\pi_s(t)\sigma_s + \pi_B(t)\varphi_1(t))\sigma_r^2 dt + \\ &\quad (\pi_s(t)\sigma_s + \pi_B(t)\varphi_1(t))\sigma_r dW_r(t) + \\ &\quad \pi_s(t)\sqrt{L(t)}dW_s(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中初始时刻 $X(0) = x_0 > 0$.

定义1(可容许策略) 投资策略 $\pi_s(t)$ 和 $\pi_B(t)$ 被称为可容许的, 如果 $\pi_s(t)$ 和 $\pi_B(t)$ 满足如下3个条件:

1) $\pi_s(t)$ 和 $\pi_B(t)$ 是 F_t 可测的, 且满足

$$E\left(\int_0^T \pi_s^2(t)dt\right) < \infty, E\left(\int_0^T \pi_B^2(t)dt\right) < \infty;$$

2) $E\left(\int_0^T (\pi_s(t)\sigma_s + \pi_B(t)\varphi_1(t))^2 \sigma_r^2 dt + \int_0^T \pi_s^2(t)L(t)dt\right) < \infty;$

3) 对于任意的 $\pi_s(t)$ 和 $\pi_B(t)$, 方程(6)的解存在且唯一.

记 $\Pi = \{\pi(t) | \pi(t) = (\pi_s(t), \pi_B(t)), 0 \leq t \leq T\}$ 为养老金计划所有可容许策略形成的集合. 基金管理者期望寻找一种最优投资策略 $\pi^*(t)$ 以最大化其终端财富的期望效用, 即可将目标表示为

$$\max_{\pi(t) \in \Pi} E(U(X(T))), \quad (7)$$

其中 $U(\cdot)$ 表示效用函数, 是严格凸的连续可微函数且满足Inada条件: $U'(+\infty) = 0, U'(0) = +\infty$. 本文假设基金管理者对风险的厌恶程度满足下列两种效用函数: 1) 幂效用函数, 其 $U(x)$ 可写为 $U(x) = x^p/p, p < 1$ 且 $p \neq 0, p$ 称为风险厌恶因子; 2) 指数效用函数, 其 $U(x)$ 可写为 $U(x) = -e^{-qx}/q, q > 0, q$ 是风险厌恶因子.

注3 与现有文献相比, 本文在市场模型的构建和效用函数的选择方面有如下几个优点:

1) 与文献[18]的工作相比, 本文研究的DC型养老金问题是不同的. 文献[18]考虑了最低保障水平, 得到了幂效用下的最优投资策略, 但其结果并不能退化到本文的结果, 且由于模型考虑了最低保障水平, 其模型处理方法比较特殊.

2) 与文献[14-17]的工作相比, 本文研究的投资问题是不同的. 文献[14, 16-17]研究的都是投资-消费问题, 文献[15]研究的是投资组合选择问题, 且都假设投资人对风险的偏好满足幂效用函数; 而本文研究的是DC型养老金计划问题, 不仅得到了幂效用下的最优投资策略, 而且得到了指数效用下的最优投资策略, 为基金管理人在风险偏好视角下的最优投资决策提供了理论参考.

3) 与文献[2-5]相比, 本文不仅考虑了利率风险, 而且还考虑了金融资产价格的波动风险; 而文献[2-5]仅考虑了利率风险.

2 最优投资策略

本节运用随机最优控制理论和变量替换方法求解问题(7).

定义价值函数

$$V(t, r, l, x) = \max_{\pi(t) \in \Pi} E(U(X(T)) | r(t) = r,$$

$$L(t) = l, X(t) = x), \quad (8)$$

根据随机最优控制原理, 如果 $V(t, r, l, x) \in C^{1,2,2,2}([0, T] \times R^+ \times R^+ \times R^+)$, 则 $V(t, r, l, x)$ 可视为下列Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程的一个连续解:

$$\begin{aligned} \max_{\pi(t) \in \Pi} \{ & V_t + (a - br)V_r + \alpha(\delta - l)V_l + (xr + c + \\ & \pi_s(t)vl + (\pi_s(t)\sigma_s + \pi_B(t)\varphi_1(t))\lambda_r\sigma_r^2 V_x + \\ & 0.5((\pi_s(t)\sigma_s + \pi_B(t)\varphi_1(t))^2 \sigma_r^2 + \\ & \pi_s^2(t)l)V_{xx} + 0.5\sigma_r^2 V_{rr} + 0.5\sigma_l^2 lV_{ll} - \\ & (\pi_s(t)\sigma_s + \pi_B(t)\varphi_1(t))\sigma_r^2 V_{rx} + \\ & \pi_s(t)\sigma_l lV_{lx} \} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $V(T, r, l, x) = U(x)$, 且 $V_t, V_r, V_l, V_{rr}, V_{ll}, V_x, V_{xx}, V_{rx}, V_{lx}$ 分别表示 $V(t, r, l, x)$ 对变量 t, r, l, x 的一阶和二阶偏导数.

根据极值的一阶条件可得最优策略 $\pi_s^*(t)$ 和 $\pi_B^*(t)$ 分别为

$$\pi_s^*(t) = -v \frac{V_x}{V_{xx}} - \sigma_l \frac{V_{lx}}{V_{xx}}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \pi_B^*(t) = & \frac{v\sigma_s - \lambda_r}{\varphi_1(t)} \cdot \frac{V_x}{V_{xx}} + \\ & \frac{\sigma_l \sigma_s}{\varphi_1(t)} \cdot \frac{V_{lx}}{V_{xx}} + \frac{1}{\varphi_1(t)} \cdot \frac{V_{rx}}{V_{xx}}. \end{aligned} \quad (11)$$

将式(10)和(11)代入(9), 得

$$\begin{aligned} & V_t + (xr + c)V_x + (a - br)V_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 V_{rr} + \\ & \alpha(\delta - l)V_l + \frac{1}{2}\sigma_l^2 lV_{ll} - \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{(V_{rx} - \lambda_r V_x)^2}{V_{xx}} - \\ & \frac{1}{2}l \frac{(vV_x + \sigma_l V_{lx})^2}{V_{xx}} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

其中边界条件为 $V(T, r, l, x) = U(x)$.

下面分别在幂效用和指数效用下求解方程(12), 从而得到两种效用下问题(7)的最优投资策略.

2.1 幂效用下的最优投资策略

幂效用下, 假设方程(12)的解具有如下结构:

$$\begin{aligned} V(t, r, l, x) = & \frac{(x - g(t, r))^p}{p} f(t, r, l), \\ f(T, r, l) = & 1, g(T, r) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

计算 $V(t, r, l, x)$ 关于各个变量的一阶和二阶偏导如下:

$$\begin{aligned} V_t = & -(x - g)^{p-1} f g_t + \frac{(x - g)^p}{p} f_t, \\ V_r = & -(x - g)^{p-1} f g_r + \frac{(x - g)^p}{p} f_r, \\ V_l = & \frac{(x - g)^p}{p} f_l, V_{ll} = \frac{(x - g)^p}{p} f_{ll}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{lx} &= (x - g)^{p-1} f_l, \quad V_x = (x - g)^{p-1} f, \\
V_{xx} &= (p - 1)(x - g)^{p-2} f, \\
V_{rx} &= -(p - 1)(x - g)^{p-2} f g_r + (x - g)^{p-1} f_r, \\
V_{rr} &= (p - 1)(x - g)^{p-2} f g_r^2 - (x - g)^{p-1} f g_{rr} - \\
&\quad 2(x - g)^{p-1} f_r g_r + \frac{(x - g)^p}{p} f_{rr}.
\end{aligned}$$

将上述各阶偏导数代入方程(12), 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{(x - g)^p}{p} \left(f_t + p r f + (a - b r) f_r + \right. \\
&\alpha(\delta - l) f_l + \frac{1}{2} \sigma_r^2 f_{rr} + \frac{1}{2} \sigma_l^2 l f_{ll} - \\
&\left. \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{p(f_r - \lambda_r f)^2}{(p - 1) f} - \frac{1}{2} l \frac{p(f_l \sigma_l + f v)^2}{(p - 1) f} \right) - \\
&(x - g)^{p-1} f \left(g_t - (r g + c) + (a - b r) g_r + \right. \\
&\left. \lambda_r \sigma_r^2 g_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 g_{rr} \right) = 0.
\end{aligned}$$

消去对 x 的依赖, 得

$$\begin{aligned}
&f_t + (a - b r) f_r + \alpha(\delta - l) f_l + p r f + \frac{1}{2} \sigma_r^2 f_{rr} - \\
&\frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{p(f_r - \lambda_r f)^2}{(p - 1) f} + \frac{\sigma_l^2}{2} l f_{ll} - \frac{1}{2} l \frac{p(f_l \sigma_l + f v)^2}{(p - 1) f} = 0, \\
&f(T, r, l) = 1; \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g_t - (r g + c) + (a - b r) g_r + \lambda_r \sigma_r^2 g_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 g_{rr} = 0, \\
&g(T, r) = 0. \tag{15}
\end{aligned}$$

为了方便阅读, 将上述偏微分方程的求解过程表达成下面3个引理.

引理1 假设方程(14)解的结构为 $f(t, r, l) = e^{A_1(t)l + A_2(t)r + A_3(t)}$, 其中边界条件为 $A_1(T) = 0$ 和 $A_2(T) = A_3(T) = 0$, 则在

$$p < \min \left\{ \frac{b^2}{2k_1 + (k_1 \lambda_r - b)^2}, \frac{\alpha^2}{(\sigma_1 v + \alpha)^2} \right\}$$

条件下, $A_1(t)$ 、 $A_2(t)$ 和 $A_3(t)$ 分别为

$$A_1(t) = \frac{m_1 m_2 (1 - \exp\{\sqrt{\Delta_1}(T - t)\})}{m_1 - m_2 \exp\{\sqrt{\Delta_1}(T - t)\}}, \tag{16}$$

$$A_2(t) = \frac{m_3 m_4 (1 - \exp\{\sqrt{\Delta_2}(T - t)\})}{m_3 - m_4 \exp\{\sqrt{\Delta_2}(T - t)\}}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
A_3(t) &= -\frac{p k_2}{k_1} (T - t) + \frac{k_2}{k_1} A_2(t) + \\
&\alpha \delta \int_t^T A_1(s) ds + \frac{a k_1 + b k_2}{k_1} \int_t^T A_2(s) ds. \tag{18}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \alpha^2 + \frac{p}{p - 1} (\sigma_l^2 v^2 + 2\alpha \sigma_l v), \\
\Delta_2 &= \frac{1}{1 - p} (b^2 - p(2k_1 + (k_1 \lambda_r - b)^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{1,2} &= \frac{-(p - 1)\alpha - p\sigma_l v \pm (p - 1)\sqrt{\Delta_1}}{\sigma_l^2} \\
m_{3,4} &= \frac{-(p - 1)b + p k_1 \lambda_r \pm (p - 1)\sqrt{\Delta_2}}{k_1}.
\end{aligned}$$

证明 将 $f(t, r, l) = e^{A_1(t)l + A_2(t)r + A_3(t)}$ 代入方程(14), 整理后可得

$$\begin{aligned}
&\left(A_1'(t) - \frac{p}{2(p - 1)} (\sigma_l A_1(t) + v)^2 - \alpha A_1(t) + \right. \\
&\left. \frac{\sigma_l^2}{2} A_1^2(t) \right) l + \left(A_2'(t) + p - b A_2(t) + \frac{k_1}{2} A_2^2(t) - \right. \\
&\left. \frac{k_1 p}{2(p - 1)} (A_2(t) - \lambda_r)^2 \right) r + A_3'(t) + \alpha \delta A_1(t) + \\
&a A_2(t) + \frac{k_2}{2} A_2^2(t) - \frac{k_2 p}{2(p - 1)} (A_2(t) - \lambda_r)^2 = 0.
\end{aligned}$$

消去对 l 和 r 的依赖, 得

$$\begin{aligned}
&A_1'(t) - \frac{p}{2(p - 1)} (\sigma_l A_1(t) + v)^2 - \alpha A_1(t) + \\
&\frac{\sigma_l^2}{2} A_1^2(t) = 0, \quad A_1(T) = 0; \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_2'(t) - \frac{p k_1}{2(p - 1)} (A_2(t) - \lambda_r)^2 + \frac{k_1}{2} A_2^2(t) - \\
&b A_2(t) + p = 0, \quad A_2(T) = 0; \tag{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_3'(t) + \alpha \delta A_1(t) + a A_2(t) + \frac{k_2}{2} A_2^2(t) - \\
&\frac{k_2 p}{2(p - 1)} (A_2(t) - \lambda_r)^2 = 0, \quad A_3(T) = 0. \tag{21}
\end{aligned}$$

解方程(19)和(20)可得式(16)和(17). 进一步, 通过式(21) $\times k_1$ - 式(20) $\times k_2$ 可得式(18). \square

引理2 假设方程(15)解的结构为 $g(t, r) = -c \int_t^T \hat{g}(s, r) ds$, 则 $\hat{g}(t, r, l)$ 满足方程

$$\begin{aligned}
&\hat{g}_t - r \hat{g} + [(\lambda_r k_1 - b)r + a + \lambda_r k_2] \hat{g}_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \hat{g}_{rr} = 0, \\
&\hat{g}(T, r) = 1. \tag{22}
\end{aligned}$$

证明 对于任意函数 $g(t, r)$, 定义如下变分算子:

$$\begin{aligned}
\nabla g(t, r) &= \\
&-r g + ((\lambda_r k_1 - b)r + a + \lambda_r k_2) g_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 g_{rr},
\end{aligned}$$

则方程(15)可写成如下形式:

$$\frac{\partial g(t, r)}{\partial t} + \nabla g(t, r) - c = 0, \quad g(T, r) = 0. \tag{23}$$

另一方面, 有

$$\frac{\partial g(t, r)}{\partial t} = -c \left(\int_t^T \frac{\partial \hat{g}(s, r)}{\partial s} ds - \hat{g}(T, r) \right), \tag{24}$$

$$\nabla g(t, r) = -c \int_t^T \nabla \hat{g}(s, r) ds. \tag{25}$$

将式(24)和(25)代入(23), 得

$$-c \left(\int_t^T \left(\frac{\partial \hat{g}(s, r)}{\partial s} + \nabla \hat{g}(s, r) \right) ds - \hat{g}(T, r) + 1 \right) = 0.$$

即得

$$\frac{\partial \hat{g}(t, r)}{\partial t} + \nabla \hat{g}(t, r) = 0, \quad \hat{g}(T, r) = 1. \quad \square$$

引理3 假设方程(22)解的结构为 $\hat{g}(t, r) = e^{B_2(t)r+B_1(t)}$, 其中边界条件为 $B_2(T) = 0$ 和 $B_1(T) = 0$, 则 $B_2(t)$ 和 $B_1(t)$ 分别为

$$B_2(t) = \frac{m_5 m_6 (1 - \exp\{\sqrt{\Delta_3}(T-t)\})}{m_5 - m_6 \exp\{\sqrt{\Delta_3}(T-t)\}}, \quad (26)$$

$$B_1(t) = \frac{k_2}{k_1} ((T-t) + B_2(t)) + \frac{ak_1 + bk_2}{k_1} \int_t^T B_2(s) ds. \quad (27)$$

其中

$$\Delta_3 = (\lambda_r k_1 - b)^2 + 2k_1, \quad m_{5,6} = \frac{\lambda_r k_1 - b \pm \sqrt{\Delta_3}}{-k_1}.$$

证明 将 $\hat{g}(t, r) = e^{B_2(t)r+B_1(t)}$ 代入方程(22), 整理后得

$$\left(B_2'(t) + \frac{k_1}{2} B_2^2(t) + (\lambda_r k_1 - b) B_2(t) - 1 \right) r +$$

$$B_1'(t) + \frac{k_2}{2} B_2^2(t) + (a + \lambda_r k_2) B_2(t) = 0.$$

消除对 l 和 r 的依赖, 得

$$B_2'(t) + \frac{k_1}{2} B_2^2(t) + (\lambda_r k_1 - b) B_2(t) - 1 = 0,$$

$$B_2(T) = 0; \quad (28)$$

$$B_1'(t) + \frac{k_2}{2} B_2^2(t) + (a + \lambda_r k_2) B_2(t) = 0,$$

$$B_1(T) = 0. \quad (29)$$

解方程(28)可得式(26). 进一步, 通过式(29) $\times k_1$ - (28) $\times k_2$, 可得式(27). \square

应用式(13)和其各阶偏导数, 可以得到

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = -\frac{1}{1-p}(x-g),$$

$$\frac{V_{xl}}{V_{xx}} = -\frac{1}{1-p}(x-g)A_1(t),$$

$$\frac{V_{xr}}{V_{xx}} = -\frac{1}{1-p}(x-g)A_2(t) - g_r.$$

综上所述, 考虑到式(10)和(11), 将幂效用函数下问题(7)的最优投资策略总结如下.

定理1 当效用函数为 $U(x) = x^p/p, p < 1$ 且 $p \neq 0$ 时, 则在

$$p < \min \left\{ \frac{b^2}{2k_1 + (k_1 \lambda_r - b)^2}, \frac{\alpha^2}{(\sigma_1 v + \alpha)^2} \right\}$$

且 $p \neq 0$ 的条件下, 问题(7)的最优投资策略为

$$\pi_s^*(t) = \frac{1}{1-p}(v + \sigma_l A_1(t))(X(t) - g(t, r)), \quad (30)$$

$$\pi_B^*(t) = \frac{\lambda_r - v\sigma_s - \sigma_l \sigma_s A_1(t) - A_2(t)}{(1-p)\varphi_1(t)} \times (X(t) - g(t, r)) - \frac{1}{\varphi_1(t)} g_r. \quad (31)$$

其中: $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 由引理1确定; $g(t, r)$ 和 g_r 分别由下列两式确定:

$$g(t, r) = -c \int_t^T e^{B_2(s)r+B_1(s)} ds,$$

$$g_r = -c \int_t^T B_2(s) e^{B_2(s)r+B_1(s)} ds.$$

注4 由式(30)和(31)可以得出: 1) 投资于股票的资金数量 $\pi_s^*(t)$ 依赖于参数 $a, b, k_1, k_2, \lambda_r, v, \alpha, \sigma_l, p, T$ 和 c , 而与 σ_s 和 δ 无关; 2) 投资于零息票债券的资金数量 $\pi_B^*(t)$ 依赖于参数 $a, b, k_1, k_2, \sigma_s, \lambda_r, v, \alpha, \sigma_l, p, T$ 和 c , 而与 δ 无关; 3) 经比较发现, $B_2(t) = -\varphi_1(t), B_1(t) = \varphi_0(t)$, 即 $\hat{g}(t, r) = B(t, T)$, 因此, 幂效用下 $\pi_s^*(t)$ 和 $\pi_B^*(t)$ 依赖于财富过程 $X(t)$ 和零息票债券价格过程 $B(t, T)$.

注5 考虑到文献[18]研究的是带有最低收益保障的DC型养老金计划问题, 也得到了幂效用偏好下的最优投资策略. 与文献[18]的结论相比, 本文结论有很大的不同: 1) 本文的 $\pi_s^*(t)$ 依赖于利率动态, 从而更进一步与零息票债券价格密切相关, 而文献[18]的 $\pi_s^*(t)$ 不依赖于利率动态; 2) 本文的 $\pi_B^*(t)$ 直接依赖于财富过程和零息票债券价格过程 $B(t, T)$, 其结构和形式都发生了根本的变化; 3) 本文的价值函数的结构和形式发生了根本的变化.

如果不考虑缴费率, 即 $c = 0$, 则本文将退化为随机利率与随机波动率模型下的动态资产配置问题. 此时有 $g(t, r) = 0$ 和 $g_r = 0$, 从而定理1的结论退化为

$$\pi_s^*(t) = \frac{1}{1-p}(v + \sigma_l A_1(t))X(t),$$

$$\pi_B^*(t) = \frac{\lambda_r - v\sigma_s - \sigma_l \sigma_s A_1(t) - A_2(t)}{(1-p)\varphi_1(t)} X(t).$$

由此可见, 如果不考虑缴费率 c , 则幂效用下的最优投资策略仅依赖于财富过程 $X(t)$, 这与定理1的结论有着本质的区别.

2.2 指数效用下的最优投资策略

指数效用下, 本文猜想方程(12)的解的形式如下:

$$V(t, r, l, x) = -\frac{1}{q} \exp\{-qJ(t, r)(x - K(t, r)) + \phi(t, r, l)\}. \quad (32)$$

其中边界条件为: $J(T, r) = 1, K(T, r) = 0$ 和 $\phi(T, r, l) = 0$.

计算式(32)的各阶偏导数如下:

$$V_t = V(-qJ_t(x - K) + qJK_t + \phi_t),$$

$$V_r = V(-qJ_r(x - K) + qJK_r + \phi_r),$$

$$V_x = V(-qJ), \quad V_l = V\phi_l, \quad V_{xx} = V(-qJ)^2,$$

$$V_{xl} = V(-qJ)\phi_l, \quad V_{ll} = V(\phi_l^2 + \phi_{ll}),$$

$$V_{rx} = V(-qJ)(-qJ_r(x - K) +$$

$$qJK_r + \phi_r) + V(-qJ_r),$$

$$V_{rr} = V(-qJ_r(x - K) + qJK_r + \phi_r)^2 +$$

$$V(-qJ_{rr}(x - K) + 2qJ_rK_r + qJK_{rr} + \phi_{rr}).$$
 将上述偏导数代入方程(12), 分离变量后可得如下3个偏微分方程:

$$J_t + rJ + (a - br)J_r + \lambda_r\sigma_r^2J_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2J_{rr} - \sigma_r^2\frac{J_r^2}{J} = 0, J(T, r) = 1; \quad (33)$$

$$K_t - rK + (a - br)K_r + \lambda_r\sigma_r^2K_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2K_{rr} - c = 0, K(T, r) = 0; \quad (34)$$

$$\phi_t + (a - br)\phi_r - \left(\frac{J_r}{J} - \lambda_r\right)\sigma_r^2\phi_r + \alpha(\delta - l)\phi_l - \sigma_l v l \phi_l + \frac{1}{2}\sigma_r^2\phi_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_l^2 l \phi_{ll} - \frac{1}{2}\sigma_r^2\left(\frac{J_r}{J} - \lambda_r\right)^2 - \frac{1}{2}v^2l = 0, \phi(T, r, l) = 0. \quad (35)$$

假设方程(33)的解具有结构 $J(t, r) = e^{D_1(t) + D_2(t)r}$, 其边界条件为 $D_1(T) = 0$ 和 $D_2(T) = 0$. 将 $J(t, r)$ 代入方程(33), 分离变量后可得

$$D_2'(t) + 1 + (\lambda_r k_1 - b)D_2(t) - \frac{1}{2}k_1 D_2^2(t) = 0, \quad (36)$$

$$D_2(T) = 0;$$

$$D_1'(t) + (\lambda_r k_2 + a)D_2(t) - \frac{1}{2}k_2 D_2^2(t) = 0, \quad (37)$$

$$D_1(T) = 0.$$

解方程(36)和(37)可得

$$D_2(t) = \frac{n_1 n_2 (1 - \exp\{\sqrt{\Delta_4}(T - t)\})}{n_1 - n_2 \exp\{\sqrt{\Delta_4}(T - t)\}}, \quad (38)$$

$$D_1(t) = \frac{k_2}{k_1} D_2(t) + \frac{ak_1 + bk_2}{k_1} \int_t^T D_2(s) ds - \frac{k_2}{k_1} (T - t). \quad (39)$$

其中

$$\Delta_4 = (\lambda_r k_1 - b)^2 + 2k_1,$$

$$n_{1,2} = \frac{\lambda_r k_1 - b \pm \sqrt{\Delta_4}}{k_1}.$$

观察方程(34)和(15), 可以发现二者同解, 因此有 $K(t, r) = g(t, r)$.

观察方程(35), 可将其解假设为

$$\phi(t, r, l) = D_3(t) + D_4(t)r + D_5(t)l, \quad (40)$$

$$D_3(T) = D_4(T) = D_5(T) = 0.$$

将式(40)代入方程(35), 分离变量后可得

$$D_5'(t) - (\alpha + \sigma_l v)D_5(t) - \frac{1}{2}v^2 = 0, \quad (41)$$

$$D_5(T) = 0;$$

$$D_4'(t) + (k_1 \lambda_r - b - k_1 D_2(t))D_4(t) - \frac{1}{2}k_1 (D_2(t) - \lambda_r)^2 = 0, D_4(T) = 0; \quad (42)$$

$$D_3'(t) + (k_2 \lambda_r + a - k_2 D_2(t))D_4(t) + \alpha \delta D_5(t) - \frac{1}{2}k_2 (D_2(t) - \lambda_r)^2 = 0, \quad (43)$$

$$D_3(T) = 0.$$

求解方程(41)~(43)可得

$$D_5(t) = \frac{v^2}{2(\alpha + \sigma_l v)} (e^{-(\alpha + \sigma_l v)(T-t)} - 1), \quad (44)$$

$$D_4(t) = -\frac{1}{2} \int_t^T k_1 (D_2(s) - \lambda_r)^2 e^{\int_t^s (k_1 \lambda_r - b - k_1 D_2(z)) dz} ds, \quad (45)$$

$$D_3(t) = \frac{k_2}{k_1} D_4(t) + \frac{ak_1 + bk_2}{k_1} \int_t^T D_4(s) ds + \alpha \delta \int_t^T D_5(s) ds. \quad (46)$$

应用式(32)和其各阶偏导数, 可得

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = -\frac{1}{qJ}, \quad \frac{V_{xl}}{V_{xx}} = -\frac{1}{qJ} D_5(t),$$

$$\frac{V_{xr}}{V_{xx}} = D_2(t)(x - K) - K_r - \frac{1}{qJ} (D_2(t) + D_4(t)).$$

综上所述, 可将指数效用下问题(7)的最优投资策略总结如下.

定理2 假设效用函数为 $U(x) = -\frac{1}{q}e^{-qx}$, $q > 0$, 则问题(7)的最优投资策略可表示为

$$\pi_s^*(t) = \frac{1}{q} (v + \sigma_l D_5(t)) J^{-1}(t, r), \quad (47)$$

$$\pi_B^*(t) = \frac{1}{q\varphi_1(t)} (\lambda_r - v\sigma_s - \sigma_l\sigma_s D_5(t) - D_2(t) - D_4(t)) J^{-1}(t, r) + \frac{1}{\varphi_1(t)} (D_2(t)(X(t) - K(t, r)) - K_r). \quad (48)$$

其中: $D_2(t)$ 、 $D_4(t)$ 和 $D_5(t)$ 分别由式(38)、(45)和(44)所确定; $K(t, r)$ 和 K_r 分别由下列两式确定:

$$K(t, r) = -c \int_t^T e^{B_2(s)r + B_1(s)} ds,$$

$$K_r = -c \int_t^T B_2(s) e^{B_2(s)r + B_1(s)} ds.$$

注6 由式(47)和(48)可以看出: 1) 投资于股票的资金数量 $\pi_s^*(t)$ 依赖于参数 a 、 b 、 k_1 、 k_2 、 λ_r 、 v 、 α 、 σ_l 、 q 和 T , 而与 c 、 σ_s 和 δ 无关; 2) 投资于零息票债券的资金数量 $\pi_B^*(t)$ 依赖于参数 a 、 b 、 k_1 、 k_2 、 σ_s 、 λ_r 、 v 、 α 、 σ_l 、 q 、 T 和 c , 而与 δ 无关; 3) 经观察发现, $D_2(t) = \varphi_1(t)$, $D_1(t) = -\varphi_0(t)$, 即 $J(t, r) = B^{-1}(t, T)$, 因此, 指数效用下 $\pi_s^*(t)$ 仅依赖于零息票债券价格过程 $B(t, T)$, 而 $\pi_B^*(t)$ 不仅依赖于 $B(t, T)$, 而且依赖于财富过程 $X(t)$.

注7 由定理1和定理2可以看出, 指数效用与

幂效用下最优投资策略之间的区别: 1) 幂效用下的 $\pi_s^*(t)$ 依赖于当前财富水平 $X(t)$, 而指数效用下的 $\pi_s^*(t)$ 不依赖于 $X(t)$, 这与两种效用函数所表示的对风险的厌恶程度是一致的, 幂效用下投资者对风险的绝对厌恶程度随着瞬时财富水平的增加而递减, 而指数效用下投资者对风险的绝对厌恶程度是一个常数; 2) 与幂效用相比, 指数效用下的 $\pi_B^*(t)$ 其结构和投资数量都发生了很大的变化; 3) 与幂效用下最优投资策略的求解相比, 指数效用下价值函数的结构发生了很大的变化, 这给准确猜想价值函数的结构带来了很大困难。

如果不考虑缴费率 c , 则有 $K(t, r) = 0$ 和 $K_r = 0$. 因而, 定理2的结论将退化为

$$\pi_s^*(t) = \frac{1}{q}(v + \sigma_l D_5(t))J^{-1}(t, r), \quad (49)$$

$$\pi_B^*(t) = \frac{1}{q\varphi_1(t)}(\lambda_r - v\sigma_s - \sigma_l\sigma_s D_5(t) - D_2(t) - D_4(t))J^{-1}(t, r) + \frac{1}{\varphi_1(t)}D_2(t)X(t). \quad (50)$$

与定理2的结论相比, $\pi_s^*(t)$ 是相同的, 而 $\pi_B^*(t)$ 有着本质的区别。

综合定理1和定理2可以发现, 无论管理者对风险的偏好是满足幂效用还是指数效用, 缴费率 c 都对DC型养老金计划的最优资产配置有着本质的影响。

3 算例分析

本节将给出数值算例以分析一些主要模型参数对最优投资策略的影响. 假定参数取值为: $a = 0.018712, b = 0.2339, k_1 = 0.00729316, k_2 = 0, r(0) = 0.05, \sigma_s = 0.84, \lambda_r = 0.46, v = 0.68, \alpha = 0.2, \delta = 0.6, \sigma_l = 0.6, l_0 = 0.2, t = 0, T = 40, X(0) = 100, p = -0.5, q = 0.02, c = 0.15$.

上述取值中, a, b, k_1 和 k_2 的取值来源于文献[3]中对股市利率期限结构的实证结果. 幂效用下, 本文运用定理1的结论分析参数 b, k_1, α 和 T 的变化对最优策略的影响, 具体见图1~图4. 指数效用下, 运用定理2的结论分析参数 σ_l, σ_s, v 和 c 对最优策略的影响, 具体见图5~图8.

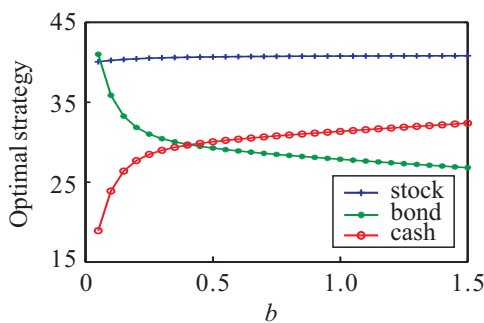


图1 幂效用下 b 对最优投资策略的影响

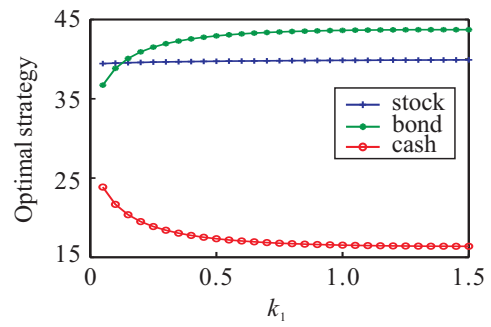


图2 幂效用下 k_1 对最优投资策略的影响

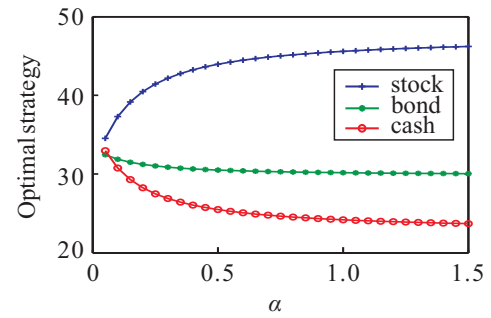


图3 幂效用下 α 对最优投资策略的影响

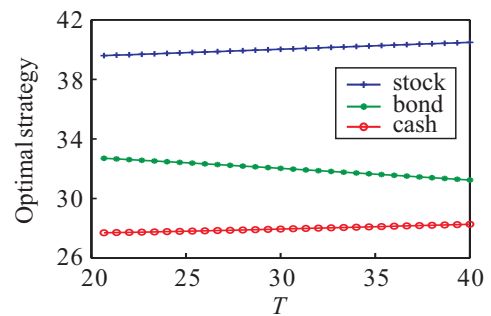


图4 幂效用下 T 对最优投资策略的影响

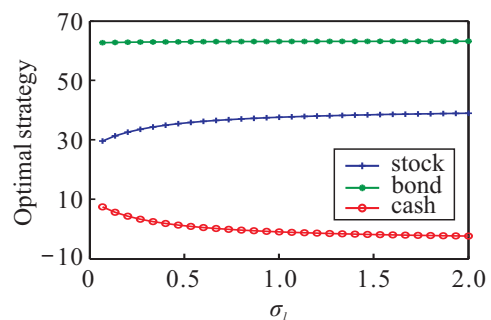


图5 指数效用下 σ_l 对最优投资策略的影响

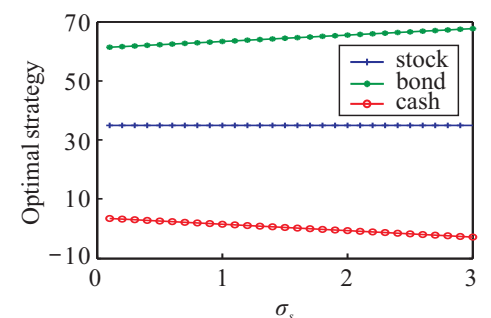


图6 指数效用下 σ_s 对最优投资策略的影响

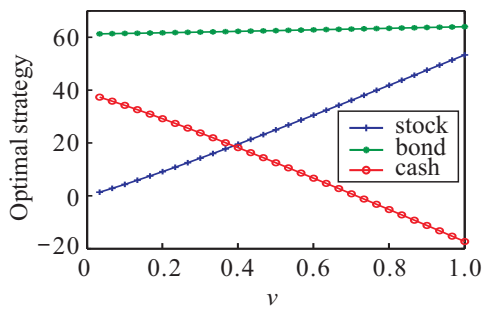


图7 指数效用下 v 对最优投资策略的影响

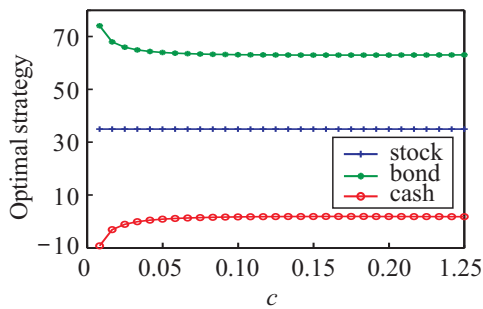


图8 指数效用下 c 对最优投资策略的影响

图1~图4描绘了幂效用下最优投资策略随参数变化的动态变化过程,从中可以得到如下一些重要结论:

1) $\pi_s^*(t)$ 和 $\pi_0^*(t)$ 随参数 b 递增, 而 $\pi_B^*(t)$ 随参数 b 递减. 从参数 b 所代表的经济含义来看, 当参数 b 的值递增时, 利率 $r(t)$ 的期望值随之递减, 这导致利率风险的市场价格随之递减, 即利率风险的风险补偿也随之递减, 这时, 零息票债券的投资收益随之递减, 这意味着基金管理人应减少投资在零息票债券的资金额, 而增加投资在无风险资产上的资金额. 同时, 由于利率的期望值递减导致股票的波动率降低, 基金管理人应逐步增加投资在股票上的资金额.

2) $\pi_s^*(t)$ 和 $\pi_0^*(t)$ 随参数 k_1 递减, 而 $\pi_B^*(t)$ 随参数 k_1 递增. 由方程(2)可以看出, 参数 k_1 决定着利率动态的波动率. 当参数 k_1 的值递增时, 利率的波动率随之递增, 同时导致股票的波动率也随之递增, 这意味着基金管理人应减少投资在股票和零息票债券上的资金数量. 为了对冲利率风险, 基金管理人应逐步增加投资在零息票债券上的资金数量.

3) $\pi_s^*(t)$ 随参数 α 递增, 而 $\pi_B^*(t)$ 和 $\pi_0^*(t)$ 随参数 α 递减. 由方程(4)可以看出, 当参数 α 的值递增时, 波动率 $L(t)$ 的期望值随之递减, 这导致股票波动率随之降低, 此时, 基金管理人更愿意将更多资金投资于股票以获取更多的收益, 同时, 基金管理人应减少投资于零息票债券和无风险资产的资金额.

4) $\pi_s^*(t)$ 和 $\pi_0^*(t)$ 随参数 T 递增, 而 $\pi_B^*(t)$ 随参数 T 递减. 模型中, 参数 T 代表投资期限, T 越小表示投保

人越临近退休. 因此, 投保人在刚开始缴费时 (T 的值比较大), 基金管理人应将更多资金投资于股票和无风险资产; 而随着年龄的增加, 投保人越临近退休 (T 的值比较小), 基金管理人投资于股票和无风险资产的资金将逐步减少, 同时, 应增加投资于零息票债券的资金数量.

图5~图8给出了指数效用下最优投资策略随主要市场参数变化的动态变化过程, 从中可以得出如下重要结论:

1) $\pi_s^*(t)$ 和 $\pi_B^*(t)$ 随参数 σ_l 递增, 而 $\pi_0^*(t)$ 随参数 σ_l 递减. 从本文的结论看, 当参数 σ_l 的波动率增大时, 基金管理人应增加投资于股票和零息票债券上的资金数量, 而减少投资于无风险资产上的资金数量.

2) $\pi_B^*(t)$ 随参数 σ_s 递增, $\pi_0^*(t)$ 随参数 σ_s 递减, 而 $\pi_s^*(t)$ 保持不变. 由方程(3)可以看出, 当参数 σ_s 的值增大时, 由利率波动引起的利率风险将增大, 为了对冲利率风险, 基金管理人应增加投资于零息票债券的资金数量, 而减少投资于无风险的资金数量, 投资于股票的数量保持不变.

3) $\pi_s^*(t)$ 和 $\pi_B^*(t)$ 随参数 v 递增, 而 $\pi_0^*(t)$ 随参数 v 递减. 由方程(3)可以看出, 当参数 v 的值递增时, 股市波动风险的市场价格随之递增, 这导致股票收益率也随之递增. 为了获取更多收益, 基金管理人更愿意将更多资金投资于股票和零息票债券, 同时减少投资于无风险资产的资金数量.

4) $\pi_B^*(t)$ 随参数 c 递减, 而 $\pi_0^*(t)$ 随参数 c 递增, $\pi_s^*(t)$ 则保持不变. 从本文的结论看, 当缴费率 c 较低时, 基金管理人应将大量的资金投资到股票和零息票债券上以获取更多的收益. 随着缴费率的递增, 养老金变得比较富裕, 这时基金管理人变得比较保守, 投资于无风险资产的资产数量将递增, 而购买零息票债券的资金数量将递减, 投资于股票的资金数量保持不变.

4 结论和展望

本文假设利率和股票价格波动率都是随机过程, 在文献[18]的市场模型基础上, 进一步对DC型养老金计划的最优投资策略进行研究, 得到了幂效用和指数效用下最优投资策略的显式解. 通过数值算例分析了利率参数和波动率参数对最优投资策略的影响, 为基金管理人在风险偏好视角下的最优投资决策提供了理论依据. 研究表明: 利率风险、波动风险和缴费率都对DC型养老金计划的投资决策产生了较大的影响, 且不同风险偏好的投资人在确定最优投资策略时对模型参数、财富过程、利率风险和波动率

风险的敏感性也不同。

养老金计划问题正在变得越来越复杂. 首先, 随机收入、保费返还条款、死亡风险和长寿风险也是影响养老金投资的最重要因素, 这些因素的引入会给养老金投资策略的解决带来很大困难; 其次, 养老金投资过程的风险很难准确度量, 其投资过程中应采取的风险准则很难确定, 有待大量的理论和实证研究; 最后, 除均值-方差准则外, 其他风险准则下的投资组合选择理论尚未取得突破性进展, 如 VaR 风险准则或均值-CVaR 风险准则等, 这也给多种风险环境下基于不同风险测度的 DC 型养老金计划的研究带来了很大困难. 这些问题将是本文未来的研究内容。

致谢 衷心感谢审稿专家提出的富有启发性的修改意见!

参考文献(References)

- [1] 谷爱玲, 李仲飞, 曾燕. Ornstein-Uhlenbeck 模型下 DC 养老金计划的最优投资策略[J]. 应用数学学报, 2013, 36(3): 715-726.
(Gu A L, Li Z F, Zeng Y. Optimal investment strategy under Ornstein-Uhlenbeck model for a DC pension plan[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2013, 36(3): 715-726.)
- [2] Boulier J F, Huang S J, Taillard G. Optimal management under stochastic interest rates: The case of a protected defined contribution pension fund[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 28(1): 173-189.
- [3] Deelstra G, Grasselli M, Koehl P F. Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33(1): 189-207.
- [4] Gao J W. Stochastic optimal control of DC pension funds[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 1159-1164.
- [5] 张初兵, 荣喜民. 仿射利率模型下确定缴费型养老金的最优投资[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(5): 1048-1056.
(Zhang C B, Rong X M. Optimal investment for DC pension under the affine interest rate model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(5): 1048-1056.)
- [6] 殷俊, 李媛媛. 基于随机利率和通货膨胀的缴费确定型养老金计划最优资产配置策略[J]. 当代经济科学, 2013, 35(2): 11-20.
(Yin J, Li Y Y. Stochastic interest rate and inflation based optimal asset allocation tactics for defined-contribution pension plans[J]. Modern Economic Science, 2013, 35(2): 11-20.)
- [7] 伍慧玲, 董洪斌. 带有通胀风险和随机收入的确定缴费养老金计划[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(3): 545-558.
(Wu H L, Dong H B. Multi-period mean-variance defined contribution pension management with inflation and stochastic income[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2016, 36(3): 545-558.)
- [8] 常浩, 王春峰, 房振明. 通胀风险下基于 HARA 效用的 DC 型养老金计划[J]. 运筹学学报, 2016, 20(4): 39-51.
(Chang H, Wang C F, Fang Z M. Defined contribution pension fund scheme with HARA preference under inflation risk[J]. Operations Research Transactions, 2016, 20(4): 39-51.)
- [9] Heston S L. A close-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(2): 327-343.
- [10] Kraft H. Optimal portfolios and Heston's stochastic volatility model: An explicit solution for power utility[J]. Quantitative Finance, 2005, 5(3): 303-313.
- [11] Li Z F, Zeng Y, Lai Y Z. Optimal time-consistent investment and reinsurance strategies for insurers under Heston's SV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 50(1): 191-203.
- [12] Zhao H, Rong X M, Zhao Y G. Optimal excess-of-loss reinsurance and investment problem for an insurer with jump-diffusion risk process under the Heston model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 53(3): 504-514.
- [13] 张初兵, 荣喜民, 侯如靖, 等. Heston 模型下确定缴费型养老金的投资组合优化[J]. 系统工程, 2012, 30(12): 39-44.
(Zhang C B, Rong X M, Hou R J, et al. Investment portfolio optimization for defined-contribution pension under a Heston model[J]. Systems Engineering, 2012, 30(12): 39-44.)
- [14] Liu J. Portfolio selection in stochastic environments[J]. The Review of Financial Studies, 2007, 20(1): 1-39.
- [15] Li J Z, Wu R. Optimal investment problem with stochastic interest rate and stochastic volatility: Maximizing a power utility[J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2009, 25(3): 407-420.
- [16] Noh E J, Kim J H. An optimal portfolio model with stochastic volatility and stochastic interest rate[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 375(2): 510-522.
- [17] Chang H, Rong X M. An investment and consumption problem with CIR interest rate and stochastic volatility[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013(1): 1-12.
- [18] Guan G H, Liang Z X. Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rates and stochastic volatility framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 57(1): 58-66.

(责任编辑: 李君玲)