

## 考虑缓冲区故障的多产品生产系统的性能分析

杨喜娟<sup>1,3</sup>, 黎锁平<sup>1,2†</sup>, 彭 铎<sup>1</sup>, 蔺 莹<sup>1</sup>

(1. 兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 兰州 730050; 2. 兰州理工大学 理学院, 兰州 730050;  
3. 兰州交通大学 电子与信息工程学院, 兰州 730070)

**摘 要:** 对带有生产准备时间和缓冲区故障且生产时间服从任意分布的多产品生产系统进行分析, 通过构建系统状态向量, 建立其离散时间马尔可夫链模型. 根据多产品生产系统的工作过程对系统状态向量分4种情况进行讨论, 计算出系统的状态转移矩阵; 在计算系统稳态向量的基础上获得系统生产率的计算流程. 根据所建立的模型, 对参数对称且可生产两种产品的多产品生产系统进行详细求解, 给出其系统生产率的计算过程, 通过 Matlab 进行数学实验, 分析总结出缓冲区的无故障率、产品到达率、生产准备时间、服务率及其变异系数对系统生产率的影响.

**关键词:** 多产品生产系统; 缓冲区故障; 马尔可夫链; 系统生产率; 数学实验; 性能分析

中图分类号: F406.2

文献标志码: A

## Performance analysis of multi-product manufacturing system with buffer breakdown

YANG Xi-juan<sup>1,3</sup>, LI Suo-ping<sup>1,2†</sup>, PENG Duo<sup>1</sup>, LIN Ying<sup>1</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;  
2. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 3. School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** This paper analyses the multi-product manufacturing system with setup time, buffer breakdown and arbitrary processing time. The discrete-time Markov chain model is established by constructing the state vector of the system. In order to calculate the system state transition matrix, the system state is divided into four kinds of situation to be discussed according to the production process of the multi-product manufacturing system. On the basis of the system steady-state probability, the calculation procedure of system throughput is further obtained. Based on the proposed model, we give a detailed solution to the multi-product manufacturing system with symmetric parameters which can produce two kinds of products, and provide the calculation formula of system throughput. Through Matlab experiments, the impacts of system parameters on system throughput are analysed and summarized, such as the failure-free rate of buffer, the product arriving rate, the setup time, the processing rate and its coefficient of variation.

**Keywords:** multi-product manufacturing system; buffer breakdown; Markov chain; system throughput; mathematical experiments; performance analysis

## 0 引言

随着市场需求的多样化和企业竞争的全球化, 多产品生产系统在现代化工业生产中占有重要地位. 在这种系统中, 一个生产设备(机器)可以生产两种及以上的产品. 比如, 在家具生产线上, 同一台设备可以生产不同颜色、不同样式、不同功能和性能的家私. 在多产品生产过程中, 为了减少库存空间和生

产周期, 实现精益生产, 在生产系统中为每种产品设置一个缓冲区, 用来临时存放需要加工的产品. 同时, 设备从生产一种产品转到生产另外一种产品时, 需要譬如刀(模)具的准备与更换、机床调整、工件的取放与装卸等产生的生产准备时间. 一般情况下, 生产准备时间是顺序相关的. 在实际生产过程中, 存在机器或缓冲区出现故障、上游的原料供给不足等随机情

收稿日期: 2017-12-08; 修回日期: 2018-02-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61663024); 兰州理工大学红柳一流学科建设计划项目; 教育部春晖计划合作科研项目(Z2016001); 兰州交通大学青年基金项目(2015007).

责任编委: 巩敦卫.

作者简介: 杨喜娟(1980—), 女, 讲师, 博士生, 从事智能制造系统、随机控制及应用的研究; 黎锁平(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事随机控制与随机过程、数据通信与差错控制等研究.

†通讯作者. E-mail: lsuop@163.com.

况. 所以, 多产品生产系统的研究也要考虑随机事件的发生, 即可将多产品生产系统看成是随机系统, 产品的到达速率、机器的服务速率及其生产准备时间分别为服从不同分布的随机变量.

在多产品生产系统的研究中, 对于生产计划<sup>[1-2]</sup>、质量控制<sup>[3]</sup>、设备维修<sup>[4-5]</sup>、生产调度<sup>[6-10]</sup>及带机器故障的生产调度<sup>[11-13]</sup>等诸多确定性方面的研究相对较多, 而多产品随机系统的研究, 特别是带有生产准备时间的多产品随机系统相对而言有更多的研究空白<sup>[14]</sup>. 在已有文献中, 大多考虑的是带有生产准备时间和有限缓存<sup>[15-20]</sup>的设备无故障的多产品生产系统. 但是, 在实际生产过程中, 生产设备的故障是影响生产率的一个重要因素, 而仅有少数学者在研究过程中考虑了此因素. Ahmadi等<sup>[11]</sup>对带有随机机器故障的柔性车间调度进行了分析, 并提出了两种进化算法对此问题进行求解; Han等<sup>[12]</sup>研究了有机器故障的阻塞批量流水线调度问题的多目标模型, 并为求解此模型, 提出了进化多目标鲁棒调度算法; Nouri等<sup>[13]</sup>建立了有机器故障的柔性车间调度的预测调度模型, 并提出了两阶段粒子群优化算法对此问题进行求解; Zhao等<sup>[21-22]</sup>对带有机器故障的柔性家具生产线和一般柔性生产线进行了分析, 并给出了系统的改进意见; Assida等<sup>[23]</sup>对带有机器故障、联合生产和分包的多产品生产系统进行了整体优化; Walid等<sup>[24]</sup>通过分析机器的故障率、修复率及其生产准备时间等参数, 对多产品生产线中缓冲区的容量进行了估计; Colledani等<sup>[25]</sup>通过将复杂的多产品生产线近似地分解成若干由两台机器和中间缓存组成的简单构件, 对带机器故障和有限缓冲区的线性和非线性多产品生产系统进行了分析. 在这些考虑带机器故障的多产品生产系统的文献中, 大多数没有考虑生产准备时间, 且文献中考虑的都是生产机器的故障, 没有考虑缓冲区(或传送设备)的故障.

在多产品生产系统中, 若考虑缓冲区故障, 则此故障对整个生产系统的生产率有怎样的影响? 考虑缓冲区故障后, 产品的到达速率、机器的服务速率及其生产准备时间变化时对整个生产系统的影响情况如何? 为解决这两个问题, 本文对带有缓冲区故障的多产品生产系统进行分析, 建立其离散马尔可夫链模型, 分析和总结出各个参数对系统生产率的影响, 为实际生产提供参考依据.

## 1 模型描述

本文考虑带缓冲区故障和生产准备时间的多产品生产系统. 其模型假定如下: 用  $M$  表示可生产  $m$  种产品的机器, 其结构如图 1(a) 所示. 为了更进一步分

析问题, 这里假设:

1) 各种产品的工件到达相互独立, 且第  $i$  种产品工件的到达是一个泊松过程, 到达速率为  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). 每种产品的工件存放在缓冲区  $B_i$  内.

2) 系统最多容纳第  $i$  种产品的工件数量为  $N_i$  (包含正在加工的一个), 即缓冲区  $B_i$  的容量分别为  $N_i - 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). 若缓冲区  $B_i$  已满, 则系统将不再接收新到达的第  $i$  种产品.

3) 机器  $M$  在同一时刻只能加工一个工件, 且第  $i$  种产品的加工时间  $D_i$  相互独立, 服从服务速率为  $\mu_i$  的任意分布  $G_i(t)$ , 其变异系数为  $CV_i$  ( $CV_i < 1$ ).

4) 机器由生产第  $i$  种产品转为生产第  $j$  种产品之前, 会有一段均值为  $s_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m; i \neq j$ ), 服从指数分布的生产准备时间.

5) 从缓冲区向机器传递工件的过程中会出现故障, 统称为缓冲区故障. 机器在生产第  $i$  种产品的过程中, 每生产完一个工件后检测缓冲区故障. 检测过程中, 缓冲区  $B_i$  以概率  $\alpha_i$  检测到无故障, 以概率  $1 - \alpha_i$  检测到有故障, 且每次检测相互独立. 一旦发现缓冲区  $B_i$  出现故障, 则机器即刻停止生产第  $i$  种产品, 转为为下一种产品作生产准备, 第  $i$  种剩余的产品在下一轮循环中进行生产.

6) 机器  $M$  按  $1, 2, \dots, m, 1, 2, \dots$  的次序循环加工各种产品, 加工第  $i$  种产品时, 一直持续直到检测到缓冲区  $B_i$  有故障出现或缓冲区  $B_i$  为空为止, 然后再转向第  $i + 1$  种产品 ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

7) 机器  $M$  在产品的切换过程中, 如果发现某种产品的缓冲区是空的, 则直接跳过该种产品加工下一种产品, 并且不为该种产品分配生产准备时间; 如果所有缓冲区都是空的, 则机器处于饥饿状态, 等待任何一种产品的工件到来. 如果到来的产品种类与前一个工件不同, 则需要经历一段生产准备时间; 否则, 不需要生产准备时间. 机器  $M$  的生产过程如图 1(b) 所示. 定义系统生产率(即单位时间内系统能够生产出的平均产品件数)为 TP. 由上述模型假定可知, TP 是系统参数的函数, 即

$$TP = f(A, \Gamma, B, N, CV, H).$$

其中

$$A = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m],$$

$$\Gamma = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m],$$

$$B = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m],$$

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_m],$$

$$CV = [CV_1, CV_1, \dots, CV_m],$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & 0 & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

由此可见,系统生产率TP是各种产品到达率、服务率、无故障率、缓冲区大小及其生产准备时间的函数,需要求解的问题就是利用系统参数来计算系统生产率.

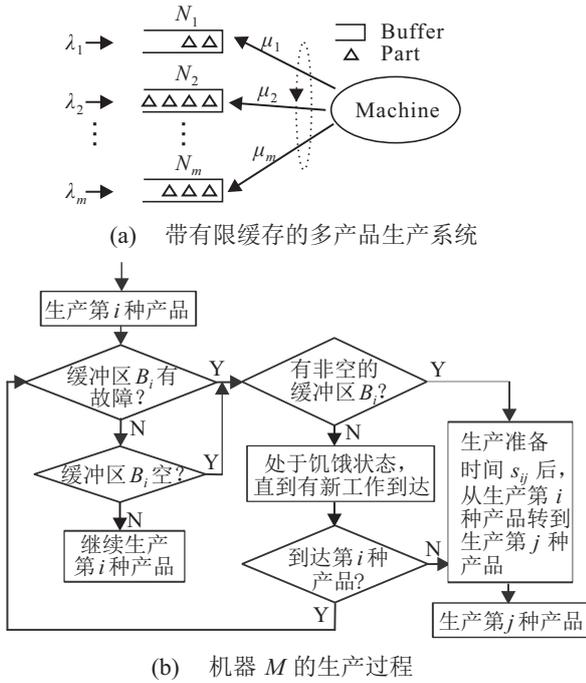


图 1 多产品生产系统描述

## 2 系统性能

### 2.1 状态空间的定义

在假设 1)~假设 7)中,机器 M 的加工时间服从一般分布,不具有无记忆性.为此,将第 n 个工件离开时系统的状态  $S_n = (\eta, \xi, h_1, h_2, \dots, h_m)$  定义为系统状态向量.其中:

- 1)  $\eta$  表示第 n 个工件的产品类型,其取值在  $1 \sim m$  之间.
- 2)  $\xi$  表示缓冲区  $B_\eta$  是否有故障,其取值是 0 或 1.这里:0 表示  $B_\eta$  有故障;1 表示缓冲区  $B_\eta$  无故障,机器 M 可继续加工第  $\eta$  种产品.
- 3)  $h_i (i = 1, 2, \dots, m)$  表示缓冲区  $B_i$  中工件的数量,其取值可在  $0 \sim N_i - 1$  之间变化.当  $h_1 = h_2 = \dots = h_m = 0$  时,系统中无工件,机器 M 处于饥饿状态.

在假设 1)~假设 7)下,  $S_n$  具有马尔可夫链的特性.

**定理 1** 在假设 1)~假设 7)下,  $S_n$  是一个离散时间马尔可夫链.

**证明** 如果给定  $S_n = (\eta, \xi, h_1, h_2, \dots, h_m)$ , 则  $S_{n+1} = (\eta', \xi', h'_1, h'_2, \dots, h'_m)$  由下述情况决定:

$$\eta' = \begin{cases} \eta, & h_\eta \neq 0, \xi = 1; \\ i, & h_\eta \neq 0, \xi = 0, \exists h_i \neq 0 \text{ 或 } h_\eta = 0, \\ & \xi = 1, \exists h_i \neq 0; \\ j, & \forall h_i = 0, \text{ 第 } j \text{ 种产品先到达.} \end{cases}$$

$$\xi' = \begin{cases} 1, & B_{\eta'} \text{ 无故障;} \\ 0, & B_{\eta'} \text{ 有故障.} \end{cases}$$

同时

$$h'_i = \begin{cases} \min(h_i + A_{i,n} - 1), & i = \eta'; \\ \min(h_i + A_{i,n}, N_i - 1), & i \neq \eta'. \end{cases}$$

其中  $A_{i,n}$  表示在第 n 个工件完成后到第 n + 1 个工件完成期间到达的第 i 种产品的工件数.

从上述状态转移过程可知,状态  $S_{n+1}$  仅与状态  $S_n$  有关,而与状态  $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots$  无关,即  $P\{S_{n+1} = s_{n+1} | S_n = s_n, S_{n-1} = s_{n-1}, \dots, S_0 = s_0\} = P\{S_{n+1} = s_{n+1} | S_n = s_n\}$ .由此,  $S_n$  是一个嵌入马尔可夫链,即为离散时间马尔可夫链. □

从状态空间  $\{S_n = (\eta, \xi, h_1, h_2, \dots, h_m), \eta = 1, 2, \dots, m; \xi = 0, 1; h_i = 0, 1, \dots, N_i - 1; i = 1, 2, \dots, m\}$  可知,有效状态个数 K 的值为

$$K = 2m \prod_{i=1}^m N_i. \quad (1)$$

### 2.2 转移矩阵 $Q_{K \times K}$ 的构建和稳态解的求解

令  $P_{S_n, S_{n+1}}$  表示从状态  $S_n = (\eta, \xi, h_1, h_2, \dots, h_m)$  到状态  $S_{n+1} = (\eta', \xi', h'_1, h'_2, \dots, h'_m)$  的转移概率,则可根据状态  $S_n$  的情况,计算相应的  $P_{S_n, S_{n+1}}$ ,从而构建状态转移矩阵  $Q_{K \times K}$ .

**情况 1**  $S_n = (\eta, \xi, h_1, h_2, \dots, h_m), h_\eta \neq 0$  且  $\xi = 1$ .

这种情况表示刚生产完的工件是第  $\eta$  种产品,缓存区  $B_\eta$  非空且无故障.根据模型假定 6)中工件的生产规则,系统将 继续生产第  $\eta$  种产品,直到缓存区为空或缓冲区出现故障.从状态  $S_n$  到状态  $S_{n+1}$  转移过程中,仅仅缓存区  $B_\eta$  的工件数会减少,且减少的件数不超过 1.因此,对于  $\eta' \neq \eta$  或者除缓存区  $B_\eta$  外工件数量会减少的状态  $S_{n+1}$ ,从状态  $S_n$  到状态  $S_{n+1}$  的转移概率均为 0.由于各种产品的到达、缓冲区故障的检测是相互独立的,从状态  $S_n$  到其他状态  $S_{n+1}$  的转移概率为

$$P_{S_n, S_{n+1}} = p(\xi \rightarrow \xi') \cdot \int_0^\infty \left[ \prod_{i=1}^m p(h_i \rightarrow h'_i) \right] dG_\eta(t). \quad (2)$$

其中:  $t$  是工件的生产时间,  $p(\xi \rightarrow \xi')$  是缓冲区  $B_\eta$  的

故障状态从 $\xi$ 转为 $\xi'$ 的概率,  $p(h_i \rightarrow h'_i)$ 是缓冲区 $B_\eta$ 的工件数量从 $h_i$ 变化到 $h'_i$ 的概率. 由模型假设, 有

$$p(h_i \rightarrow h'_i) = \begin{cases} \frac{(\lambda_i t)^{(h'_i - h_i + 1)} e^{-\lambda_i t}}{(h'_i - h_i + 1)!}, & i = \eta' \text{ 且 } h_i - 1 \leq h'_i < N_i - 1; \\ \frac{(\lambda_i t)^{(h'_i - h_i)} e^{-\lambda_i t}}{(h'_i - h_i)!}, & i \neq \eta' \text{ 且 } h_i \leq h'_i < N_i - 1; \\ 1 - \sum_{h=h_i}^{h'_i-1} \frac{(\lambda_i t)^{(h-h_i+1)} e^{-\lambda_i t}}{(h-h_i+1)!}, & i = \eta' \text{ 且 } h'_i = N_i - 1; \\ 1 - \sum_{h=h_i}^{h'_i-1} \frac{(\lambda_i t)^{(h-h_i)} e^{-\lambda_i t}}{(h-h_i)!}, & i \neq \eta' \text{ 且 } h'_i = N_i - 1; \\ 0, & i = \eta' \text{ 且 } h'_i < h_i - 1 \text{ 或 } i \neq \eta' \text{ 且 } h'_i < h_i. \end{cases}$$

$$p(\xi \rightarrow \xi') = \begin{cases} \alpha_\eta, & \xi' = 1; \\ 1 - \alpha_\eta, & \xi' = 0. \end{cases}$$

另外,  $G_\eta(t)$ 是生产时间的累积分布函数. 特别地, 当 $G_\eta(t)$ 是任意分布时, 式(2)可以通过具体数值计算出来. 但当 $G_\eta(t)$ 服从一定的分布时, 可以得到其解析解. 这里假设 $G_\eta(t) \sim \text{Erlang}(l_i, \Lambda_i)$ , 则有

$$dG_\eta(t) = \frac{l_i \Lambda_i t^{\Lambda_i - 1} e^{-l_i t}}{(\Lambda_i - 1)!} dt. \quad (3)$$

**情况2**  $S_n = (\eta, \xi, h_1, h_2, \dots, h_m), h_\eta = 0$ 或 $\xi = 0, \exists j \neq \eta, h_j \neq 0$ .

这种情况表示刚生产完的工件是第 $\eta$ 种产品, 其缓存区 $B_\eta$ 为空或是缓存区 $B_\eta$ 出现故障, 机器将按照相应的生产策略生产下一种缓存区非空的产品. 这种情况下, 系统将先经过一段生产准备时间后进入实际生产, 而 $\eta'$ 则可由状态 $S_n$ 根据生产策略确定. 在状态 $S_{n+1}$ 中, 不满足生产策略的 $\eta'$ 及其缓冲区工件数量下降的状态是不可达的, 对于其他状态, 有

$$P_{S_n, S_{n+1}} = \sum_{\Delta} \left( \int_0^\infty \left[ \prod_{i=1}^m p(h_i \rightarrow \Delta) \right] dF_{\eta\eta'}(t) \right) \times \left( \int_0^\infty \left[ \prod_{i=1}^m p(\Delta \rightarrow h'_i) \right] dG_\eta(t) \right) \cdot p(\xi \rightarrow \xi').$$

其中:  $\Delta$ 表示机器完成从第 $\eta$ 种产品到第 $\eta'$ 种产品的生产准备后, 各缓存区中可能的工件数量;  $F_{\eta\eta'}(t)$ 表示生产准备时间的分布函数, 同时有

$$p(\xi \rightarrow \xi') = \begin{cases} \alpha_{\eta'}, & \xi' = 1; \\ 1 - \alpha_{\eta'}, & \xi' = 0. \end{cases}$$

**情况3**  $S_n = (\eta, \xi, h_1, h_2, \dots, h_m), h_1 = h_2 = \dots = h_m = 0$ 且 $\xi = 1$ .

这种情况下所有的缓冲区都没有工件, 且缓存区 $B_\eta$ 无故障, 即机器处于饥饿状态, 直到有新的工件到达. 若到达的工件种类与最后生产的工件种类相同, 则直接进入生产阶段; 否则, 系统将先进行生产准备阶段, 再进行生产阶段. 这种情况下, 所有状态都是可达的,  $\eta'$ 由最先到达的产品的种类决定, 且第 $i$ 种产品到达的概率为 $\lambda_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i$ . 根据新到达的工件与最后一次生产完的工件种类是否相同, 有

$$P_{S_n, S_{n+1}} = \begin{cases} \frac{\lambda_\eta}{m} \times P\{\text{情况1}\}, & \eta' = \eta; \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \\ \frac{\lambda_{\eta'}}{m} \times P\{\text{情况2}\}, & \eta' \neq \eta. \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \end{cases}$$

**情况4**  $S_n = (\eta, \xi, h_1, h_2, \dots, h_m), \xi = 0, \forall j \neq \eta, h_j = 0$ .

这种情况下缓存区 $B_\eta$ 出现故障, 而其他的缓冲区都没有工件可生产. 此时机器处于等待状态, 直到有其他种类的工件到达, 而剩余的第 $\eta$ 种产品在下一轮循环时生产. 若有新的工件到达, 则系统需要经历生产准备阶段后, 再进入生产阶段. 状态 $S_{n+1}$ 中,  $\eta' = \eta$ 及其 $h_\eta$ 数量减少的状态是不可达的. 对于其他状态, 有

$$P_{S_n, S_{n+1}} = \frac{\lambda_{\eta'}}{m} \times P\{\text{情况2}\}, \eta' \neq \eta. \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

至此, 完成了状态转移矩阵 $Q_{K \times K}$ 的构建.

设 $\pi_n$ 为状态 $S_n = (\eta, \xi, h_1, h_2, \dots, h_m)$ 的稳态分布概率, 系统稳态概率 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K)$ 可通过求解平衡方程组求得.

### 2.3 系统生产率的计算

通过上文计算出的系统稳态概率可以得到系统生产率. 系统生产率的计算过程如下.

假设成功生产一个工件的两个状态为 $S_n$ 和 $S_{n+1}$ . 根据 $S_n$ 的情况可以计算出生产第 $n+1$ 个工件的时间间隔. 若 $S_n$ 为情况1的状态, 则第 $n+1$ 个工件的种类为 $\eta$ , 其平均时间间隔为生产一个第 $\eta$ 种产品工件的平均生产时间 $E_\eta (E_\eta = 1/\mu_\eta)$ . 若 $S_n$ 为情况2的状态, 则第 $n+1$ 个工件的种类为新产品种类 $\eta'$ , 这种情况下存在生产准备时间, 其平均时间间隔由生产准备时间 $s_{\eta, \eta'}$ 与生产一个第 $\eta'$ 种产品工件的平均生产时间 $E_{\eta'} (E_{\eta'} = 1/\mu_{\eta'})$ 两部分构成. 若 $S_n$ 为情况3的状态, 则第 $n+1$ 个工件的种类 $\eta'$ 为最先达到的新产品的种类, 且到达的新产品的种类为 $\eta'$ 的概

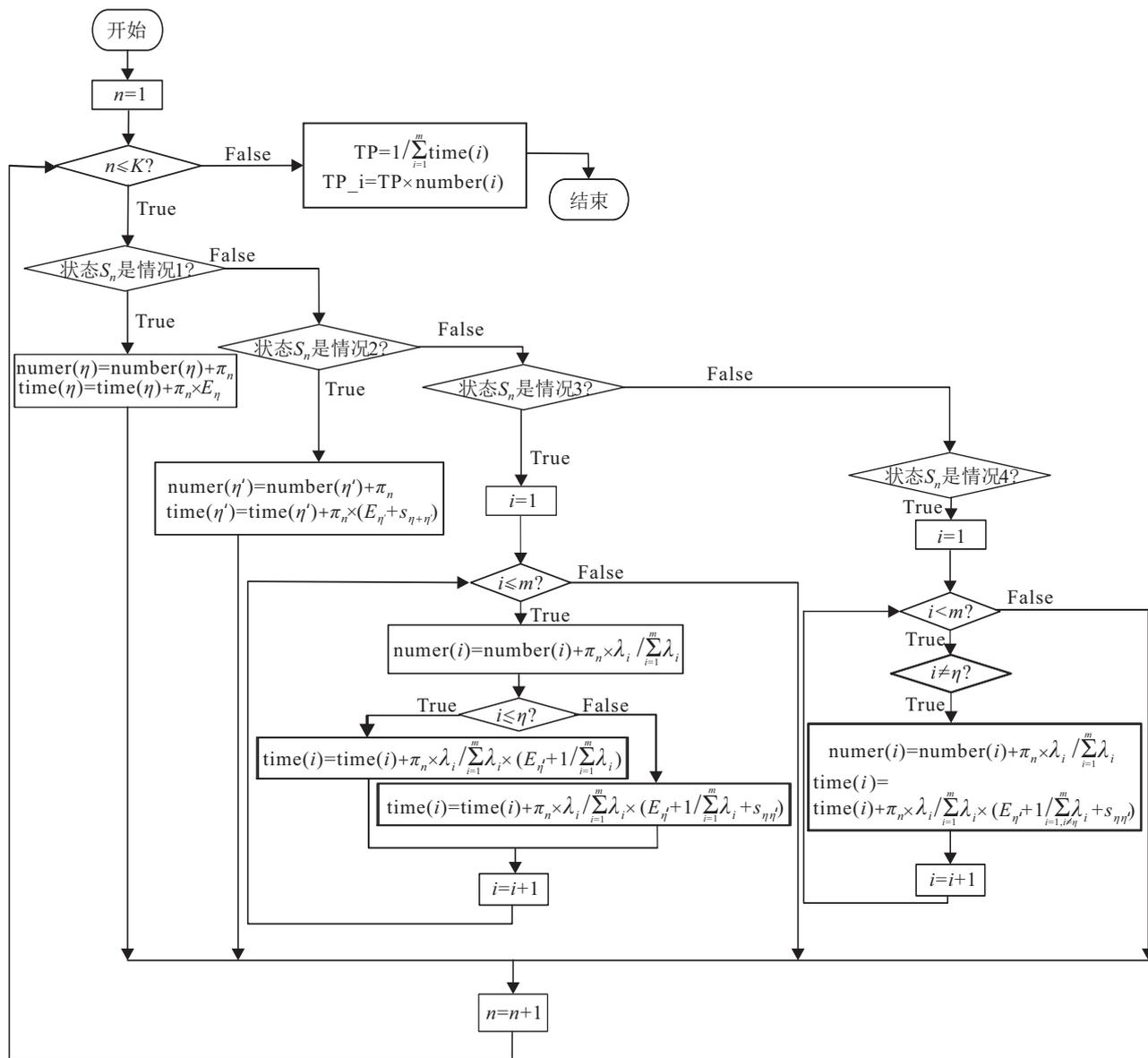


图2 系统生产率及各种产品生产率的计算流程

率为  $\lambda_{\eta'} / \sum_{i=1}^m \lambda_i$ . 若  $\eta' \neq \eta$ , 则平均时间间隔由系统的平均等待时间  $1 / \sum_{i=1}^m \lambda_i$ 、生产准备时间  $s_{\eta, \eta'}$  和生产一个第  $\eta'$  种产品工件的平均生产时间  $E_{\eta'}$  三部分构成; 若  $\eta' = \eta$ , 则无生产准备时间, 平均时间间隔仅由系统的平均等待时间  $1 / \sum_{i=1}^m \lambda_i$  和生产一个第  $\eta'$  种产品工件的平均生产时间  $E_{\eta'}$  两部分构成. 若  $S_n$  为情况4的状态, 则第  $n + 1$  个工件的种类  $\eta'$  为非  $\eta$  的、最先达到的新产品的种类, 平均时间间隔由系统的平均等待时间  $1 / \sum_{i=1, i \neq \eta}^m \lambda_i$ 、生产准备时间  $s_{\eta, \eta'}$  和生产一个第  $\eta'$  种产品工件的平均生产时间  $E_{\eta'}$  三部分构成.

计算系统生产率的流程如图2所示.

### 3 系统性能分析

#### 3.1 参数相同的两种产品的系统性质

利用上述方法, 首先分析系统中仅有两种产品 ( $m = 2$ ) 且其参数完全相同的情况下, 系统生产率的性质.

**定义1** 在假设1)~假设7)中, 令  $m = 2, N_1 = N_2 = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \mu_1 = \mu_2 = \mu, s_{12} = s_{21} = s, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , 同时, 机器生产两种产品的生产时间服从参数  $l$  的  $\Lambda$  阶埃尔朗分布, 称这种系统为埃尔朗-2 系统.

由定义1可得

$$E_1 = E_2 = E = \frac{\Lambda}{l} = \mu^{-1},$$

$$CV_1 = CV_2 = CV = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}.$$

对于埃尔朗-2 系统的系统生产率的求解过程如下:

由  $m = 2, N_1 = N_2 = 2$  和式(1)可知,系统的有效状态的个数为

$$K = 2m \prod_{i=1}^m N_i = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16.$$

这些状态分别为

$$\begin{aligned} S_1 &= (1, 1, 0, 0), S_2 = (1, 1, 0, 1), \\ S_3 &= (1, 1, 1, 0), S_4 = (1, 1, 1, 1), \\ S_5 &= (1, 0, 0, 0), S_6 = (1, 0, 0, 1), \\ S_7 &= (1, 0, 1, 0), S_8 = (1, 0, 1, 1), \\ S_9 &= (2, 1, 0, 0), S_{10} = (2, 1, 0, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{11} &= (2, 1, 1, 0), S_{12} = (2, 1, 1, 1), \\ S_{13} &= (2, 0, 0, 0), S_{14} = (2, 0, 0, 1), \\ S_{15} &= (2, 0, 1, 0), S_{16} = (2, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

同时,两种产品的生产时间服从参数为  $l$  的  $\Lambda$  阶埃尔朗分布,由式(3)可得

$$dG(t) = \frac{l^\Lambda t^{\Lambda-1} e^{-lt}}{(\Lambda-1)!} dt. \tag{4}$$

将式(4)代入(2)可求解出系统的状态转移概率,从而得到系统状态转移矩阵  $Q$  如下( $Q$  是  $16 \times 16$  的矩阵,先显示  $1 \sim 8$  列,再显示  $9 \sim 16$  列):

$$Q(:, 1 \sim 8) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha a}{2} & \frac{ab}{2} & \frac{ab}{2} & \frac{ac}{2} & \frac{(1-\alpha)a}{2} & \frac{(1-\alpha)b}{2} & \frac{(1-\alpha)b}{2} & \frac{(1-\alpha)c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha a & ab & ab & ac & (1-\alpha)a & (1-\alpha)b & (1-\alpha)b & (1-\alpha)c \\ 0 & \alpha(a+b) & 0 & \alpha(c+b) & 0 & (1-\alpha)(a+b) & 0 & (1-\alpha)(c+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha d}{2} & \frac{\alpha e}{2} & \frac{\alpha e}{2} & \frac{\alpha f}{2} & \frac{(1-\alpha)d}{2} & \frac{(1-\alpha)e}{2} & \frac{(1-\alpha)e}{2} & \frac{(1-\alpha)f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha d & \alpha e & \alpha e & \alpha f & (1-\alpha)d & (1-\alpha)e & (1-\alpha)e & (1-\alpha)f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha d}{2} & \frac{\alpha e}{2} & \frac{\alpha e}{2} & \frac{\alpha f}{2} & \frac{(1-\alpha)d}{2} & \frac{(1-\alpha)e}{2} & \frac{(1-\alpha)e}{2} & \frac{(1-\alpha)f}{2} \\ 0 & \frac{\alpha d}{2} & 0 & \frac{\alpha e}{2} & 0 & \frac{(1-\alpha)d}{2} & 0 & \frac{(1-\alpha)e}{2} \\ \alpha d & \alpha e & \alpha e & \alpha f & (1-\alpha)d & (1-\alpha)e & (1-\alpha)e & (1-\alpha)f \\ 0 & \alpha d & 0 & \alpha e & 0 & (1-\alpha)d & 0 & (1-\alpha)e \end{bmatrix},$$

$$Q(:, 9 \sim 16) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha d}{2} & \frac{\alpha e}{2} & \frac{\alpha e}{2} & \frac{\alpha f}{2} & \frac{(1-\alpha)d}{2} & \frac{(1-\alpha)e}{2} & \frac{(1-\alpha)e}{2} & \frac{(1-\alpha)f}{2} \\ \alpha d & \alpha e & \alpha e & \alpha f & (1-\alpha)d & (1-\alpha)e & (1-\alpha)e & (1-\alpha)f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha d}{2} & \frac{\alpha e}{2} & \frac{\alpha e}{2} & \frac{\alpha f}{2} & \frac{(1-\alpha)d}{2} & \frac{(1-\alpha)e}{2} & \frac{(1-\alpha)e}{2} & \frac{(1-\alpha)f}{2} \\ \alpha d & \alpha e & \alpha e & \alpha f & (1-\alpha)d & (1-\alpha)e & (1-\alpha)e & (1-\alpha)f \\ 0 & 0 & \frac{\alpha d}{2} & \frac{\alpha e}{2} & 0 & 0 & \frac{(1-\alpha)d}{2} & \frac{(1-\alpha)e}{2} \\ 0 & 0 & \alpha d & \alpha e & 0 & 0 & (1-\alpha)d & (1-\alpha)e \\ \frac{\alpha a}{2} & \frac{ab}{2} & \frac{ab}{2} & \frac{ac}{2} & \frac{(1-\alpha)a}{2} & \frac{(1-\alpha)b}{2} & \frac{(1-\alpha)b}{2} & \frac{(1-\alpha)c}{2} \\ \alpha a & ab & ab & ac & (1-\alpha)a & (1-\alpha)b & (1-\alpha)b & (1-\alpha)c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(a+b) & \alpha(c+b) & 0 & 0 & (1-\alpha)(a+b) & (1-\alpha)(c+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

其中

$$a = \frac{l^A}{(2\lambda + l)^A},$$

$$b = \frac{l^A}{(\lambda + l)^A} - \frac{l^A}{(2\lambda + l)^A},$$

$$c = 1 - \frac{2l^A}{(\lambda + l)^A} + \frac{l^A}{(2\lambda + l)^A},$$

$$d = \frac{1}{\lambda s + 1} \times \frac{l^A}{(2\lambda + l)^A},$$

$$f = \frac{1}{\lambda s + 1} \times \frac{l^A}{(\lambda + l)^A} - \frac{\lambda s - 1}{\lambda s + 1} \times \frac{l^A}{(2\lambda + l)^A},$$

$$g = \frac{1}{(\lambda s + 1)} \left[ 1 + \frac{(\lambda s - 2)l^A}{(\lambda + l)^A} + \frac{(1 - \lambda s)l^A}{(2\lambda + l)^A} \right].$$

设系统的稳态状态概率

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{16}),$$

由参数及状态的对称性可得

$$\pi_{i+4} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \pi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12;$$

$$\pi_9 = \pi_1;$$

$$\pi_{10} = \pi_3;$$

$$\pi_{11} = \pi_2;$$

$$\pi_{12} = \pi_4.$$

代入平衡方程组  $\pi = \pi Q, \pi \vec{e} = 1$ , 可得到简化后的平衡方程组为

$$\begin{cases} \left( \frac{\alpha a + d}{2} - 1 \right) \pi_1 + d\pi_2 + \alpha a\pi_3 = 0, \\ \frac{\alpha c + f}{2} \pi_1 + f\pi_2 + \left( \alpha c + \frac{(1 - \alpha)e}{2} \right) \pi_3 + \\ [\alpha(c + b) + e(1 - \alpha) - 1] \pi_4 = 0, \\ \frac{\alpha b + e}{2} \pi_1 + (e - 1)\pi_2 + \alpha b\pi_3 + \alpha(a + b)\pi_4 = 0, \\ \frac{\alpha b + e}{2} \pi_1 + e\pi_2 + \left[ (\alpha b - 1) + \frac{(1 - \alpha)d}{2} \right] \pi_3 + \\ (1 - \alpha)d\pi_4 = 0, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

求解此方程组可得  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ , 从而得到系统的稳态状态概率  $\pi$ .

对状态  $S_1 \sim S_{16}$  进行分析, 其中属于情况1的状态有  $S_3, S_4, S_{10}, S_{12}$ , 属于情况2的状态有  $S_2, S_6, S_8, S_{11}, S_{15}, S_{16}$ , 属于情况3的状态有  $S_1, S_9$ , 属于情况4的状态有  $S_5, S_7, S_{13}, S_{14}$ . 由图2的计算流程可求得系统平均循环时间为

$T =$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \lambda^{-1} + \frac{1}{2} s + E \right) \pi_1 + (E + s) \pi_2 + E \pi_3 + E \pi_4 + \\ & \frac{1}{2} (\lambda^{-1} + s + E) \pi_5 + (E + s) \pi_6 + (E + s) \pi_8 + \\ & \frac{1}{2} (\lambda^{-1} + s + E) \pi_7 + \left( \frac{1}{2} \lambda^{-1} + \frac{1}{2} s + E \right) \pi_9 + \\ & E \pi_{10} + (E + s) \pi_{11} + E \pi_{12} + \frac{1}{2} (\lambda^{-1} + s + E) \pi_{13} + \\ & \frac{1}{2} (\lambda^{-1} + s + E) \pi_{14} + (E + s) \pi_{15} + (E + s) \pi_{16} = \\ & E \left( \frac{1 + \alpha}{\alpha} \pi_1 + \frac{2}{\alpha} \pi_2 + \frac{1 + \alpha}{\alpha} \pi_3 + \frac{2}{\alpha} \pi_4 \right) + \\ & s \left( \frac{1}{\alpha} \pi_1 + \frac{2}{\alpha} \pi_2 + \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \pi_3 + \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \pi_4 \right) + \\ & \lambda^{-1} \left( \frac{1}{\alpha} \pi_1 + \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \pi_3 \right). \end{aligned}$$

从而求得系统的生产率

$$TP = \frac{1}{T},$$

两种产品的生产率

$$TP_1 = TP_2 = \frac{1}{2T}.$$

由系统平均循环时间的表达式可知, 当  $\alpha = 1$  时,  $T$  的表达式与文献 [20] 有相同的表达式, 即文献 [20] 是当前论述的特殊形式.

为了研究基于参数  $\alpha, CV, \lambda, \mu, s$  的埃尔朗-2 系统性质, 在 Matlab (Matlab R2016a) 平台下, 进行大量各参数对系统生产率影响情况的数学实验. 限定各参数的取值范围为:  $\alpha \in [0.05, 1], CV \in [0.05, 1], \lambda \in [0, 10], \mu \in [0, 10], s \in [0, 10]$ . 图3~图7分别为部分参数限定下, 各参数对系统生产率的影响情况.

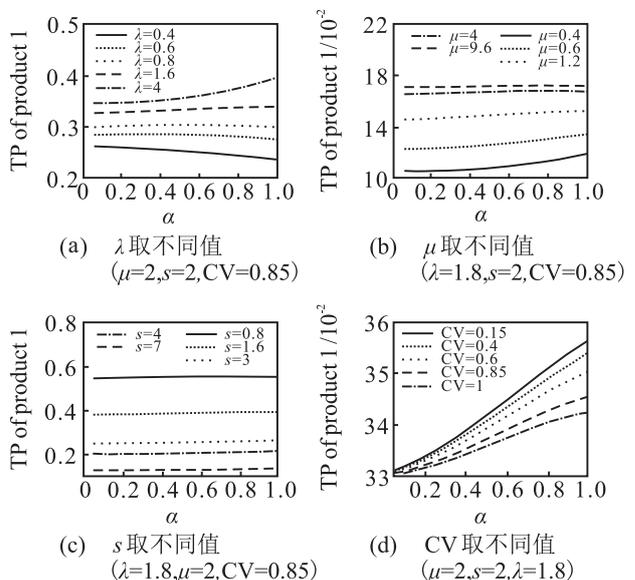


图3 无故障率  $\alpha$  对生产率的影响

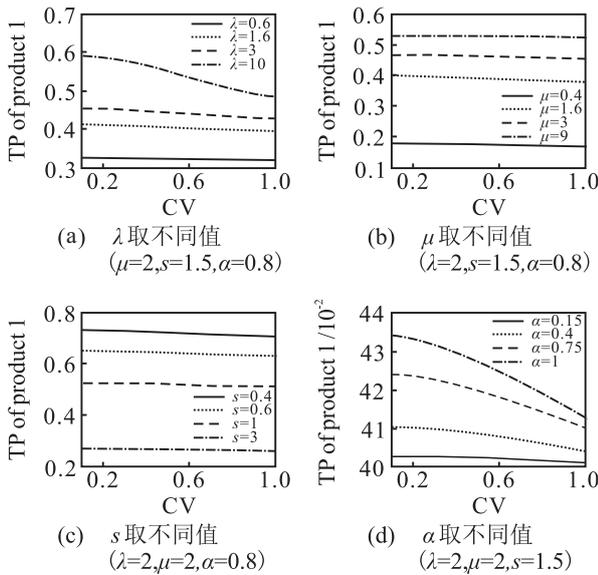


图4 变异系数CV对生产率的影响

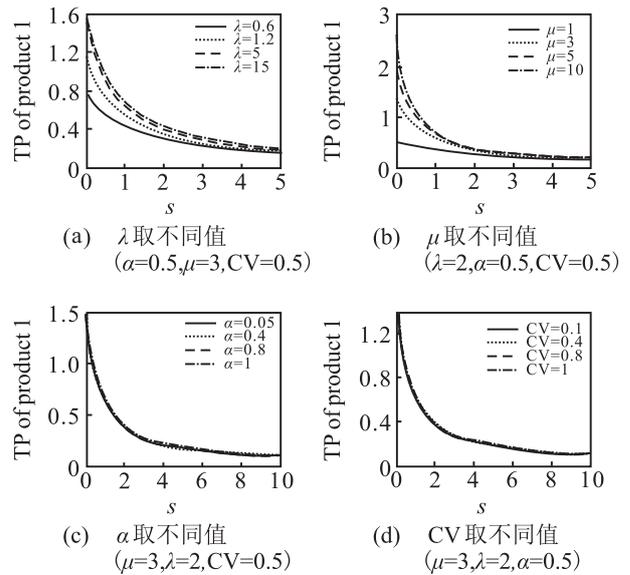


图7 生产准备时间s对生产率的影响

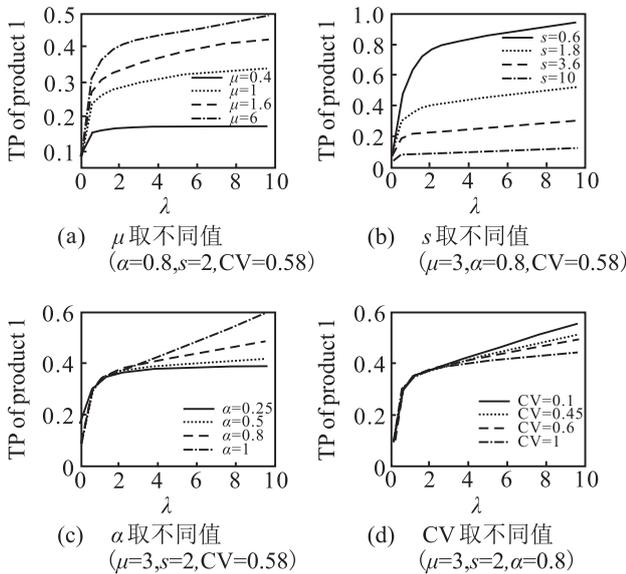


图5 到达率λ对生产率的影响

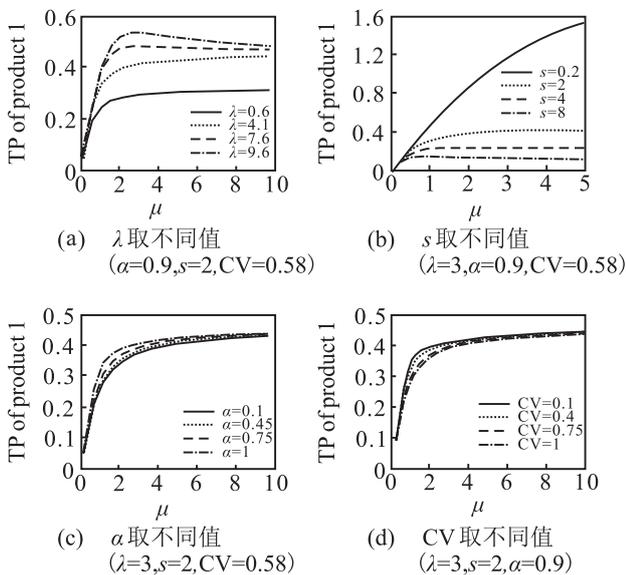


图6 服务速率μ对生产率的影响

由图3可知,无故障率 $\alpha$ 对系统生产率的影响具有不确定性.这种不确定性主要受产品的到达速率 $\lambda$ 的影响.在图3(a)的参数设定下,当 $\lambda$ 的值比较小时,随着 $\alpha$ 的递增,系统生产率呈递减的趋势,当 $\lambda$ 增大时,随着 $\alpha$ 的递增,系统生产率呈递增的趋势;图3(a)~图3(c)分别给出了当 $\lambda = 1.8$ 时,参数 $\mu$ 、 $s$ 、 $CV$ 不同取值时系统生产率的变化情况,可以看出,当 $\lambda$ 的值确定下来后,参数 $\mu$ 、 $s$ 、 $CV$ 的取值对参数 $\alpha$ 的系统性质影响较小.

由图4可知,在其他参数确定的情况下,分别变化参数 $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $s$ 、 $\alpha$ 的取值,系统生产率都有随着参数 $CV$ 的递增而递减的趋势,且参数 $\lambda$ 和 $\alpha$ 的取值对参数 $CV$ 系统性质的影响较大,参数 $\mu$ 和 $s$ 的取值影响较小.

从图5可以看出,在其他参数确定的情况下,分别变化参数 $\mu$ 、 $\alpha$ 、 $s$ 及 $CV$ 的取值,系统生产率随着参数 $\lambda$ 的递增而递增,同时参数 $\mu$ 和 $s$ 的取值对参数 $\lambda$ 的系统性质的影响较大,参数 $\alpha$ 和 $CV$ 的取值影响较小,且不同的参数 $\alpha$ 或 $CV$ 在参数 $\lambda$ 较小时几乎有相同的生产率,当参数 $\lambda$ 增大到一定程度时,取值才有差异.

从图6可以看出,对于不同的参数 $\alpha$ 、 $CV$ ,系统生产率都随着参数 $\mu$ 的递增而递增,而对于不同的参数 $\lambda$ 、 $s$ ,当 $\lambda$ 或 $s$ 的值较小时,系统生产率随着参数 $\mu$ 的递增而递增,但随着 $\lambda$ 或 $s$ 的值增大,系统生产率随着参数 $\mu$ 的递增有先递增后递减的趋势.同时可以看出,参数 $\lambda$ 和 $s$ 对参数 $\mu$ 的系统性质影响较大,而参数 $\alpha$ 和 $CV$ 对参数 $\mu$ 的系统性质影响较小.

从图7可以看出,对于不同的参数 $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\alpha$ 和 $CV$ ,系统的生产率都随着生产准备时间 $s$ 的递增而递减;

同时,从图7(c)和图7(d)可以看出,生产准备时间 $s$ 的系统性质受参数 $\alpha$ 和CV的影响比较小,而受参数 $\lambda$ 、 $\mu$ 的影响较大。

### 3.2 一般多品种生产系统的系统性质

为了研究可生产两种以上产品的多产品生产系统的系统性质,本文进行大量的数学实验.通过实验发现,机器可生产3种产品的多产品生产系统也具有埃尔朗-2系统的性质.实验中,各参数的设定情况如下:可生产的产品种类为3种,各种产品到达率的取值为 $\{1, 5\}$ .各缓冲区的大小是相等的,取值为 $\{3, 4\}$ ,取其无故障概率的取值为 $\{0.5, 1\}$ .服务速率及其变异系数取值分别为 $\{0.5, 2.5\}$ 和 $\{0.5, 0.75\}$ ,且都服从埃尔朗分布.各种产品的生产准备时间的取值为 $\{0.5, 2, 10\}$ ,且从第 $i$ 种产品到第 $j$ 种产品的生产准备时间与从第 $j$ 种产品到第 $i$ 种产品的生产准备时间是相等的。

事实上,一般的多产品生产系统也具有埃尔朗-2系统的性质.特别地,受到达率 $\lambda_i (i \in 1, 2, \dots, m)$ 的影响,缓冲区无故障率 $\alpha_i (i \in 1, 2, \dots, m)$ 对系统生产率的影响具有不确定性.一般地,当 $\lambda_i$ 较小时,系统生产率随着 $\alpha_i$ 的递增呈递减的趋势;当 $\lambda_i$ 增大至某一值之后,系统生产率随着 $\alpha_i$ 的递增呈递增的趋势.在系统稳态下,随着每种产品的 $CV_i (i \in 1, 2, \dots, m)$ 的递增,系统生产率有递减的趋势,且 $\lambda_i$ 和 $\alpha_i$ 的取值对参数 $CV_i$ 系统性质的影响较大.系统生产率随着 $\lambda_i$ 的递增而递增,同时参数 $\mu_i (i \in 1, 2, \dots, m)$ 和 $s_{ij} (i \in 1, 2, \dots, m, j \in 1, 2, \dots, m)$ 的取值对参数 $\lambda_i$ 的系统性质的影响较大.系统生产率随着 $s_{ij}$ 的递增而递减,同时,对第 $i (i \in 1, 2, \dots, m)$ 种产品而言,若 $\lambda_i s_{ij} / \alpha_i (j \in 1, 2, \dots, m)$ 的值较小,则系统生产率随着参数 $\mu_i$ 的递增而递增;若 $\lambda_i s_{ij} / \alpha_i$ 值较大,则系统生产率随着参数 $\mu_i$ 的递增有先递增后递减的趋势,且 $\lambda_i s_{ij} / \alpha_i$ 值的界限在 $N_i / 2$ 左右。

## 4 结论

本文使用离散时间马尔可夫链模型对带有生产准备时间和缓冲区故障的多产品生产系统的系统性能进行了分析.针对模型中机器加工时间的无后效性,对模型中机器的生产过程进行了分析,分情况讨论状态的转移情况来计算系统状态转移矩阵.在假设缓冲区故障服从伯努利分布,服务时间服从埃尔朗分布的基础上,可以较准确地估算出系统生产率,并通过仿真实验对系统性能进行了进一步地分析.本文对多产品生产系统中的缓冲区故障这一重要因素

进行了初探,总结出的仿真规律能为实际生产提供参考依据,并对于进一步研究带有缓冲区故障的多产品生产系统的定性理论很有启发性.在后续的工作中,将考虑更为一般的情况,如缓冲区故障服从其他类型的随机分布,或同时考虑缓冲区的故障率和修复率及多阶段多产品生产系统中缓冲区的故障情况等。

### 参考文献(References)

- [1] 华中生, 徐晓燕. PWB装配线综合生产能力计划模型及其近似求解算法[J]. 自动化学报, 2000, 26(4): 557-562.  
(Hua Z S, Xu X Y. Modeling line capacity planning for PWB assembly systems and its approximate solution algorithms[J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(4): 557-562.)
- [2] 薛贵森, 周泓, 上官春霞. 多产品环境下的一种递阶生产计划系统[J]. 计算机集成制造系统, 2009, 15(12): 2356-2362.  
(Xue G S, Zhou H, Shanguan C X. Hierarchical production planning systems in a multi-product environment[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2009, 15(12): 2356-2362.)
- [3] 肖田元, 乔桂秀, 韩向利, 等. 汽车制造业大批量定制实施策略及关键技术[J]. 计算机集成制造系统, 2001, 7(9): 1-7.  
(Xiao T Y, Qiao G X, Han X L, et al. Implementing strategy and key technologies of mass customization in automotive manufacturing[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2001, 7(9): 1-7.)
- [4] 李波, 吴志明, 王强. 多产品半柔性并联生产线预防性维修调度模型研究[J]. 电子科技大学学报, 2011, 40(5): 791-795.  
(Li B, Wu Z M, Wang Q. Research on preventive maintenance scheduling model for multi-products and semi-flexible parallel production line[J]. J of University of Electronic Science and Technology of China, 2011, 40(5): 791-795.)
- [5] 王祺, 陈晓亮. 一种用于柔性制造系统混惑状态估计的算法[J]. 西安电子科技大学学报: 自然科学版, 2017, 44(2): 69-74.  
(Wang Q, Chen X L. Algorithm for estimating confusion states of flexible manufacturing systems[J]. J of Xidian University: Natural Science Edition, 2017, 44(2): 69-74.)
- [6] 李艳君, 吴铁军. 用于柔性流程工业生产调度的并行多目标遗传算法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 6: 7-12.  
(Li Y J, Wu T J. A novel parallel multi-objective genetic algorithm for process industry production scheduling[J]. System Engineering—Theory & Practice, 2001, 21(6): 7-12.)

- [7] 侯世旺, 朱慧明, 夏莉. 基于SimEvent的多产品多阶段看板生产系统设计与分析[J]. 计算机集成制造系统, 2014, 20(10): 2385-2394.  
(Hou S W, Zhu H M, Xia L. Design and analysis of Kanban production systems based on SimEvent simulation[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2014, 20(10): 2385-2394.)
- [8] 桂忠艳, 杨静, 谢志强. 基于剪枝分层的柔性加工车间调度算法[J]. 控制与决策, 2017, 32(11): 1921-1932.  
(Gui Z Y, Yang J, Xie Z Q. Scheduling algorithm for flexible job shop based on pruning and layering[J]. Control and Decision, 2017, 32(11): 1921-1932.)
- [9] Wang X N, Xing K Y, Li X L, et al. An estimation of distribution algorithm for scheduling problem of flexible manufacturing systems using Petri nets[J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 55: 776-788.
- [10] Shen L, Dauzère-Pérès S, Neufeld J S. Solving the flexible job shop scheduling problem with sequence-dependent setup times[J]. European J of Operational Research, 2018, 265(2): 503-516.
- [11] Ahmadi E, Zandieh M, Farrokh M, et al. A multi objective optimization approach for flexible job shop scheduling problem under random machine breakdown by evolutionary algorithms[J]. Computers & Operations Research, 2016, 73: 56-66.
- [12] Han Y, Gong D, Jin Y, et al. Evolutionary multi-objective blocking Lot-Streaming flow shop scheduling with machine breakdowns[J]. IEEE Trans on Cybernetics, DOI: 10.1109/TCYB.2017.2771213.
- [13] Nouiri M, Bekrar A, Jemai A, et al. Two stage particle swarm optimization to solve the flexible job shop predictive scheduling problem considering possible machine breakdowns[J]. Computers & Industrial Engineering, 2017, 112: 595-606.
- [14] Mishra R, Pundir A K, Ganapathy L. Manufacturing flexibility research: A review of literature and agenda for future research[J]. Global J of Flexible Systems Management, 2014, 15(2): 101-112.
- [15] Krieg G N, Kuhn H. A decomposition method for multi-product Kanban systems with setup times and lost sales[J]. IIE Trans, 2002, 34(7): 613-625.
- [16] Krieg G N, Kuhn H. Analysis of multi-product Kanban systems with state-dependent setups and lost sales[J]. Annals of Operations Research, 2004, 125: 141-166.
- [17] Li J S, Huang N J. Modeling and analysis of a multiple product manufacturing system with split and merge[J]. Int J of Production Research, 2005, 43(19): 4049-4066.
- [18] Feng W, Zheng L, Li J S. Scheduling policies in multi-product manufacturing systems with sequence-dependent setup times and finite buffers[J]. Int J of Production Research, 2012, 50(24): 7479-7492.
- [19] Feng W, Zheng L, Li J S. The robustness of scheduling policies in multi-product manufacturing systems with sequence-dependent setup times and finite buffers[J]. Computers & Industrial Engineering, 2012, 63(4): 1145-1153.
- [20] Kang N X, Zheng L, Li J S. Analysis of multi-product manufacturing systems with arbitrary processing times[J]. Int J of Production Research, 2015, 53(3): 983-1001.
- [21] Zhao C, Li J S. Analysis and improvement of multi-product assembly systems: an application study at a furniture manufacturing plant[J]. Int J of Production Research, 2014, 52(21): 6399-6413.
- [22] Zhao C, Li J S, Huang N J, et al. Flexible serial lines with setups: Analysis, improvement and application[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2016, 2(1): 120-127.
- [23] Assida M, Gharbia A, Dhoubb K. Joint production and subcontracting planning of unreliable multi-facility multi-product production systems[J]. Omega, 2015, 50(6): 54-69.
- [24] Walid A K, Ali G. Capacity estimation of a multi-product unreliable production line[J]. Int J of Production Research, 2002, 40(18): 4815-4834.
- [25] Colledani M, Gandola F, Matta A. Performance evaluation of linear and non-linear multi-product multi-stage lines with unreliable machines and finite homogeneous buffers[J]. IIE Trans, 2008, 40(6): 612-626.

(责任编辑: 闫妍)