文章编号: 1001-0920(2019)03-0620-08 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2017.1112

基于新型符号距离的犹豫模糊多属性决策方法

阮传扬†

(1. 广东财经大学 工商管理学院，广州 510320；2. 上海交通大学 安泰经济与管理学院，上海 200030)

摘 要: 研究属性权重完全未知的犹豫模糊决策问题. 针对犹豫模糊元中人为添加元素导致的主观性过强问题, 提出一种基于新型符号距离的犹豫模糊决策方法. 首先, 根据犹豫模糊集元素之间的方差以及元素个数定义一种含有对数函数的新型犹豫度, 并基于新型犹豫度定义新型犹豫模糊符号距离; 然后, 基于新型符号距离给出一种属性权重完全未知的数学规划模型得出属性权重, 并利用加权符号距离对方案进行排序; 最后, 通过数值案例表明所提出方法区分度明显并且合理、有效.

关键词: 犹豫模糊集；犹豫度；距离测度；符号距离；属性权重；方差；元素个数

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Hesitant fuzzy decision making method based on new type signed distance

RUAN Chuan-yang†

(1. School of Business Administration, Guangdong University of Finance and Economics，Guangzhou 510320, China；2. Antai College of Economics and Management，Shanghai Jiaotong University，Shanghai 200030，China)

Abstract: This paper investigates the hesitant fuzzy decision making problem with unknown weight information. In order to solve the problem of subjectiveity caused by adding elements into a hesitant fuzzy element (HFE), a new type signed distance-based approach for the hesitant fuzzy multiple attribute decision making is proposed. Firstly, a new type hesitancy index with logarithmic function based on the number and variance of elements in a HFE is presented, and a new type hesitant fuzzy signed distance measure based on the new type hesitancy index is proposed. Then, based on the new type signed distance, a mathematical model is given to determine the attribute weights, and the priorities of alternatives can be obtained. Finally, a numerical example is given to illustrate that the discrimination of the proposed method is reasonable and effective.

Keywords: hesitant fuzzy sets；hesitancy index；distance measure；signed distance；attribute weight；variance；the number of elements

0 引 言

在许多决策问题中, 充斥着大量的不确定性. 处理不确定性的方法有很多, Zadeh[1] 首次尝试利用模糊集来处理不确定信息. 随着时代的进步, 模糊集理论在处理问题时逐渐表现出一些弊端, 为此相关学者对其进行了扩展[2-4], 犹豫模糊集[4-5](Hesitant fuzzy sets, HFS) 就是一类扩展模糊集. 其最大特点是允许一个属性同时出现不同的评估值, 既可以有效反映决策者的不同意见, 又能体现项目的真实水平, 因而某种程度上犹豫模糊集在处理不确定信息时更加灵活自然.

目前有关HFS的信息集成、距离测度、相关系数等已经被应用到诸多领域[6-16]. 距离测度是运用HFS信息进行多属性决策的一项关键方法, 文献[16-17]基于海明距离、欧氏距离、豪斯道夫距离等分别定义了犹豫模糊集相关的距离测度, 并将其应用到多属性决策问题中, 之后利用数值案例验证了其有效性和合理性; 文献[18]针对群推荐中存在的多粒度、犹豫性、模糊性语言信息问题, 首先给出了多粒度犹豫模糊语言术语集的概念, 之后提出了相应的距离测度公式, 并将其应用于多属性群推荐方法中. 在犹豫模糊距离测度中, 犹豫模糊元的统一化处理是较为关键的一个问题, 不同的犹豫模糊元所含元素个数可能存在差异, 目前大多采用的一种较为有效的方法就是在含

收稿日期: 2017-08-22；**修回日期:** 2018-03-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71701051)；中国博士后科学基金项目(2017M610254)；广州市哲学社会科学规划课题(2018GZQN37).

责任编委: 黄敏.

作者简介: 阮传扬(1987–), 男, 讲师, 博士, 从事智能决策理论与方法、技术创新与项目管理等研究.

†通讯作者. E-mail: ruancyang@163.com.

有元素较少的犹豫模糊元中人为添加元素[16-19],缺点是主观随意性过大,随着决策者风险态度的不同,备选方案排序也会随着发生变化,很难做到备选方案排序的统一. 为了克服此缺陷,文献[20]给出了一种新的犹豫模糊距离测度,做到了一定程度的应对,但是该方法计算复杂并且在一定情况下不能有效反映决策者的犹豫程度;文献[21]首先给出了犹豫模糊集犹豫度的概念,之后在此基础上给出了符号距离的定义,有效地解决了人为添加元素的问题,但是该种方法未将犹豫模糊元中元素个数的影响考虑进去,在某些情况下决策结果不理想,具有一定程度的局限性;文献[22]考虑到犹豫模糊元中元素个数的影响,在文献[21]符号距离的基础上进行了改进,给出了包含元素个数的新符号距离,做到了较好的应对,但是在元素个数差异较小时,此种方法得出的决策结果也不理想,甚至出现与实际情况相悖的结论.

鉴于此,本文在现有文献研究基础上,针对犹豫模糊元中元素之间方差和个数构造一种含有对数函数的新型犹豫度,可以较好地反映决策群体的分歧程度且区别度明显. 基于新型犹豫度提出了相应的新型符号距离,并在此基础上给出了一种属性权重完全未知时的属性权重求解模型,之后利用加权符号距离对备选方案进行排序. 本文所述方法在运算时无需在元素个数少的犹豫模糊元中人为添加元素,并具有计算简便、区分度高的特点. 最后将该方法应用于应急预案的决策问题中,应用实例表明了所提出方法的合理性和有效性.

1 基础理论

为了解决同一属性中同时出现不同评估值的现象,文献[4-5]在模糊集的基础上给出了犹豫模糊集的概念.

定义1 [4-5] 设$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是一个非空集合,称

$$E = \{\langle x, h_E(x)\rangle | x \in X\} \tag{1}$$

为犹豫模糊集,其中$h_E(x)$是$[0,1]$中几个可能隶属值的集,表示$x \in X$对于E的隶属度的集合.

犹豫模糊元中的元素反映了决策者的分歧或犹豫程度,元素之间偏差越大,犹豫程度越高. 为了反映决策者的犹豫程度,文献[21]定义了犹豫模糊元的犹豫度.

定义2 [21] 设$h = \{\gamma^i | i = 1, 2, \cdots, l_h\}$为一个犹豫模糊元,$\gamma^i$为$h$中第$i$小的元素,$l_h$为$h$的元素个数,$h$的犹豫度为

$$H(h) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_{l_h}^2} \displaystyle\sum_{\lambda>\delta=1}^{l_h} |\gamma^\lambda - \gamma^\delta|, \ l_h > 1; \\ 0, \ l_h = 1. \end{cases} \tag{2}$$

其中:$C_{l_h}^2 = \dfrac{1}{2} l_h(l_h - 1)$,$C_{l_h}^2$表示各犹豫模糊元素之间差值的个数,犹豫度$H(h)$也可理解为各犹豫模糊元素之间差值的均值.

基于定义2的犹豫度,文献[21]定义了犹豫模糊符号距离,定义如下.

定义3 [4-5] 设$h = \{\gamma^i | i = 1, 2, \cdots, l_h\}$为一个犹豫模糊元,$\gamma^i$为$h$中第$i$小的元素,$l_h$为$h$的元素个数,若采用犹豫模糊元最大值$\bar{1}$为理想点犹豫模糊元,则由$h$到$\bar{1}$的符号距离为

$$d_s(h, \bar{1}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{l_h} \displaystyle\sum_{i=1}^{l_h} (1 - \gamma^i) + H(h)\Big), \ l_h > 1; \\ \dfrac{1}{2}(1 - \gamma), \ l_h = 1. \end{cases} \tag{3}$$

其中:$H(h) = \dfrac{1}{C_{l_h}^2} \displaystyle\sum_{\lambda>\delta=1}^{l_h} |\gamma^\lambda - \gamma^\delta|$表示犹豫度,$\dfrac{1}{l_h} \displaystyle\sum_{i=1}^{l_h} (1 - \gamma^i)$表示各犹豫模糊元素与理想点$\bar{1}$的平均距离.

犹豫模糊信息体现的是决策者的不同意见,犹豫模糊元中的元素越少,表示意见越统一. 为了考虑犹豫模糊元中的元素个数对决策结果的影响,文献[22]提出了一种新的犹豫模糊符号距离.

定义4 [22] 设$h = \{\gamma^i | i = 1, 2, \cdots, l_h\}$为一个犹豫模糊元,$\gamma^i$为$h$中第$i$小的元素,$l_h$为$h$的元素个数,$\tilde{1}$为理想点犹豫模糊元,称

$$\begin{aligned} & d_{\tilde{s}}(h, \tilde{1}) = \\ & \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} (1 - \gamma^i) + \\ & \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \Big(\gamma^i - \Big(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \gamma^i\Big)\Big)^2 + \Big(1 - \frac{1}{l_h}\Big)\Big)\Big) \end{aligned} \tag{4}$$

为h到$\tilde{1}$的符号距离.

基于犹豫模糊符号距离,文献[21]给出了犹豫模糊元的对比规则.

定义5 [21] 设h_1和h_2为两个犹豫模糊元,$\bar{1}$为理想点犹豫模糊元,距离测度越大,所对应的犹豫模糊元越小,即:

1) 如果$d_s(h_1, \bar{1}) > d_s(h_2, \bar{1})$,则$h_1 < h_2$;

2) 如果$d_s(h_1, \bar{1}) < d_s(h_2, \bar{1})$,则$h_1 > h_2$;

3) 如果$d_s(h_1, \bar{1}) = d_s(h_2, \bar{1})$,则$h_1 = h_2$.

2 基于新型符号距离的犹豫模糊多属性决策方法

犹豫模糊信息揭示的是决策者的不同意见,具有较大的不确定性,这种不确定性加大了决策的难度. 为了有效测度这种分歧,本文提出一种含有对数函数的新型犹豫度,并在此基础上给出了新型犹豫模糊符号距离,之后将其应用于属性权重完全未知的犹豫模糊决策问题中.

2.1 犹豫模糊新型符号距离的提出

为了对决策信息进行有效处理,距离测度近年来被有效应用于多属性决策中,文献[21]基于犹豫模糊信息提出一种符号距离的概念,文献[22]对犹豫模糊符号距离进行了改进. 然而,在某些情况下,利用现有的犹豫模糊符号距离对犹豫模糊元进行对比时,所得结果却与现实情况不符合.

例1 假设$h_1 = (0.6, 0.7)$, $h_2 = (0.6, 0.8)$和$h_3 = (0.6, 0.7, 0.8)$为3个犹豫模糊元,设γ_i^j表示h_i中第j小的元素,则:

1) 由$\gamma_1^1 = \gamma_2^1$和$\gamma_1^2 < \gamma_2^2$可知$h_1 < h_2$.

2) 当犹豫模糊元中的元素个数不同时,为了进行有效对比,按照现有的犹豫模糊运算规则[16],应当在元素较少的犹豫模糊元中添加元素直至元素个数相同. 目前主要有3种添加方法:规避、中立、偏好. 如果是偏好风险,则h_1中的元素变为$h_1' = (0.6, 0.7, 0.7)$,由$\gamma_1^1 = \gamma_3^1, \gamma_1^2 = \gamma_3^2, \gamma_1^3 < \gamma_3^3$可知$h_1 < h_3$. 当选择规避风险以及中立时,对比结果更是如此,因此$h_1 < h_3$恒成立.

3) 由于h_2与h_3中的元素个数不同,如果按照2)中添加元素的方法进行对比,则当决策者选择规避风险时,可得$h_2 < h_3$;当决策者选择中立时或者选择偏好风险时,可得$h_2 > h_3$,所得结果无法统一. 由于h_2与h_3中的元素均值相等,最小元素与最大元素也相同,h_3仅比h_2多了一个等于均值的元素,由犹豫模糊集的概念可知:犹豫模糊元中的元素越少,表明决策者意见越统一. 因此,对比结果应当是$h_3 < h_2$.

综上所述,可得$h_1 < h_3 < h_2$.

若利用文献[21]的犹豫模糊符号距离进行对比,则由式(3)可得

$$d_s(h_1, \bar{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3}{2} + 0.1\Big) = 0.225,$$

$$d_s(h_2, \bar{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.2}{2} + 0.2\Big) = 0.25,$$

$$d_s(h_3, \bar{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3+0.2}{3} + \frac{0.1+0.2+0.1}{3}\Big) = 0.217.$$

则由符号距离对比规则(越小越优)可知,$h_2 < h_1 < h_3$,与实际结果相矛盾.

若利用文献[22]的改进的犹豫模糊符号距离进行对比,则由式(4)可得

$$d_{\tilde{s}}(h_1, \tilde{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3}{2} + \frac{1}{2}(0.0025+0.5)\Big) = 0.301,$$

$$d_{\tilde{s}}(h_2, \tilde{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.2}{2} + \frac{1}{2}(0.01+0.5)\Big) = 0.278,$$

$$d_{\tilde{s}}(h_3, \tilde{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3+0.2}{3} + \frac{1}{2}\Big(\frac{0.02}{3} + \frac{2}{3}\Big)\Big) = 0.318.$$

则由符号距离对比规则(越小越优)可知$h_3 < h_1 < h_2$,仍然与实际结果相矛盾.

若采用文献[23]基于标准差定义犹豫度,则相对应的犹豫模糊符号距离为

$$d_{\check{s}}(h, \check{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}(1-\gamma^i) + \Big(\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\Big(\gamma^i - \frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\gamma^i\Big)^2\Big)^{1/2}\Big). \tag{5}$$

代入式(5)得

$$d_{\check{s}}(h_1, \check{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3}{2} + 0.05\Big) = 0.2,$$

$$d_{\check{s}}(h_2, \check{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.2}{2} + 0.1\Big) = 0.2,$$

$$d_{\check{s}}(h_3, \check{1}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3+0.2}{3} + \sqrt{\frac{0.02}{3}}\Big) = 0.191.$$

则$h_1 = h_2 < h_3$,还是与实际情况相矛盾.

通过分析得知:在上述犹豫模糊集中元素相对较少(意见相对统一)的情况下,文献[21]和文献[23]仅考虑了决策者的分歧程度的影响,而未考虑犹豫模糊元中元素个数对决策结果的影响;文献[19]刚好相反,仅仅考虑了元素个数的影响;而文献[22]虽然考虑到了决策者分歧程度以及元素个数的双重影响,但对元素个数的处理不到位,犹豫模糊元素个数的影响过大,甚至超过了元素本身数值以及其离散程度的影响,导致决策结果与直观认识情况不符. 为解决这类问题,本文提出一种基于犹豫模糊信息的新型犹豫度.

定义6 设$h = \{\gamma^i | i = 1, 2, \cdots, l_h\}$为一个犹豫模糊元,$\gamma^i$为$h$中第$i$小的元素,$l_h$为$h$的元素个数,有$h$的新型犹豫度如下:

$$\hat{H}(h) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\Big(\gamma^i - \frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\gamma^i\Big)^2 + \sqrt{\Big(1 - \frac{1}{1+\ln l_h}\Big)}\Big). \tag{6}$$

式(6)为基于犹豫模糊元中元素的方差以及个数定义的新型犹豫度,偏差越大,元素个数越多,所对应的犹豫度也越大.

新型犹豫度满足如下性质[21-22].

性质1 设$h=\{\gamma^i|i=1,2,\cdots,l_h\}$为一个犹豫模糊元,其对应的补集为$h^c=\cup_{\gamma\in h}\{1-\gamma\}$,有:

1) $0\leqslant \hat{H}(h)\leqslant 1$;

2) $\hat{H}(h)=\hat{H}(h^c)$.

易于验证式(6)满足性质1.

证明

1) $0\leqslant \hat{H}(h)\leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1\times l_h}{l_h}+1\Big)=1$;

2) $\hat{H}(h^c)=$

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\Big(1-\gamma^i-\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\Big(1-\gamma^i\Big)\Big)^2+\sqrt{\Big(1-\frac{1}{1+\ln l_h}\Big)}\Big)=$$

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\Big(-\gamma^i+\Big(\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\gamma^i\Big)\Big)^2+\sqrt{\Big(1-\frac{1}{1+\ln l_h}\Big)}\Big)=\hat{H}(h).\qquad\square$$

基于式(6)中的新型犹豫度,可以得到一种新型符号距离.

定义7 设$h=\{\gamma^i|i=1,2,\cdots,l_h\}$为一个犹豫模糊元,$\gamma^i$为$h$中第$i$小的元素,$l_h$为$h$的元素个数,$\hat{1}$为理想点犹豫模糊元,$h$的新型符号距离如下:

$$d_{\hat{S}}(h,\hat{1})=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}(1-\gamma^i)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\Big(\gamma^i-\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}\gamma^i\Big)^2+\sqrt{\Big(1-\frac{1}{1+\ln l_h}\Big)}\Big)\Big).\quad(7)$$

犹豫模糊符号距离满足如下性质[21-22].

性质2 设h,h_1,h_2为3个犹豫模糊元,$\hat{1}$为理想点犹豫模糊元,则:

1) $0\leqslant d_{\hat{s}}(h,\hat{1})\leqslant 1$;

2) $h=\hat{1}$当且仅当$d_{\hat{s}}(h,\hat{1})=0$;

3) h_1比h_2距离理想点$\hat{1}$更远当且仅当

$$d_{\hat{s}}(h_1,\hat{1})>d_{\hat{s}}(h_2,\hat{1}).$$

证明

1) $0\leqslant d_{\hat{S}}(h,\hat{1})=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}(1-\gamma^i)+\hat{H}(h)\Big)\leqslant \frac{1}{2}(1+1)=1$.

2) 若$h=\hat{1}$,则$d_{\hat{S}}(h,\hat{1})=\frac{1}{2}(0+\hat{H}(h))=\frac{1}{2}(0+0)=0$;若$d_{\hat{S}}(h,\hat{1})=0$,则$\frac{1}{l_h}\sum_{i=1}^{l_h}(1-\gamma^i)=0$且$\hat{H}(h)=0$,求解可得$l_h=1,\gamma^i=1$,即$h=\hat{1}$.

3) 明显成立. $\square$

新型犹豫模糊符号距离同时考虑了犹豫模糊元中元素之间的分歧程度以及个数的双重影响,包含的范围更广,特别是在对元素个数的处理上,处理比较到位,区别度明显,有效性也更高,如例1中

$$d_{\hat{s}}(h_1,\hat{1})=\frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3}{2}+\frac{1}{2}\Big(0.0025+\sqrt{\frac{\ln 2}{1+\ln 2}}\Big)\Big)=0.336,$$

$$d_{\hat{s}}(h_2,\hat{1})=\frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.2}{2}+\frac{1}{2}\Big(0.01+\sqrt{\frac{\ln 2}{1+\ln 2}}\Big)\Big)=0.312,$$

$$d_{\hat{s}}(h_3,\hat{1})=\frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3+0.2}{3}+\frac{1}{2}\Big(\frac{0.02}{3}+\sqrt{\frac{\ln 3}{1+\ln 3}}\Big)\Big)=0.333.$$

则由符号距离对比规则(越小越优)可知$h_1<h_3<h_2$,与实际结果相一致.

若将$h_3=(0.6,0.7,0.8)$更改为$h_3'=(0.6,0.7,0.9)$,计算得$d_{\hat{s}}(h_3',\hat{1})=0.318$,则具体排序为$h_1<h_3'<h_2$,与现实情况仍然一致.

若在以上3个犹豫模糊元中分别添加一个逼近1的元素0.9,即3个犹豫模糊元分别为$h_1''=(0.6,0.7,0.9)$, $h_2''=(0.6,0.8,0.9)$和$h_3''=(0.6,0.7,0.8,0.9)$,则

$$d_{\hat{s}}(h_1'',\hat{1})=\frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3+0.1}{3}+\frac{1}{2}\Big(0.0156+\sqrt{\frac{\ln 3}{1+\ln 3}}\Big)\Big)=0.318,$$

$$d_{\hat{s}}(h_2,\hat{1})=\frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.2+0.1}{3}+\frac{1}{2}\Big(0.0156+\sqrt{\frac{\ln 3}{1+\ln 3}}\Big)\Big)=0.301,$$

$$d_{\hat{s}}(h_3'',\hat{1})=\frac{1}{2}\Big(\frac{0.4+0.3+0.2+0.1}{4}+\frac{1}{2}\Big(\frac{0.025}{4}+\sqrt{\frac{\ln 4}{1+\ln 4}}\Big)\Big)=0.319.$$

则由符号距离对比规则(越小越优)可知$h_3''<h_1''<h_2''$,主要原因是h_3''的方差明显小于h_1''的方差,且均值较大,而元素数量仅比h_1''多一个,即当犹豫模糊元中元素逼近1、方差小、元素数量相当的情况下,若犹豫模糊元中含有多余且大于均值的元素,则该犹豫模糊元较好,定义6仍然适用,并且效果较好.

由此可见,在决策矩阵的犹豫模糊集中元素较少(意见相对统一时)的情况下,定义6适用范围比较广. 但是,当决策矩阵的犹豫模糊集中元素较多时,由于定义6中有关犹豫模糊元素个数的计算公式部分随着元素个数的增大而趋向于1,元素个数对决策结果的影响不大且计算复杂度较高. 因此,此种情况下

采用文献[21, 23]等经典算法比较合适.

2.2 基于新型符号距离的属性权重确定模型

假设方案集为$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$,属性集为$G=\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$,其对应的权重向量为$W=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}},\omega_j\in[0,1],\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j=1$. 由于属性权重完全未知,本文基于离差最大化思想构建一种基于新型犹豫模糊符号距离的属性权重确定模型. 在此方法下方案$A_i(i=1,2,\cdots,m)$在属性$G_j(j=1,2,\cdots,n)$下的属性值差别越大,其对应的属性权重ω_j越大. 具体模型[22,24]如下所示:

$$\text{M-1}\begin{cases}\max\ f(\omega)=\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|d_{\hat{s}}(h_{ij},\hat{1})-d_{\hat{s}}(h_{kj},\hat{1})|\omega_j;\\ \text{s.t.}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2=1,0\leqslant\omega_j\leqslant1.\end{cases}\tag{8}$$

为了求解上述模型,应当构造拉格朗日函数

$$L(\omega,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|d_{\hat{s}}(h_{ij},\hat{1})-d_{\hat{s}}(h_{kj},\hat{1})|\omega_j+\frac{\lambda}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2-1\Big).\tag{9}$$

对式(9)分别关于λ,ω_j求偏导,并令其为0,即

$$\begin{cases}\dfrac{\delta L(\omega_j,\lambda)}{\delta\omega_j}=\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|d_{\hat{s}}(h_{ij},\hat{1})-d_{\hat{s}}(h_{kj},\hat{1})|+\lambda\omega_j=0,\\ \dfrac{\delta L(\omega_j,\lambda)}{\delta\lambda}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2-1=0.\end{cases}\tag{10}$$

求解方程(10),得

$$\omega_j=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|d_{\hat{s}}(h_{ij},\hat{1})-d_{\hat{s}}(h_{kj},\hat{1})|}{\sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|d_{\hat{s}}(h_{ij}-\hat{1})-d_{\hat{s}}(h_{kj}-\hat{1})|)^2}}.\tag{11}$$

将ω_j进行单位化处理,解得属性权重为

$$\omega_j=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|d_{\hat{s}}(h_{ij}-\hat{1})-d_{\hat{s}}(h_{kj}-\hat{1})|}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|d_{\hat{s}}(h_{ij}-\hat{1})-d_{\hat{s}}(h_{kj}-\hat{1})|\Big)},\ j=1,2,\cdots,n.\tag{12}$$

2.3 犹豫模糊多属性决策步骤

基于式(7)的新型符号距离以及式(12)属性权重确定方法,给出一种属性权重完全未知时的犹豫模糊多属性决策方法. 假设方案集为$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$,属性集为$G=\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$,其对应的权重向量为$W=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}},\omega_j\in[0,1],\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j=1$. 专家组$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_p\}$中每位专家在进行匿名评价时给出每个方案$A_i\in A$关于每个属性$G_j\in G$的评价值,去掉完全重复的数据,便组成了一个犹豫模糊决策矩阵$\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{m\times n}$,其中$h_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$是一个犹豫模糊元.

基于新型符号距离的犹豫模糊多属性决策方法如下.

Step 1: 专家组给出每个方案$A_i\in A$关于每个属性$G_j\in G$的评价值,得到犹豫模糊决策矩阵$\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{m\times n}$;

Step 2: 利用式(7)计算新型符号距离,再利用模型M-1建立属性权重求解模型,并依据式(12)得出属性权重$W=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$;

Step 3: 利用加权符号距离公式

$$D_w(A_i,\hat{1})=\sum_{j=1}^{n}d_{\hat{s}}(h_{ij},\hat{1})\omega_j,i=1,2,\cdots,m,\tag{13}$$

得出各方案$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$的加权符号距离$D_w(A_i,\hat{1})$,并根据$D_w(A_i,\hat{1})$的大小对各方案进行排序,加权符号距离$D_w(A_i,\hat{1})$越小,相应的方案A_i越优.

3 数值算例分析

3.1 数值算例

假设共有5个应急预案$A_i(i=1,2,3,4,5)$,用来应对某突发事件,决策组决定根据以下4个特性对其进行综合决策: G_1为合理性, G_2为适用性, G_3为快速性, G_4为充分性. 决策小组给出每个方案$A_i\in A$关于每个属性$G_j\in G$的评价值,去掉完全重复的数据,便组成了一个基于犹豫模糊信息的决策矩阵$\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{m\times n}$,如$h_{21}=\{0.3,0.5\}$表示第2种应急预案在合理性方面决策小组有2种不同观点,即方案A_2关于属性G_1的评价值有0.3和0.5两种.

为了获得最佳应急预案,具体多属性决策步骤如下.

Step 1: 专家组给出每个方案$A_i\in A$关于每个属性$G_j\in G$的评价值,为了便于进行直接比较,本文采用文献[16, 22, 24]的决策矩阵数据,如表1所示.

Step 2: 首先,利用第2.1节式(7)计算新型符号距离,见表2. 其次,利用模型M-1建立属性权重求解模型,并依据式(12)得出属性权重

$$W=(0.215\,5,0.264\,0,0.304\,0,0.216\,5)^{\mathrm{T}}.\tag{14}$$

表 1　犹豫模糊决策矩阵

方案属性	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	{0.3,0.4, 0.5}	{0.1,0.7, 0.8,0.9}	{0.2,0.4, 0.5}	{0.3,0.5, 0.6,0.9}
A_2	{0.3,0.5}	{0.2,0.5,0.6,0.7,0.9}	{0.1,0.5, 0.6,0.8}	{0.3,0.4, 0.7}
A_3	{0.6,0.7}	{0.6,0.9}	{0.3,0.5, 0.7}	{0.4,0.6}
A_4	{0.3,0.4, 0.7,0.8}	{0.2,0.4, 0.7}	{0.1,0.8}	{0.6,0.8, 0.9}
A_5	{0.1,0.3,0.6,0.7,0.9}	{0.4,0.6, 0.7,0.8}	{0.7,0.8, 0.9}	{0.3,0.6, 0.7,0.9}

表 2　新型符号距离

方案属性	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	0.482 5	0.402 3	0.501 4	0.414 8
A_2	0.462 5	0.419 7	0.456 8	0.454 8
A_3	0.335 6	0.290 6	0.437 5	0.412 5
A_4	0.426 2	0.474 8	0.465 6	0.301 4
A_5	0.456 7	0.383 5	0.282 5	0.389 8

Step 3: 利用式 (13) 中的加权符号距离公式得出各方案 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 的加权符号距离 $D_w(A_i, \hat{1})$:

$$D_w(A_1, \hat{1}) = 0.452\,4,$$
$$D_w(A_2, \hat{1}) = 0.447\,8,$$
$$D_w(A_3, \hat{1}) = 0.371\,3,$$
$$D_w(A_4, \hat{1}) = 0.424\,0,$$
$$D_w(A_5, \hat{1}) = 0.370\,0.$$

根据 $D_w(A_i, \hat{1})$ 的大小对各方案进行排序,加权符号距离 $D_w(A_i, \hat{1})$ 越小,相应的方案 A_i 越优,则 $A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$. 因此,应急预案 A_5 最合理.

3.2　结果分析与对比

1) 属性权重完全未知时的决策方法对比.

有关属性权重完全未知的犹豫模糊决策问题,文献 [24] 采用离差最大化法确定属性权重,并利用 TOPSIS 法对方案进行排序. 根据决策者的风险态度的不同,获得的决策结果见表3.

本文基于新型符号距离确定属性权重并利用加权符号距离得出方案排序,与文献 [24] 对比,最优方案一致,并且属性权重最大的都是 G_3,体现了良好的一致性. 但是根据决策者风险态度的变化,文献 [24] 中方案 A_2 和方案 A_4 略有不同,当决策者选择规避风险时,$A_2 \succ A_4$;而当决策者选择中立或偏好风险时,$A_4 \succ A_2$. 主要原因是随着风险态度的变化,添加的元素一直在变化,特别是规避风险时,添加的是最小的元素,当主观添加元素过多时,会影响到最终方案的排序. 而本文中的新型符号距离法不用在犹豫模糊元中人为添加元素,直接利用已有的犹豫模糊信息进行方案排序,有效避免了人为添加元素对决策结果的影响.

2) 基于符号距离的决策方法对比.

犹豫模糊元中的元素反映了决策者的分歧或犹豫程度,元素之间偏差越大,犹豫程度越高. 为了反映决策者的犹豫程度,文献 [21] 定义了犹豫模糊元的犹豫度,并在此基础提出了符号距离的概念,利用符号距离进行决策可以有效地避免人为添加元素对决策结果的影响. 文献 [21]、文献 [22] 和文献 [23] 分别给出了不同的符号距离计算公式,基于表1的犹豫模糊决策矩阵得到的决策如表4所示.

表 3　权重完全未知的方案排序

风险态度	属性权重	方案排序
规避	$w = (0.234\,1, 0.247\,4, 0.318\,1, 0.200\,4)^{\rm T}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
中立	$w = (0.256\,5, 0.242\,0, 0.287\,8, 0.213\,7)^{\rm T}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$
偏好	$w = (0.246\,2, 0.238\,5, 0.291\,5, 0.223\,8)^{\rm T}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$
新型符号距离法	$w = (0.215\,5, 0.264\,0, 0.304\,0, 0.216\,5)^{\rm T}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$

表 4　基于符号距离的方案排序

符号距离来源	属性权重	方案排序
文献[21]	$w = (0.204\,0, 0.198\,1, 0.425\,5, 0.172\,4)^{\rm T}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$
文献[23]	$w = (0.200\,6, 0.234\,9, 0.372\,8, 0.191\,7)^{\rm T}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$
文献[22]	$w = (0.201\,3, 0.361\,7, 0.252\,9, 0.184\,1)^{\rm T}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$
新型符号距离法	$w = (0.215\,5, 0.264\,0, 0.304\,0, 0.216\,5)^{\rm T}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$

由表4可知: 几种方法得到的最优方案都是A_5,但在具体排序上几种方法略有差别,主要原因如下.

文献[21]和文献[23]仅考虑到了犹豫模糊元中元素得分以及差异程度对决策结果的影响,没有考虑犹豫模糊元素个数的影响,犹豫模糊元素个数越少,证明意见越统一,所以与文献[22]以及本文中的新型符号距离法所得决策结果有明显差异.

本文方法与文献[22]所得方案排序完全一致,体现了非常好的一致性,但是在属性权重的处理上,文献[22]所得最大权重对应属性G_2,本文所提出方法与文献[21]、文献[23]以及文献[24]所得属性最大权重都是G_3,证明本文所提出方法与大多数文献在属性权重处理上具有一定的一致性,主要原因是文献[22]对犹豫模糊元中元素个数的处理不到位,在某些情况下决策结果不理想,详见例1中分析与对比.

3) 与基于得分函数的犹豫模糊决策方法对比.

本文所提出方法是基于距离测度进行决策,在犹豫模糊决策中,有很多文献都是基于得分函数进行方案排序,本文选取文献[25]进行对比,基于表1中犹豫模糊决策矩阵的决策结果见表5.

表5 基于得分函数的方案排序

风险态度	方案排序
规避	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
中立	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
偏好	$A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
新型符号距离法	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$

通过对比可以发现: 采用得分函数进行决策,仍然需要在犹豫模糊元中根据决策者风险态度的不同,在元素较少的犹豫模糊元中人为添加元素,时常会影响到方案排序,甚至影响到最优方案的选择.

由以上对比研究结果可知,本文所述方法主要优势如下:

1) 本文中的新型符号距离法不用在犹豫模糊元中人为添加元素,直接利用已有的犹豫模糊信息进行方案排序,有效避免了由于决策者风险偏好的差异而导致的人为添加元素对决策结果的影响.

2) 采用新型符号距离法进行决策时不仅考虑了犹豫模糊元中元素的大小、离散程度等影响,还考虑了犹豫模糊元素个数的影响. 本文所提出的含有对数函数的符号距离法在处理犹豫模糊元素个数时比较到位,所得决策结果具有较好的区分度和稳定性.

3) 本文利用离差最大化思想,基于新型犹豫模糊符号距离建立的属性权重确定模型与文献[21,23-24]在属性权重所得结果上具有高度的一致性,表明该方法所得决策结果合理、可靠.

4 结 论

本文基于犹豫模糊元中元素的方差与个数提出了一种新型犹豫模糊符号距离,并在此基础上研究了属性权重完全未知的多属性决策问题. 主要工作如下:

1) 基于犹豫模糊元中元素的方差与个数定义了一种含有对数函数的新型犹豫度,以便合理反映决策者的分歧程度,并且避免在犹豫模糊元中元素较少的集合人为添加元素.

2) 基于新型犹豫度定义了一种同时考虑犹豫模糊元中元素大小、数量和方差的新型犹豫模糊符号距离,通过与文献[21-25]对比,可知新型犹豫模糊符号距离具有区分度明显,决策结果更加合理、可靠的特点.

3) 针对属性权重完全未知的多属性决策问题,本文利用离差最大化思想,基于新型犹豫模糊符号距离建立了属性权重确定模型,并给出了解的简化形式,之后利用加权符号距离对备选方案进行了排序.

本文方法无需人为添加元素,并且决策时考虑了犹豫模糊元中元素的大小、数量、离散程度等多重影响,因而决策结果具有较好的区分度和稳定性. 当然,在基于犹豫模糊信息进行决策时,主要利用决策者提供的犹豫模糊决策矩阵,而决策者的判断存在一定的主观性. 因此,为了得到更加客观的决策结果,下一步应考虑对犹豫模糊信息进行一致性检验,然后进行适度修正,以便提高决策质量.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Yager R R. On the theory of bags[J]. Int J of General Systems, 1986, 13(1): 23-37.

[4] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[5] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. Proc of the 18th IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Jeju Island, 2009: 1378-1382.

[6] Yavuz M, Oztaysi B, Onar S C, et al. Multi-criteria evaluation of alternative-fuel vehicles via a hierarchical hesitant fuzzy linguistic model[J]. Expert Systems with

Applications, 2015, 42(5): 2835-2848.

[7] Wei G W, Zhao X F, Lin R. Some hesitant interval-valued fuzzy aggregation operators and their applications to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 46(4): 43-53.

[8] Rodriguez R M, Martinez L, Herrera F. A group decision making model dealing with comparative Linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Information Science, 2013, 241(1): 28-42.

[9] Beg I, Rashid T. TOPSIS for hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(12): 1162-1171.

[10] Farhadinia B. Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2013, 240(10): 129-144.

[11] Rodriguez R M, Martinez L, Torra V, et al. Hesitant fuzzy sets: State of the art and future directions[J]. Int J of Intelligent Systems, 2014, 29(6): 495-524.

[12] Farhadinia B. A novel method of ranking hesitant fuzzy values for multiple attribute decision making problems[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(8): 752-767.

[13] Farhadinia B. A series of score functions for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2014, 277(2): 102-110.

[14] Yu D J. Some hesitant fuzzy information aggregation operators based on einstein operational laws[J]. Int J of Intelligent Systems, 2014, 29(4): 320-340.

[15] 王坚强, 吴佳亭. 基于优序关系的犹豫模糊语言多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(5): 887-891.
(Wang J Q, Wu G T. Method for multi-criteria decision-making with hesitant fuzzy linguistic based on outranking relation[J]. Control and Decision, 2015, 30(5): 887-891.)

[16] 阮传扬, 杨建辉, 韩莉娜, 等. 考虑可信度和属性优先级的犹豫模糊决策方法[J]. 运筹与管理, 2016, 25(3): 125-131.
(Ruan C Y, Yang J H, Han L N, et al. Hesitant fuzzy decision making method with confidence levels and preference relations on attributes[J]. Operations Research and Management Science, 2016, 25(3): 125-131.)

[17] Ruan C Y, Yang J H. Hesitant fuzzy multi-attribute decision-making method considering the credibility[J]. J of Computational Information Systems, 2015, 11(2): 423-432.

[18] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[19] Xu Z S. Hesitant fuzzy sets theory[M]. New York: Springer Publishing Company, 2014, 314: 1-466.

[20] 陈秀明, 刘业政. 多粒度犹豫模糊语言环境下未知权重的多属性群推荐方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(9): 1631-1637.
(Chen X M, Liu Y Z. Method of group recommender systems with unknown attribute weights in a multi-granular hesitant fuzzy linguistic term environment[J]. Control and Decision, 2016, 31(9): 1631-1637.)

[21] Li D Q, Zeng W Y, Zhao Y B. Note on distance measure of hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2015, 321(11): 103-115.

[22] Hu J H, Zhang X L. Hesitant fuzzy information measures and their applications in multi-criteria decision making[J]. Int J of Systems Science, 2016, 47(1): 62-76.

[23] Zhang X L, Xu Z S. Hesitant fuzzy QUALIFLEX approach with a signed distance-based comparison method for multiple criteria decision analysis[J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(2): 873-884.

[24] 林松, 刘小弟, 朱建军, 等. 基于改进符号距离的权重未知犹豫模糊决策方法[J]. 控制与决策, 2018, 33(1): 186-192.
(Lin S, Liu X D, Zhu J J, et al. Hesitant fuzzy decision making method with unknown weight information based on an improved signed distance[J]. Control and Decision, 2018, 33(1): 186-192.)

[25] Liao H C, Xu Z S, Zeng X J. Novel correlation coefficients between hesitant fuzzy sets and their application in decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 82(7): 115-127.

[26] Xu Z S, Zhang X L. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(1): 53-64.

[27] Liao H C, Xu Z S, Xia M M. Multiplicative consistency of hesitant fuzzy preference relation and its application in group decision making[J]. Int J of Information Technology & Decision Making, 2014, 13(1): 47-76.

(责任编辑：孙艺红)