

一种基于对象-语言值决策矩阵的 模糊语言TOPSIS决策方法

任芳玲^{1†}, 孔明明²

(1. 延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000; 2. 西华大学 计算机与软件工程学院, 成都 610039)

摘要: 模糊语言决策方法是决策领域的热点研究内容之一. 比较现有模糊语言决策方法研究中广泛使用的决策矩阵, 提出对象-语言值决策矩阵表示决策专家根据决策属性给出的评价语言信息, 分析对象-语言值决策矩阵在区分明晰、部分未知及犹豫的模糊语言决策问题中的优势; 借鉴经典TOPSIS决策方法及向量运算, 给出基于对象-语言值决策矩阵的正负理想解确定方法以及备选对象与正负理想解的伪距离和贴近度计算方法, 分析伪距离和贴近度的相关性质; 基于2-元组语言表示模型, 提出基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言TOPSIS决策方法. 通过实例分析, 并与已有3种重要的模糊语言决策方法进行比较, 比较结果说明所提出的决策方法可以克服已有决策方法的不足, 是一种可选的模糊语言决策方法.

关键词: 模糊语言决策; 决策矩阵; TOPSIS决策方法; 正负理想解; 2-元组语言表示模型; 伪距离; 贴近度
中图分类号: C934 **文献标志码:** A

A fuzzy linguistic TOPSIS decision making method based on alternatives-linguistic terms decision matrixes

REN Fang-ling^{1†}, KONG Ming-ming²

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China; 2. College of Computer and Software Engineering, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: Fuzzy linguistic decision making methods are hot in decision making. Compared with the decision matrixes which are widely used in fuzzy linguistic decision making methods, alternatives-linguistic terms decision matrixes are provided to represent decision results of experts with respect to attributes, and the advantage of alternatives-linguistic terms decision matrixes in distinguishing linguistic decision making of distinct, partial unknown or hesitant linguistic environments is analyzed. Inspired by the classical TOPSIS decision method and vector operation, the positive and negative ideal solutions based on alternatives-linguistic terms decision matrixes are presented, pseudo-distances and relative closeness between the positive(negative) ideal solution and alternatives are calculated, and their properties are analyzed. Then based on the 2-tuple linguistic represent model, the fuzzy linguistic TOPSIS decision making method based on alternatives-linguistic terms decision matrixes are proposed. An example is given to illustrate the practicality of the proposed method. Compared with three existed important fuzzy linguistic decision making methods, the proposed method can be used to overcome the drawback of the existed method, which is an alternative fuzzy linguistic decision making method.

Keywords: fuzzy linguistic decision making; decision matrix; TOPSIS decision method; positive and negative ideal solutions; 2-tuple linguistic represent model; pseudometric; closeness

0 引言

决策方法本质上是一个选择过程, 即决策者从一组可选的决策对象中选出满意的决策对象. 在实际应用中, 由于刻画决策对象的决策属性来源不同,

导致决策属性值具有不确定性、部分未知等特点, 特别在大数据环境下, 决策对象及其决策属性个数都异常庞大, 为此人们提出了很多决策方法用于解决实际中的各种决策问题^[1-4]. 模糊语言值具有易于

收稿日期: 2017-09-08; 修回日期: 2018-03-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61372187); 延安市科研计划基金项目(2017WZZ-03-02).

责任编委: 董久祥.

作者简介: 任芳玲(1984—), 女, 讲师, 硕士, 从事应用数学及模糊决策的研究; 孔明明(1984—), 男, 硕士, 从事人工智能及决策理论的研究.

[†]通讯作者. E-mail: renfangling203@163.com.

理解且能够刻画不确定性等优点,因此模糊语言决策方法成为决策领域的热点研究内容^[5-8].模糊语言决策方法的核心是模糊语言值处理方法,该方法最早由Zadeh提出,即基于模糊集的词计算(Computing with words)^[9].为了克服基于模糊集的词计算方法的不足^[2-3,5],Herrera等^[10]提出了2-tuple模糊语言表示模型,即模糊语言值表示为 (s_i, α) .其中: s_i 属于某一初始模糊语言项集 $S = \{s_0, \dots, s_g\}$, $\alpha \in [-0.5, 0.5]$ 为偏差范围.例如,设 $S = \{s_0(\text{差}), s_1(\text{中}), s_2(\text{好})\}$,某老师评价某学生的学习成绩为中偏上可使用模糊语言值 $(s_1, 0.3)$,即该学生学习成绩为中还多0.3.形式地,2-tuple模糊语言表示模型提供了模糊语言值与其下标之间的转换,即 $\Delta: [0, g] \rightarrow \{(s_i, \alpha) | s_i \in S, \alpha \in [-0.5, 0.5]\}$.其中:对于任意 $g' \in [0, g]$, $i = \text{round}(g')$,且 $\alpha = g' - i$, round为四舍五入算子.通过 Δ 可将可比模糊语言值的序及运算转换为模糊语言值下标(即自然数)的序及运算,因此2-tuple模糊语言表示具有计算简单、易于理解且无信息损失等优点.为了进一步简化模糊语言值的运算,Xu等^[2,7,11-16]对2-tuple模糊语言表示模型及其语言决策方法进行了研究,目前基于2-tuple模糊语言表示模型的决策方法是研究最广的模糊语言决策方法.考虑到专家的知识背景、语言决策信息的完整性等,专家根据决策属性对决策对象进行模糊语言值评价时会犹豫不决,Rodriguez等^[5]提出了犹豫模糊语言项集刻画专家的“犹豫不决”,即一个犹豫模糊语言项集 H 是初始模糊语言项集 S 中的一个有限有序相继子集,如上例中 $H = \{s_1, s_2\}$ 是一个犹豫模糊语言项集.随后,犹豫模糊语言项集的运算、距离以及基于犹豫模糊语言项集的模糊语言决策方法吸引了众多学者去研究^[8,17-21].综合而言,在模糊语言决策方法研究中,不同的评价语言信息对应不同的模糊语言决策方法,本质上,不同类型的评价语言刻画了决策中不同类型的不确定性.

本文提出模糊语言决策问题的对象-语言值决策矩阵表示,分析对象-语言值决策矩阵可用于表示清晰的模糊语言、部分未知的模糊语言和犹豫模糊语言决策问题.进一步,借鉴经典TOPSIS决策方法,提出基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言TOPSIS决策方法.

1 预备知识

本节简单介绍TOPSIS决策方法及在模糊语言决策中广泛使用的决策矩阵. TOPSIS方法^[4]是一种重要的多属性决策方法,且被广泛应用于众多决策领域.经典TOPSIS决策方法的核心思想是,满意的选

择对象应该满足距离正理想解最近且距离负理想解最远.基于TOPSIS决策方法的决策过程描述为如下5个步骤:

- 1) 归一化决策矩阵;
- 2) 构建加权归一化决策矩阵;
- 3) 确定正负理想解;
- 4) 计算备选对象与正负理想解的距离及相对贴近度;
- 5) 备选对象排序并获取满意的选择对象.

经典TOPSIS决策方法主要针对数值型的决策矩阵,实际中决策属性源于多方面,数值型的决策矩阵需要归一化处理,正负理想解由归一化决策矩阵决定,不同的正负理想解决定了不同的距离及相关贴近度计算.目前,学者们已对TOPSIS决策方法进行了广泛深入的研究,并将该方法推广应用到各种语言决策方法中^[16,20-22].

一般地,一个模糊语言决策问题描述如下:决策专家组 $B = \{d_1, \dots, d_m\}$ 根据决策属性 $C = \{c_1, \dots, c_r\}$ 使用 $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ 中的模糊语言值评价决策对象 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$,根据决策专家提供的评价语言信息,模糊语言决策方法提供每个决策对象的语言综合评价结果并用于选择满意的决策对象.在现有语言决策方法中,决策专家的评价语言信息使用决策矩阵表示如下:

$$D_{m'} = (e_{jk}^i)_{n \times r} = \begin{matrix} & c_1 & \cdots & c_r \\ \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} e_{11}^{m'} & \cdots & e_{1r}^{m'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1}^{m'} & \cdots & e_{nr}^{m'} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

其中:该矩阵的行表示决策对象的评价语言信息,列表示关于决策属性的评价语言信息,任意 $e_{n'r'}^{m'} \in S(m' = 1, \dots, m, n' = 1, \dots, n, r' = 1, \dots, r)$ 表示专家 $d_{m'}$ 根据 $c_{r'}$ 使用模糊语言值 $e_{n'r'}^{m'}$ 评价决策对象 $a_{n'}$.本文称决策矩阵 $D_{m'}$ 为对象-属性决策矩阵.

例1 专家 $B = \{d_1, d_2\}$ 根据决策属性 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ 使用 $S = \{s_0(\text{极差}), s_1(\text{差}), s_2(\text{中}), s_3(\text{好}), s_4(\text{优秀})\}$ 中的模糊语言值评价3个对象 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$,假设 B 和 C 的权重分别为 $v_1 = 0.3$ 、 $v_2 = 0.7$ 和 $w_1 = 0.2$ 、 $w_2 = 0.5$ 、 $w_3 = 0.3$,两个专家的对象-属性决策矩阵分别为

$$D_1 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} s_2 & s_4 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \\ s_3 & s_3 & s_2 \end{bmatrix} \end{matrix}, D_2 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} s_3 & s_3 & s_2 \\ s_2 & s_2 & s_4 \\ s_4 & s_1 & s_3 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

基于 D_1 和 D_2 ,采用2-tuple模糊语言加权聚合算

子^[10],该决策问题的两种决策过程描述如下:

1) 先聚合属性后聚合专家的评价语言信息

$$E_{d_1} = f(D_1) = \begin{bmatrix} w_1 s_2 + w_2 s_4 + w_3 s_3 \\ w_1 s_2 + w_2 s_3 + w_3 s_4 \\ w_1 s_3 + w_2 s_3 + w_3 s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta(0.2 \times 2 + 0.5 \times 4 + 0.3 \times 3) \\ \Delta(0.2 \times 2 + 0.5 \times 3 + 0.3 \times 4) \\ \Delta(0.2 \times 3 + 0.5 \times 3 + 0.3 \times 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{3.3} \\ s_{3.1} \\ s_{2.7} \end{bmatrix},$$

$$E_{d_2} = f(D_2) = \begin{bmatrix} s_{2.7} \\ s_{2.6} \\ s_{2.2} \end{bmatrix},$$

$$E = f(E_{d_1}, E_{d_2}) = \begin{bmatrix} v_1 s_{3.3} + v_2 s_{2.7} \\ v_1 s_{3.1} + v_2 s_{2.6} \\ v_1 s_{2.7} + v_2 s_{2.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{2.88} \\ s_{2.75} \\ s_{2.35} \end{bmatrix};$$

2) 先聚合专家后聚合属性的评价语言信息

$$E_{c_1} = f\left(\begin{bmatrix} s_2 & s_3 \\ s_2 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 s_2 + v_2 s_3 \\ v_1 s_2 + v_2 s_2 \\ v_1 s_3 + v_2 s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{2.7} \\ s_2 \\ s_{3.7} \end{bmatrix},$$

$$E_{c_2} = f\left(\begin{bmatrix} s_4 & s_3 \\ s_3 & s_2 \\ s_3 & s_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} s_{3.3} \\ s_{2.3} \\ s_{1.6} \end{bmatrix},$$

$$E_{c_3} = f\left(\begin{bmatrix} s_3 & s_2 \\ s_4 & s_4 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} s_{2.3} \\ s_{4.0} \\ s_{2.7} \end{bmatrix},$$

$$E = f(E_{c_1}, E_{c_2}, E_{c_3}) = \begin{bmatrix} s_{2.88} \\ s_{2.75} \\ s_{2.35} \end{bmatrix}.$$

由1)或2)中 $s_{2.88} > s_{2.75} > s_{2.35}$ 可知,对象排序结果为 $a_1 \succ a_2 \succ a_3$,即 a_1 为满意的选择对象.

通过例1可以看出对象-属性决策矩阵有如下优点:

1) 各决策专家的评价语言信息统一地表示在对象-属性决策矩阵中,存储简单;

2) 各决策专家提供行列一致的对象-属性决策矩阵,且评价语言信息一致的情况下,便于选择语言聚合算子并聚合评价语言信息.

然而,在决策专家、对象或属性数量特别大的决策环境下,对象-属性决策矩阵存在如下不足:

1) 对象-属性决策矩阵变成高维矩阵,其相应的运算或分析的计算量成指数增长;

2) 考虑到不同的教育经历、文化背景、语言习惯等,专家可能使用不同粒度的模糊语言值或提供各不

相同的评价语言类型,如2-tuple模糊语言^[10]、犹豫模糊语言项集^[5]、概率语言值^[23]、语言直觉模糊集^[24]、离散模糊数语言值^[25]或模糊语言多集^[26]等,这给语言聚合算子的选择带来困难.

2 对象-语言值决策矩阵

为了克服对象-属性决策矩阵的上述不足,探讨大规模决策环境下的模糊语言决策新方法,本节提出一种可选的决策矩阵表示,即对象-语言值决策矩阵,并分析对象-语言值决策矩阵在区分明晰、部分未知及犹豫的评价语言信息中的优势.借鉴问卷调查的学术思想,可将决策专家根据决策属性使用模糊语言值评价对象 $a_{n'}$ 的过程表示为如下矩阵:

$$D_{m'r'} = \begin{matrix} & s_0 & \cdots & s_g \\ \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} j_{11}^{m'r'} & \cdots & j_{1g}^{m'r'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{n1}^{m'r'} & \cdots & j_{ng}^{m'r'} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (2)$$

其中任意 $j_{n'i}^{m'r'} \in \{0, 1\}$, $(m' = 1, \dots, m, r' = 1, \dots, r, n' = 1, \dots, n, i = 0, \dots, g)$. 若 $j_{n'i}^{m'r'} = 1$,则表示专家 $d_{m'}$ 根据决策属性 $c_{r'}$ 使用模糊语言值 s_i 评价决策对象 $a_{n'}$. 考虑到决策专家可能会使用2-tuple模糊语言表示, $D_{m'r'}$ 可进一步扩展为

$$D_{m'r'} = \begin{matrix} & s_0 & \cdots & s_g \\ \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} (j_{11}^{m'r'}, \alpha_{11}) & \cdots & (j_{1g}^{m'r'}, \alpha_{1g}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (j_{n1}^{m'r'}, \alpha_{n1}) & \cdots & (j_{ng}^{m'r'}, \alpha_{ng}) \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

其中:当 $j_{n'i}^{m'r'} = 1$ 时, $\alpha_{n'i} \in [-0.5, 0.5]$ 表示使用模糊语言值 s_i 评价对象 $a_{n'}$ 时的偏差,这意味着评价决策对象 $a_{n'}$ 的模糊语言值被扩展为 $[0, g]$ 中的任意2-tuple模糊语言值 $s_{i+\alpha_{n'i}}$,本文称决策矩阵 $D_{m'r'}$ 为对象-语言值决策矩阵. 与对象-属性决策矩阵 $D_{m'}$ 相比较,对象-语言值决策矩阵 $D_{m'r'}$ 具有如下优点:

1) $D_{m'r'}$ 是一个0-1矩阵,特别地,实际应用中用于评价的模糊语言值不会太多, $D_{m'r'}$ 的列相对固定. 即使决策专家使用不同粒度的模糊语言值集合,通过多粒度语言值转化方法^[3],可将 $D_{m'r'}$ 统一成同行同列的0-1矩阵. 由于 $D_{m'r'}$ 的规模由行(决策对象)确定,降低了决策矩阵的维数.

2) 在 $D_{m'r'}$ 中,评价语言信息可用0-1向量表示,这提供了使用0-1向量运算分析模糊评价语言信息的可能性.

从粒计算的角度, $D_{m'}$ 和 $D_{m'r'}$ 在决策属性上采用了不同的信息粒度描述决策对象的评价语言信息, $D_{m'}$ 以决策属性为信息粒度,而 $D_{m'r'}$ 以决策属

性的语言值为信息粒度. 理论上, $D_{m'}$ 和 $D_{m'r'}$ 可相互转化, 但在实际应用中, $D_{m'}$ 和 $D_{m'r'}$ 各有各的优势. 本文特别分析 $D_{m'r'}$ 在区分明晰、部分未知以及犹豫的评价语言信息中的优势.

性质1 对于任一语言决策问题的 $D_{m'r':1}$ 若 $\forall n' \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=0}^g j_{n'i}^{m'r'} = 1$, 则决策专家 $d_{m'}$ 根据决策属性 $c_{r'}$ 提供明晰的模糊语言值评价该决策对象, 即 $d_{m'}$ 提供唯一的模糊语言值评价该决策对象 $a_{n'}$; 2) 若 $\exists n' \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=0}^g j_{n'i}^{m'r'} = 0$, 则 $d_{m'}$ 根据 $c_{r'}$ 提供未知的模糊语言值评价该决策对象, 即 $d_{m'}$ 不能提供模糊语言值评价 $a_{n'}$; 3) 若 $\exists n' \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=0}^g j_{n'i}^{m'r'} > 1$, 则 $d_{m'}$ 根据 $c_{r'}$ 提供犹豫模糊语言集合评价 $a_{n'}$.

证明 1) 由 $j_{n'i}^{m'r'} \in \{0, 1\}, \forall n' \in \{1, \dots, n\}$ 及 $\sum_{i=0}^g j_{n'i}^{m'r'} = 1$ 可知, $D_{m'r'}$ 中每一行有唯一一个 $j_{n'i}^{m'r'} = 1$, 则依据式(2), $d_{m'}$ 根据 $c_{r'}$ 提供 $j_{n'i}^{m'r'}$ 对应的模糊语言值 $s_{i+\alpha_{n'i}}$ 评价 $a_{n'}$. 2) 若 $\exists n' \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=0}^g j_{n'i}^{m'r'} = 0$, 则依据式(2), 在模糊语言值集合中, $d_{m'}$ 根据 $c_{r'}$ 不能提供模糊语言值评价该决策对象, 即 $a_{n'}$ 的语言评价结果未知. 3) 若 $\exists n' \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=0}^g j_{n'i}^{m'r'} > 1$, 依据式(2), $D_{m'r'}$ 中第 n' 行有多于一个 $j_{n'i}^{m'r'} = 1$, 即 $d_{m'}$ 根据 $c_{r'}$ 提供犹豫模糊语言集合 $\{s_{i+\alpha_{n'i}} | j_{n'i}^{m'r'} = 1\}$ 评价 $a_{n'}$. $\square$

使用不同的语言聚合算子聚合 2-tuple 模糊语言值、未知的模糊语言值或犹豫模糊语言集合, 性质1提供了快速判断评价语言信息是 2-tuple、未知的模糊语言值或犹豫模糊语言集合的方法.

例2 令决策对象 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, 决策属性 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, 初始模糊语言项集 $S = \{s_0(\text{极差}), s_1(\text{较差}), s_2(\text{差}), s_3(\text{中}), s_4(\text{好}), s_5(\text{较好}), s_6(\text{优秀})\}$, 专家 d_m 提供对象-语言值决策矩阵如下:

$$D_{m1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{m2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{m3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在 D_{m1} 中, 由于 $\sum_{i=0}^6 j_{1i}^{m1} = 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 =$

$3 > 1$, d_m 根据 c_1 使用犹豫模糊语言项集 $\{s_1, s_2, s_3\}$ 评价 a_1 . 在 D_{m2} 中, 因为 $\sum_{i=0}^6 j_{3i}^{m2} = 0$, 对于 c_2 , d_m 无法提供 a_3 的模糊语言值评价结果. 在 D_{m3} 中, d_m 根据 c_3 提供明晰的模糊语言评价结果 s_5 , s_1 和 s_4 分别评价 a_1 , a_2 和 a_3 .

3 一种模糊语言TOPSIS决策方法

一种基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言TOPSIS决策方法由以下步骤构成:

- 1) 构建决策专家根据决策属性提供的对象-语言值决策矩阵;
- 2) 基于对象-语言值决策矩阵, 提出确定决策问题的正负理想解方法;
- 3) 提出决策对象与正负理想解的距离或相对贴近度计算方法;
- 4) 决策对象排序并获取满意的决策对象.

基于初始模糊语言项集, 决策专家可提供对象-语言值决策矩阵 $D_{m'r'}$. 本文集中解决上述4个步骤中的步骤2)~步骤4), 其中步骤2)和步骤3)是本节的主要内容.

3.1 基于对象-语言值决策矩阵的正负理想解

在对象-语言值决策矩阵 $D_{m'r'}$ 中, $d_{m'}$ 根据 $c_{r'}$ 提供的 $a_{n'}$ 的评价结果也可用如下 0-1 向量表示:

$$D_{m'r'}^{n'} = (j_{n'1}^{m'r'}, \dots, j_{n'g}^{m'r'}). \quad (3)$$

借鉴向量运算及已有理想解的确定方法^[4,24], 本文给出决策问题关于 $c_{r'}$ 的正负理想解分别为

$$\text{PIS}_{m'r'} = \bigvee_{n'=1}^n D_{m'r'}^{n'} = \left(\bigvee_{n'=1}^n j_{n'1}^{m'r'}, \dots, \bigvee_{n'=1}^n j_{n'g}^{m'r'} \right),$$

$$\text{NIS}_{m'r'} = \bigwedge_{n'=1}^n D_{m'r'}^{n'} = \left(\bigwedge_{n'=1}^n j_{n'1}^{m'r'}, \dots, \bigwedge_{n'=1}^n j_{n'g}^{m'r'} \right).$$

据此, $d_{m'}$ 提供关于所有决策属性的正负理想解为

$$\text{PIS}_{m'} = \left(\bigvee_{n'=1}^n D_{m'1}^{n'}, \dots, \bigvee_{n'=1}^n D_{m'r}^{n'} \right), \quad (4)$$

$$\text{NIS}_{m'} = \left(\bigwedge_{n'=1}^n D_{m'1}^{n'}, \dots, \bigwedge_{n'=1}^n D_{m'r}^{n'} \right). \quad (5)$$

令决策专家组的权重为 $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, 通过综合获得决策专家组提供的正负理想解为

$$\text{PIS} = \left(\sum_{m'=1}^m (v_{m'} \bigvee_{n'=1}^n D_{m'1}^{n'}), \dots, \sum_{m'=1}^m (v_{m'} \bigvee_{n'=1}^n D_{m'r}^{n'}) \right),$$

$$\text{NIS} = \left(\sum_{m'=1}^m (v_{m'} \bigwedge_{n'=1}^n D_{m'n'}), \dots, \sum_{m'=1}^m (v_{m'} \bigwedge_{n'=1}^n D_{m'r'}) \right).$$

例3 例1中对象-属性决策矩阵 D_1 和 D_2 确定的对象-语言值决策矩阵如下:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ D_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ D_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据决策专家 d_1 提供的 D_{11} , D_{12} 和 D_{13} ,分别获得决策属性 c_1 , c_2 和 c_3 的正负理想解为 $\text{PIS}_{11} = (0, 0, 1, 0, 0) \vee (0, 0, 1, 0, 0) \vee (0, 0, 0, 1, 0) = (0, 0, 1, 1, 0)$, $\text{PIS}_{12} = (0, 0, 0, 1, 1)$, $\text{PIS}_{13} = (0, 0, 1, 0, 0)$; $\text{NIS}_{11} = (0, 0, 1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1, 0, 0) \wedge (0, 0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\text{NIS}_{12} = \text{NIS}_{13} = (0, 0, 0, 0, 0)$. 因此, d_1 根据 c_1 , c_2 和 c_3 提供的正负理想解为

$$\begin{aligned} \text{PIS}_1 &= ((0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 0)), \\ \text{NIS}_1 &= ((0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0)). \end{aligned}$$

类似可得 d_2 提供的正负理想解为

$$\begin{aligned} \text{PIS}_2 &= ((0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 1)), \\ \text{NIS}_2 &= ((0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0)). \end{aligned}$$

例1中 d_1 和 d_2 的权重为 $v_1 = 0.3$ 和 $v_2 = 0.7$, 据此 d_1 和 d_2 根据 c_1 , c_2 和 c_3 提供的正负理想解为 $\text{PIS} = 0.3\text{PIS}_1 + 0.7\text{PIS}_2 = ((0, 0, 1, 1, 0.7), (0, 0.7, 0.7, 1, 0.3), (0, 0, 1, 1, 1))$ 和 $\text{NIS} = 0.3\text{NIS}_1 + 0.7\text{NIS}_2 = ((0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0))$.

3.2 决策对象之间的伪距离和贴适度

本节给出决策对象与正负理想解之间的伪距离和贴适度计算公式. 在 $D_{m'r'}$ 中, 对于任意 $a_{n'}$ 和 $a_{n''}$, 定义

$$\begin{aligned} E_{m'r'}^{n'n''} &= \|D_{m'r'}^{n'} - D_{m'r'}^{n''}\| = \\ &= \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}|). \end{aligned}$$

定理1 在任一对象-语言值决策矩阵中, 对于任意决策对象 $a_{n'}$, $a_{n''}$ 和 $a_{n'''}$: 1) $E_{m'r'}^{n'n''} \geq 0$; 2) $E_{m'r'}^{n'n''} = E_{m'r'}^{n''n'}$; 3) $E_{m'r'}^{n'n''} \leq E_{m'r'}^{n'n'''} + E_{m'r'}^{n''n'''}; 4) 0 \leq E_{m'r'}^{n'n''} \leq \frac{g(g+1)}{2}$.

证明 1) 因为任一 $|j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}| \geq 0$, 所以任意

$$E_{m'r'}^{n'n''} = \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}|) \geq 0.$$

2) 因为任意 $|j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}| = |j_{n''i}^{m'r'} - j_{n'i}^{m'r'}|$, 所以 $E_{m'r'}^{n'n''} = \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}|) = \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n''i}^{m'r'} - j_{n'i}^{m'r'}|) = \|D_{m'r'}^{n''} - D_{m'r'}^{n'}\| = E_{m'r'}^{n''n'}$.

3) 因为任意 $|j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}| = |j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'} + j_{n''i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}| \leq |j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}| + |j_{n''i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}|$, 即 $E_{m'r'}^{n'n''} = \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}|) \leq \sum_{i=0}^g (i \times (|j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}| + |j_{n''i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}|)) = \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}|) + \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n''i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}|) = E_{m'r'}^{n'n''} + E_{m'r'}^{n''n''}$.

4) 由任意 $j_{n'i}^{m'r'} \in \{0, 1\}$ 得 $0 \leq |j_{n'i}^{m'r'} - j_{n''i}^{m'r'}| \leq 1$, 因此 $0 \leq E_{m'r'}^{n'n''} \leq \sum_{i=0}^g i = \frac{g(g+1)}{2}$. $\square$

定理1的1)~3)表明 $E_{m'r'}^{n'n''}$ 是对象 $a_{n'}$ 和 $a_{n''}$ 之间的一个伪距离. 特别地, 当 $E_{m'r'}^{n'n''}$ 中 $D_{m'r'}^{n'}$ 为 $\text{PIS}_{m'r'}$ 或 $\text{NIS}_{m'r'}$ 时, $E_{m'r'}^{n'n''}$ 表示对象 $a_{n'}$ 与其正负理想解之间的伪距离, 即

$$\begin{aligned} E_{m'r'}^{n'} &= \|D_{m'r'}^{n'} - \text{PIS}_{m'r'}\| = \\ &= \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - \bigvee_{n'=1}^n j_{n'i}^{m'r'}|), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F_{m'r'}^{n'} &= \|D_{m'r'}^{n'} - \text{NIS}_{m'r'}\| = \\ &= \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - \bigwedge_{n'=1}^n j_{n'i}^{m'r'}|). \end{aligned} \quad (7)$$

令属性 C 的权重为 $W = \{w_1, \dots, w_r\}$, 利用加权平均算子, 式(6)和(7)可推广为所有决策属性确定的决策对象与决策专家的正负理想解之间的伪距离, 即

$$\begin{aligned} E_{m'}^{n'} &= \sum_{r'=1}^r \left(w_{r'} \times \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - \bigvee_{n'=1}^n j_{n'i}^{m'r'}|) \right), \\ F_{m'}^{n'} &= \sum_{r'=1}^r \left(w_{r'} \times \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - \bigwedge_{n'=1}^n j_{n'i}^{m'r'}|) \right). \end{aligned}$$

性质2 在对象-语言值决策矩阵中, 若属性 C 的权重为 $W = \{w_1, \dots, w_r\}$, 则: 1) $\min\{E_{m'}^{n'_1}, \dots, E_{m'}^{n'_r}\} \leq E_{m'}^{n'} \leq \max\{E_{m'}^{n'_1}, \dots, E_{m'}^{n'_r}\}$; 2) $\min\{F_{m'}^{n'_1}, \dots, F_{m'}^{n'_r}\} \leq F_{m'}^{n'} \leq \max\{F_{m'}^{n'_1}, \dots, F_{m'}^{n'_r}\}$.

证明 1) 令 $a = \min\{E_{m'}^{n'_1}, \dots, E_{m'}^{n'_r}\}$, 则 $E_{m'}^{n'} = \sum_{r'=1}^r (w_{r'} \times \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - \bigvee_{n'=1}^n j_{n'i}^{m'r'}|)) \geq \sum_{r'=1}^r (w_{r'} \times a) = a \times \sum_{r'=1}^r w_{r'} = a$. 令 $b = \max\{E_{m'}^{n'_1}, \dots, E_{m'}^{n'_r}\}$, 则 $E_{m'}^{n'} \leq b \times \sum_{r'=1}^r w_{r'} = b$. 同理可证2)成

立. □

性质2表明, $E_{m'}^{n'}$ 和 $F_{m'}^{n'}$ 分别介于各决策属性对应的最小伪距离和最大伪距离之间. 根据TOPSIS决策方法的核心思想: 满意的决策对象满足距离负理想解最远且距离正理想解最近, $E_{m'}^{n'}$ 和 $F_{m'}^{n'}$ 可用于选择满意的决策对象, 即基于决策专家 $d_{m'}$ 提供的对象-语言值决策矩阵, 满意的决策对象 $a_{n'}$ 满足 $E_{m'}^{n'} = \min\{E_{m'}^1, \dots, E_{m'}^n\}$ 和 $F_{m'}^{n'} = \max\{F_{m'}^1, \dots, F_{m'}^n\}$. 本文根据 $a_{n'}$ 与正负理想解之间的伪距离, 提出 $a_{n'}$ 与正负理想解之间的相对贴进度, 用于快速选择满意的决策对象. 令 $E_{m'}^- = \min\{E_{m'}^1, \dots, E_{m'}^n\}$ 且 $F_{m'}^+ = \max\{F_{m'}^1, \dots, F_{m'}^n\}$, 则决策对象 $a_{n'}$ 与正负理想解之间的相对贴进度为

$$R(a_{n'}) = \frac{1}{2} \left(\frac{E_{m'}^-}{E_{m'}^{n'}} + \frac{F_{m'}^{n'}}{F_{m'}^+} \right). \quad (8)$$

性质3 在任一对象-语言值决策矩阵中, 决策对象 $a_{n'}$ 的贴进度满足: 1) $R(a_{n'})$ 关于 $E_{m'}^{n'}$ 单调递减; 2) $R(a_{n'})$ 关于 $F_{m'}^{n'}$ 单调递增; 3) 当 $E_{m'}^{n'} = E_{m'}^-$ 且 $F_{m'}^{n'} = F_{m'}^+$ 时, $R(a_{n'}) = 1$.

证明 1) 不失一般性, 假设 $a_{n'}$ 和 $a_{n''}$ 到负理想解的距离相等, 即 $F_{m'}^{n'} = F_{m'}^{n''}$, 但 $E_{m'}^{n'} \leq E_{m'}^{n''}$, 根据式(8), $R(a_{n'}) - R(a_{n'') = \frac{1}{2} \left(\frac{E_{m'}^-}{E_{m'}^{n'}} - \frac{E_{m'}^-}{E_{m'}^{n''}} \right) = \frac{E_{m'}^- (E_{m'}^{n''} - E_{m'}^{n'})}{2E_{m'}^{n'} E_{m'}^{n''}} \geq 0$, 即 $R(a_{n'}) \geq R(a_{n'')$. 同理可证2)成立. 根据式(8), 当 $E_{m'}^{n'} = E_{m'}^-$ 且 $F_{m'}^{n'} = F_{m'}^+$ 时, $R(a_{n'}) = 1$ 成立. □

根据性质3的1)和2), $R(a_{n'})$ 越大, 则 $E_{m'}^{n'}$ 越小且 $F_{m'}^{n'}$ 越大, 这与TOPSIS决策方法的核心思想一致. 因此, 选择满意的决策对象可替换为

$$R(a_{n'}) = \max\{R(a_1), \dots, R(a_n)\}. \quad (9)$$

当考虑决策专家组及其权重时, $E_{m'}^{n'}$ 和 $F_{m'}^{n'}$ 推广为如下决策对象与所有决策专家的正负理想解之间的伪距离:

$$E^{n'} = \sum_{m'=1}^m \left(v_{m'} \times \left(\sum_{r'=1}^r \left(w_{r'} \times \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - \bigvee_{n'=1}^n j_{n'i}^{m'r'}|) \right) \right) \right),$$

$$F^{n'} = \sum_{m'=1}^m \left(v_{m'} \times \left(\sum_{r'=1}^r \left(w_{r'} \times \sum_{i=0}^g (i \times |j_{n'i}^{m'r'} - \bigwedge_{n'=1}^n j_{n'i}^{m'r'}|) \right) \right) \right).$$

根据性质2可得关于 $E^{n'}$ 和 $F^{n'}$ 的如下推论.

推论1 在决策专家组提供的对象-语言值决策矩阵中, 若决策专家组 B 的权重为 $V = \{v_1, \dots,$

$v_m\}$, 属性 C 的权重为 $W = \{w_1, \dots, w_r\}$, 则:

- 1) $\min\{E_1^{n'}, \dots, E_m^{n'}\} \leq E^{n'} \leq \max\{E_1^{n'}, \dots, E_m^{n'}\}$;
- 2) $\min\{F_1^{n'}, \dots, F_m^{n'}\} \leq F^{n'} \leq \max\{F_1^{n'}, \dots, F_m^{n'}\}$.

例4 在例3中, 决策专家 d_1 和决策属性 c_1 确定的决策对象与正负理想解 PIS_{11} 和 NIS_{11} 的伪距离为 $E_{11}^1 = \|D_{11}^1 - PIS_{11}\| = 3$ 和 $F_{11}^1 = \|D_{11}^1 - NIS_{11}\| = 2$. 根据决策属性 c_1 、 c_2 和 c_3 的权重 $w_1 = 0.2$ 、 $w_2 = 0.5$ 和 $w_3 = 0.3$, 决策属性 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ 确定的 a_1 与 d_1 的正负理想解之间的伪距离为

$$E_1^1 = 0.2 \times 3 + 0.5 \times 3 + 0.3 \times 6 = 3.9,$$

$$F_1^1 = 0.2 \times 2 + 0.5 \times 4 + 0.3 \times 3 = 3.3.$$

类似可得决策对象 a_1 与 d_2 的正负理想解的伪距离. 若考虑决策专家组的权重 $v_1 = 0.3$ 和 $v_2 = 0.7$, 可分别得到决策对象与 B 的正负理想解的距离 $E^{n'}$ 和 $F^{n'}$ (见表1). 通过式(8)、 $E^{n'}$ 和 $F^{n'}$, 可计算各决策对象与正负理想解之间的相对贴进度 $R(a_{n'})$ (见表1). 根据贴进度, 决策对象的排序为 $a_1 \succ a_2 \succ a_3$, 因此 a_1 为满意的选择对象.

表1 备选对象的评价结果与正负理想解的距离

备选对象	a_1	a_1	a_3
$E_1^{n'}$	3.9	4.1	4.7
$F_1^{n'}$	3.3	3.1	2.7
$E_2^{n'}$	4.8	4.9	5.3
$F_2^{n'}$	2.7	2.6	2.2
$E^{n'}$	4.53	4.66	5.12
$F^{n'}$	2.88	2.75	2.35
$R(a_{n'})$	1	0.96	0.85

由表1的结果可以看出: 本文提出的基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言TOPSIS决策方法的结果与例1的决策结果相同. 同时注意到, $F^{n'}$ 的结果恰好是例1模糊语言值决策结果的下标, 事实上, 如果负理想解为零向量, 则决策对象与负理想解的距离退化为2-tuple模糊语言值下标的聚合算子, 利用2-tuple模糊语言表示模型的转换函数 Δ , 该距离与2-tuple模糊语言聚合算子等价. 从这个角度看, 本文基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言TOPSIS决策方法是基于2-tuple模糊语言聚合算子决策方法的推广.

4 实例分析

本节利用一个具体实例详细描述基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言TOPSIS决策方法的决策过程, 并与Rodriguez等的方法^[5]、Wei等的方法^[19]和Lee等的方法^[21]进行比较.

例5 令决策对象 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, 决策属性 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, 初始模糊语言项集 $S = \{s_0(\text{极差}), s_1(\text{较差}), s_2(\text{差}), s_3(\text{中}), s_4(\text{好}), s_5(\text{较好}), s_6(\text{优秀})\}$. 假设 C 权重为 $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$, 专家提供的对象-属性决策

矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} \{s_0, s_1, s_2\} & \{s_4, s_5\} & \{s_4\} \\ \{s_2, s_3\} & \{s_3\} & \{s_0, s_1, s_2\} \\ \{s_4, s_5, s_6\} & \{s_1, s_2\} & \{s_4, s_5, s_6\} \end{bmatrix}.$$

利用本文提出的基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言 TOPSIS 决策方法解决该决策问题,具体决策过程描述如下:

1) 根据对象-属性决策矩阵,构建如下对象-语言值决策矩阵:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

在 D_1 中,第一行满足 $\sum_{i=0}^6 j_{1i}^1 = 1+1+1+0+0+0+0 = 3 > 1$, 因此本例决策问题是一个基于犹豫模糊语言项集的多属性决策问题.

2) 基于对象-语言值决策矩阵 D_1 、 D_2 和 D_3 ,确定决策属性 c_1 、 c_2 和 c_3 分别对应的正负理想解为

$$\begin{aligned} \text{PIS}_1 &= (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \vee (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0) \vee \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1) = \\ &\quad (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \\ \text{PIS}_2 &= (0, 1, 1, 1, 1, 1, 0), \\ \text{PIS}_3 &= (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1), \\ \text{NIS}_1 &= (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \wedge (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0) \wedge \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1) = \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \text{NIS}_2 &= \text{NIS}_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

因此决策专家提供的正负理想解为 $\text{PIS} = (\text{PIS}_1, \text{PIS}_2, \text{PIS}_3)$ 和 $\text{NIS} = (\text{NIS}_1, \text{NIS}_2, \text{NIS}_3)$.

3) 基于正负理想解,分别计算决策对象 a_1 、 a_2 和 a_3 与正负理想解 PIS_1 、 PIS_2 和 PIS_3 及 NIS_1 、 NIS_2 和 NIS_3 之间的伪距离,即

$$\begin{aligned} E_1^1 &= \|D_1^1 - \text{PIS}_1\| = 18, \\ E_1^2 &= \|D_1^2 - \text{PIS}_1\| = 16, \\ E_1^3 &= \|D_1^3 - \text{PIS}_1\| = 6, \\ F_1^1 &= \|D_1^1 - \text{NIS}_1\| = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1^2 &= \|D_1^2 - \text{NIS}_1\| = 5, \\ F_1^3 &= \|D_1^3 - \text{NIS}_1\| = 15, \\ E_2^1 &= \|D_2^1 - \text{PIS}_2\| = 6, \\ E_2^2 &= \|D_2^2 - \text{PIS}_2\| = 12, \\ E_2^3 &= \|D_2^3 - \text{PIS}_2\| = 12, \\ F_2^1 &= \|D_2^1 - \text{NIS}_2\| = 9, \\ F_2^2 &= \|D_2^2 - \text{NIS}_2\| = 3, \\ F_2^3 &= \|D_2^3 - \text{NIS}_2\| = 3, \\ E_3^1 &= \|D_3^1 - \text{PIS}_3\| = 14, \\ E_3^2 &= \|D_3^2 - \text{PIS}_3\| = 15, \\ E_3^3 &= \|D_3^3 - \text{PIS}_3\| = 3, \\ F_3^1 &= \|D_3^1 - \text{NIS}_3\| = 4, \\ F_3^2 &= \|D_3^2 - \text{NIS}_3\| = 3, \\ F_3^3 &= \|D_3^3 - \text{NIS}_3\| = 15. \end{aligned}$$

根据 C 的权重 $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$, 计算决策对象 a_1 、 a_2 和 a_3 与正负理想解 PIS 和 NIS 的伪距离为

$$\begin{aligned} E^1 &= \frac{E_1^1 + E_2^1 + E_3^1}{3} = \frac{18 + 6 + 14}{3} \doteq 12.67, \\ E^2 &= \frac{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2}{3} = \frac{16 + 12 + 15}{3} \doteq 14.33, \\ E^3 &= \frac{E_1^3 + E_2^3 + E_3^3}{3} = \frac{6 + 12 + 3}{3} = 7, \\ F^1 &= \frac{F_1^1 + F_2^1 + F_3^1}{3} = \frac{3 + 9 + 4}{3} \doteq 5.33, \\ F^2 &= \frac{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}{3} = \frac{5 + 3 + 3}{3} \doteq 3.67, \\ F^3 &= \frac{F_1^3 + F_2^3 + F_3^3}{3} = \frac{15 + 3 + 15}{3} \doteq 11. \end{aligned}$$

因此, $E^- = \min\{E^1, E^2, E^3\} = 7$, $F^+ = \max\{F^1, F^2, F^3\} = 11$. 根据式(8), 决策对象与正负理想解之间的相对贴近度为

$$\begin{aligned} R(a_1) &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{12.67} + \frac{5.33}{11} \right) \doteq 0.52, \\ R(a_2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{14.33} + \frac{3.67}{11} \right) \doteq 0.41, \\ R(a_3) &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{7} + \frac{11}{11} \right) = 1. \end{aligned}$$

4) 由于决策对象的相对贴近度满足 $R(a_3) > R(a_1) > R(a_2)$, 决策对象的排序结果为 $a_3 \succ a_1 \succ a_2$, 即对象 a_3 为满意的选择对象.

表2给出了本文所提基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言 TOPSIS 决策与 Rodriguez 等的方法^[5]、Wei 等的方法^[19] 和 Lee 等的方法^[21] 在决策对象排序及满意的决策对象两个方面的比较结果.

表2 4种方法排序结果比较

决策方法	算子	对象排序	满意对象
Rodriguez ^[4]	偏好关系	$a_3 = a_1 \succ a_2$	$\{a_1, a_3\}$
	乐观结果	$a_3 \succ a_1 \succ a_2$	$\{a_3\}$
Wei ^[17]	中立结果	$a_3 \succ a_1 \succ a_2$	$\{a_3\}$
	悲观结果	$a_3 \succ a_1 = a_2$	$\{a_3\}$
Lee ^[21]	HFLWA算子	$a_3 \succ a_1 \succ a_2$	$\{a_3\}$
	HFLWG算子	$a_3 \succ a_1 \succ a_2$	$\{a_3\}$
	HFLOWA算子	$a_3 \succ a_1 \succ a_2$	$\{a_3\}$
	HFLOWG算子	$a_3 \succ a_1 \succ a_2$	$\{a_3\}$
本文方法	贴适度	$a_3 \succ a_1 \succ a_2$	$\{a_3\}$

Rodriguez的方法是最早提出的用于解决带有犹豫模糊语言项集的多属性决策问题的方法,该方法主要由min-upper算子、max-lower算子和一个二元偏好关系组成,min-upper和max-lower算子用于获取每一备选对象犹豫模糊语言项集评价结果的核心信息,该核心信息被表示为一个语言值区间.二元偏好关系用于对语言值区间进行排序,从而获得带有犹豫模糊语言项集的多属性决策问题的评价结果.在本例中,使用Rodriguez等的方法无法比较备选对象.

为了克服Rodriguez等的方法的不足,Wei等基于概率理论,提出了新的犹豫模糊语言项集比较方法,据此提出了新的犹豫模糊语言加权聚合算子(HLWA)及犹豫模糊语言有序加权聚合算子(HLOWA),并用于带有犹豫模糊语言项集的多属性决策问题.形式上,Wei等的方法是基于犹豫模糊语言聚合算子的决策方法,特别在基于HLOWA的决策方法中,根据权重的不同选择,对应的决策结果可分为乐观的、中立的和悲观的.从表2中可以注意到,悲观的结果中无法比较备选对象.

为了克服以上两种方法的不足,Lee等提出了基于区间似然关系的犹豫模糊语言项集比较方法,并给出了两个犹豫模糊语言项集之间的相似度.通过聚合犹豫模糊语言项集与初始模糊语言项集之间的似然度,Lee等提出了犹豫模糊语言加权平均算子(HFLWA)、犹豫模糊语言加权几何算子(HFLWG)、犹豫模糊语言有序加权平均算子(HFLOWA)和犹豫模糊语言有序加权几何算子(HFLOWG),并用于带有犹豫模糊语言项集的多属性决策问题.从表2可以注意到,使用Lee等的方法可以克服Rodriguez等的方法和Wei等的方法的不足,能够给出3个备选对象的排序结果.

本文提出的基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言TOPSIS决策方法首先以对象-语言值决策矩阵为

基础完成决策分析,而其他3种方法均以对象-属性决策矩阵为基础完成决策分析.此外,本质上,本文所提出的方法是一种TOPSIS决策方法,即通过与正负理想解的距离给出决策结果,这不同于Rodriguez等的方法使用二元偏好关系给出决策结果,也不同于Wei等和Lee等的方法使用聚合算子给出决策结果.形式上,TOPSIS决策方法通过正负理想解提供了更多的决策信息.从表2可以看出,本文基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言TOPSIS决策方法可以克服Rodriguez等和Wei等的决策方法的不足,给出了3个备选对象的排序结果,排序结果与Lee等的方法一致.

5 结 论

本文提出了对象-语言值决策矩阵表示决策专家根据决策属性给出的评价语言信息,这种新的评价信息表示方式可转化为初始模糊语言值集合上的0-1向量,据此可利用0-1向量上的运算完成评价语言信息的处理.结合经典TOPSIS决策方法,本文基于0-1向量运算给出了语言决策问题的正负理想解获取方法,提出了决策对象之间的伪距离,并讨论了相关性;基于决策对象之间的伪距离,给出了决策对象与正负理想解之间的伪距离,并分析了其相关性质,进一步给出了决策对象与正负理想解之间的相对贴适度计算方法,其性质表明相对贴适度与TOPSIS决策方法的核心思想一致,可用于选择满意的决策对象.实例分析中与Wei、Rodriguez和Lee的决策方法进行了比较,本文方法与Lee的决策方法一致并能克服Wei和Rodriguez决策方法的不足,说明基于对象-语言值决策矩阵的模糊语言TOPSIS决策方法的正确性.同时,基于0-1向量上的运算,本文方法可快速判断明晰、部分未知和犹豫的评价语言信息,便于在大规模决策环境下选择合适的语言聚合算子聚合决策对象的评价语言信息,是一种可选的语言决策方法.

参考文献(References)

[1] Pei Z, Ruan D, Xu Y, et al. Linguistic values-based intelligent information processing: Theory, methods, and applications[M]. Atlantis: Atlantis Press, 2010: 82-85.

[2] Xu ZS. Hesitant fuzzy sets theory, studies in fuzziness and soft computing[M].Heidelberg: Springer, 2014: 65-68.

[3] Martinez L, Rodriguez R M, Herrera F. The 2-tuple linguistic model-computing with words in decision making[M]. Switzerland: Springer Int Publishing, 2015: 142-145.

[4] Hwang C L, Yoon K. Multiple attribute decision making: Methods and applications[M]. New York:

- Springer-Verlag, 1981: 22-27.
- [5] Rodriguez R M, Martinez L, Herrera F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20(1): 109-119.
 - [6] Rodriguez R M, Bedregal B. A position and perspective analysis of hesitant fuzzy sets on information fusion in decision making[J]. Towards High Quality Progress, Information Fusion, 2016, 29(3): 89-97.
 - [7] Silva V B S, Morais D C. A group decision-making approach using a method for constructing a linguistic scale[J]. Information Sciences, 2014, 288(5): 423-436.
 - [8] 徐泽水, 潘玲, 廖虎昌. 基于 MACBETH 方法的犹豫模糊语言多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(7), 1266-1272.
(Xu Z S, Pan L, Liao H C. Multi-criteria decision making method of hesitant fuzzy linguistic term set based on improved MACBETH method[J]. Control and Decision, 2017, 32(7): 1266-1272.)
 - [9] Zadeh L A. Fuzzy logic = computing with words[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4 (10): 103-111.
 - [10] Herrera F, Martinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 746-752.
 - [11] Martinez L, Herrera F. An overview on the 2-tuple linguistic model for computing with words in decision making: Extensions, applications and challenges[J]. Information Sciences, 2012, 207(1): 1-18.
 - [12] Guo W T, Huynh V N, Nakamori Y. A proportional 3-tuple fuzzy linguistic representation model for screening new product projects[J]. J of Systems Science and Systems Engineering, 2016, 25(1): 1-22.
 - [13] Meng D, Pei Z. On weighted unbalanced linguistic aggregation operators in group decision making[J]. Information Sciences, 2013, 223 (3): 31-41.
 - [14] Pei Z, Ruan D, Liu J, et al. A linguistic aggregation operator with three kinds of weights for nuclear safeguards evaluation[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 28(3): 19-26.
 - [15] Pei Z, Zou L, Yi L Z. A linguistic aggregation operator including weights for linguistic values and experts in group decision making[J]. Int J of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2013, 21(6): 927-943.
 - [16] Roszkowska E, Wachowicz T. Application of fuzzy TOPSIS to scoring the negotiation offers in ill-structured negotiation problems[J]. European J of Operational Research, 2015, 242(9): 920-932.
 - [17] Herrera F, Martinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 746-752.
 - [18] 谭春桥, 贾媛. 基于证据理论和前景理论的犹豫-直觉模糊语言多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(2): 333-339.
(Tan C Q, Jia Y. Multi-criteria decision-making method based on evidence theory and Prospect theory for hesitant-intuitionistic fuzzy linguistic[J]. Control and Decision, 2017, 32(2): 333-339.)
 - [19] Wei C P, Zhao N, Tang X J. Operators and comparisons of hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(3): 575-584.
 - [20] Beg I, Rashid T. TOPSIS for hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 1162-1171.
 - [21] Lee L W, Chen S M. Fuzzy decision making based on likelihood-based comparison relations of hesitant fuzzy linguistic term sets and hesitant fuzzy linguistic operators[J]. Information Sciences, 2015, 294(1): 513-529.
 - [22] Ren F L, Kong M, Pei Z. A new hesitant fuzzy linguistic TOPSIS method for group multi-criteria linguistic decision making[J]. Symmetry, 2017, 9, DOI: 10.3390/sym9120289.
 - [23] Pang Q, Wang H, Xu Z H. Probabilistic linguistic term sets in multi-attribute group decision making[J]. Information Sciences, 2016, 369(1): 128-143.
 - [24] Ou Y, Yi L Z, Zou B, et al. The linguistic intuitionistic fuzzy set TOPSIS method for linguistic multi-criteria decision makings[J]. Int J of Computational Intelligence Systems, 2017, 11(2): 120-132.
 - [25] Massanet S, Riera J V, Torrens J, et al. A new linguistic computational model based on discrete fuzzy numbers for computing with words[J]. Information Sciences, 2014, 258(1): 277-290.
 - [26] Pei Z, Liu J, Hao F, et al. FLM-TOPSIS: The fuzzy linguistic multiset TOPSIS method and its application in linguistic decision making[J]. Information Fusion, 2019, 45: 266-281.

(责任编辑: 齐 霁)