

时滞仿射线性参数变量系统的有记忆 H_∞ 状态反馈控制

潘晓真, 黄金杰[†], 郝现志

(哈尔滨理工大学 系统控制与信息处理研究所, 哈尔滨 150080)

摘要: 针对一类存在状态时滞的仿射线性参数变量系统, 讨论在反馈控制律中引入时滞项的一类有记忆状态反馈控制器的设计问题. 首先, 通过构造参数依赖的李雅普诺夫泛函得到使闭环系统仿射参数二次稳定且满足 H_∞ 性能指标的时滞依赖条件, 并将有记忆状态反馈控制器的设计方法转化为线性矩阵不等式约束下的凸优化问题; 然后, 由求解凸优化问题得到有记忆状态反馈控制器的增益. 数值算例表明, 与无记忆状态反馈控制器相比, 所设计的有记忆状态反馈 H_∞ 控制器具有更好的抗干扰性能, 同时能够有效降低时滞对系统的影响. 最后, 将所设计的控制器应用到铣床铣削过程的振动控制中, 验证了有记忆状态反馈 H_∞ 控制器在物理实例中应用的可行性.

关键词: 线性参数变量系统; 时延系统; 线性矩阵不等式; 仿射参数; 有记忆状态反馈; H_∞ 控制

中图分类号: TP13

文献标志码: A

Memory state feedback H_∞ control for affine linear parameter variable systems with time delay

PAN Xiao-zhen, HUANG Jin-jie[†], HAO Xian-zhi

(Research Institute of System Control and Information Processing, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: For affine linear parameter variable systems with time delay, a delay-dependent memory state feedback controller is designed. Firstly, through constructing a parameter dependent Lyapunov function, delay-dependent conditions are derived to guarantee that the closed-loop system not only can be affine parameter quadratic stability, but also can satisfy robust H_∞ performance index, and the calculating method of the memory state feedback controller is transformed to a convex optimization under LMI constraints, and then controller gain is obtained through solving a convex optimization problem. A numerical example is given to illustrate that the proposed memory state feedback controller robust performs better than the usual memory-less state feedback controller, and can effectively reduce the influence of time delay on the system. Finally, a metal removal process is used to demonstrate feasibility of the application of the memory state feedback H_∞ controller in the physical instance.

Keywords: linear parameter variable system; time delay system; linear matrix inequality; affine paramller; memory feedback; H_∞ control

0 引言

众所周知, 非线性系统在实际的物理系统中更为普遍, 早有大量学者研究其线性化的方法^[1-3]. 虽然对于非线性问题的研究已经有很多成果, 但是系统仍然具有很大的保守性. 线性参数变量(LPV)系统的提出为解决非线性问题提供了理论基础, 同时有效降低了系统的保守性^[4-5]. LPV 系统作为一种重要的时变系统, 可以将许多实际的非线性系统描述成时

变参数的确定函数, 而这些时变参数是可以实时测量的. 近年来, 学者们将更多的注意力放在了 LPV 稳定性分析及控制器的设计上^[6-8]. 例如, 文献[6]中基于线性矩阵不等式(LMI)的方法, 利用二次李雅普诺夫泛函分析 LPV 系统达到二次稳定性的条件; LPV 系统增益调度控制器的设计问题在文献[7-8]中提到. 时滞现象存在于各种工程系统中, 诸如通信系统、传送系统、化工过程系统、冶金过程系统、环境系

收稿日期: 2017-09-29; 修回日期: 2018-04-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61305001); 黑龙江省自然科学基金项目(F201222); 黑龙江省教育厅科技基金项目(12511105).

责任编委: 关治洪.

作者简介: 潘晓真(1989-), 女, 博士生, 从事线性参数变量控制、事件触发控制的研究; 黄金杰(1967-), 男, 教授, 博士生导师, 从事增益调度控制、复杂工业过程优化控制及其应用等研究.

[†]通讯作者. E-mail: huangjinjie163@163.com.

统、电力系统等. 时滞的存在, 使系统的性能恶化, 甚至影响其稳定性^[9]. 事实上, 在对时滞系统的研究中发现, 很多系统中一个小的时滞都有可能对整个系统造成很坏的影响, 这就促使研究者们去寻求使小时滞系统达到稳定的方法^[10]. 对于时滞LPV系统, 时滞依赖^[11-12]和时滞独立^[13-15]的稳定性的研究也备受关注. 由于在分析时滞独立稳定性条件时, 并未考虑时滞的大小, 增大了系统的保守性, 这就促使更多学者研究基于LMI的时滞依赖LPV系统的稳定性问题^[16]. 目前, LPV系统的状态反馈控制器的设计主要采用求解Riccati型方程^[17]、LMI^[18]等方法. 绝大多数反馈控制率的实现都是采用无记忆状态反馈控制器^[19-23]. 然而, 对于无记忆状态反馈控制器由于未引入系统过去的状态信息, 其控制不能影响时滞对系统的作用. 所以, 近年来, 关于有记忆状态反馈控制器^[24-26]的研究已成为新的热点. 诸如文献[24]对于不确定奇异时滞系统, 利用凸优化的思想设计一个有记忆状态反馈控制器, 使闭环系统指数稳定并且满足 H_∞ 性能指标; 文献[25]将有记忆状态反馈控制器代入线性时滞系统, 通过求解相应的线性矩阵不等式求得满足设计要求的状态反馈控制器; 文献[26]针对一类含有非线性扰动的时变时滞不确定切换广义系统, 在反馈控制率中引入时滞项构造有记忆状态的反馈控制器, 结合公共Lyapunov泛函和LMI技术研究鲁棒 H_∞ 控制和有记忆状态反馈镇定问题, 给出了切换规则的设计方法以及有记忆状态反馈控制器存在的充分条件. 值得注意的是, 尽管有记忆状态反馈控制器已被引入许多系统, 但是, 对于时滞LPV系统尚未涉及到有记忆状态反馈控制器的设计问题.

本文的目的是针对时滞仿射LPV系统, 设计一个有记忆状态反馈控制器, 不仅使闭环系统仿射参数二次稳定, 而且满足 H_∞ 性能指标. 首先, 推导出使闭环系统满足设计要求的基于LMI表示的时滞依赖条件, 其中选用参数依赖的Lyapunov泛函来降低保守性; 然后, 利用相关引理及其附加矩阵对LMI进行矩阵变换, 并通过解决凸优化的问题实现有记忆状态反馈控制器的设计; 最后, 给出一个数值仿真来验证针对时滞仿射LPV系统设计的有记忆状态反馈控制器的优越性.

1 时滞仿射线性参数变量系统的分析

考虑如下时滞仿射LPV系统:

$$\dot{x}(t) = A(d(t))x(t) + A_h(d(t))x(t - h(d(t))) + B(d(t))u(t) + G(d(t))w(t), \quad (1)$$

$$z(t) = C(d(t))x(t) + C_h(d(t))x(t - h(d(t))) + D(d(t))u(t) + E(d(t))w(t), \quad (2)$$

$$x(t) = \phi(\theta), \theta \in [-h(d(0)), 0]. \quad (3)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $u(t) \in R^r$ 为控制输入, $w(t) \in R^p$ 为扰动输入, $z(t) \in R^m$ 为控制信号的输出, $\phi(\theta)$ 为给定的初始条件, 假定系统矩阵和时延 $h(d(t))$ 均为时变参数 $d(t) = [d_1(t), d_2(t), \dots, d_s(t)]^T$ 的函数, 且 $h(d(t))$ 满足 $0 < h(d(t)) \leq H < +\infty$, $\dot{h}(d(t)) \leq \tau < 1, \forall t \geq 0$. 为了表述方便, 以后以 d, d_i (其中 $i = 1, 2, \dots, s$) 代替 $d(t), d_i(t)$.

本文中, 假定参数 d_i 实时可测. 假设系统(1)和系统(2)的系数矩阵满足仿射形式, 即

$$\begin{aligned} A(d) &= A_0 + \sum_{i=1}^s d_i A_i, \quad A_h(d) = A_{h0} + \sum_{i=1}^s d_i A_{hi}, \\ B(d) &= B_0 + \sum_{i=1}^s d_i B_i, \quad C(d) = C_0 + \sum_{i=1}^s d_i C_i, \\ C_h(d) &= C_{h0} + \sum_{i=1}^s d_i C_{hi}, \quad E(d) = E_0 + \sum_{i=1}^s d_i E_i, \\ h(d) &= h_0 + \sum_{i=1}^s d_i h_i, \quad D(d) = D_0 + \sum_{i=1}^s d_i D_i. \end{aligned}$$

其中: $A_0, A_{h0}, B_0, G_0, C_0, C_{h0}, D_0, E_0, h_0, A_i, A_{hi}, B_i, G_i, C_i, C_{hi}, D_i, E_i, h_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) 为常数矩阵. 参数 d_i 有界且其变化率 \dot{d}_i 有界, 满足 $\underline{d}_i \leq d_i \leq \bar{d}_i, \underline{\dot{d}}_i \leq \dot{d}_i \leq \bar{\dot{d}}_i, i = 1, 2, \dots, s, \underline{d}_i, \bar{d}_i, \underline{\dot{d}}_i, \bar{\dot{d}}_i$ 为已知常数. 定义超立方矩阵 M 和 S , 使 d_i 和 \dot{d}_i 在 $M = \{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s) | \delta_i \in [\underline{d}_i, \bar{d}_i]\}$ 和 $S = \{(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s) | \tau_i \in [\underline{\dot{d}}_i, \bar{\dot{d}}_i]\}$ 中变化.

引理1 (投影定理^[27]) 设 R, S 和 Π 是给定的适当维数矩阵, 且 Π 是对称的; N_R 和 N_S 分别是由核空间 $\ker(R)$ 和 $\ker(S)$ 的任意一组基向量作为列向量构成的矩阵, 则存在一个矩阵 X , 使得 $\Pi + R^T X^T S + S^T X R < 0$, 当且仅当 $N_R^T \Pi N_R < 0, N_S^T \Pi N_S < 0$.

引理2 (仿射参数二次稳定性^[27]) 对于一个时变不确定参数的系统, 如果存在对称矩阵 P_0, \dots, P_i , 使得对于所有的不确定参数 $d \in M$, 有

$$\begin{aligned} P(d) &= P_0 + d_1 P_1 + \dots + d_s P_s > 0, \\ A^T(d)P(d) + P(d)A(d) + \frac{dP(d)}{dt} &< 0, \end{aligned}$$

则称系统为仿射参数二次稳定.

为了测试系统的稳定性问题, 考虑控制输入 $u(t) = 0$ 的时滞LPV系统

$$\dot{x}(t) = A(d(t))x(t) + A_h(d(t))x(t - h(d(t))) + G(d(t))w(t) \quad (4)$$

和初始条件(3). 如下定理为系统(4)仿射参数二次稳定提供了充分条件.

定理1^[28] 考虑时滞LPV系统(4)和初始函数(3), 如果存在连续可微的对称正定矩阵 \$P(d) = P_0 + \sum_{i=1}^s d_i P_i\$ 和对称正定矩阵 \$Q\$, 使得不等式

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} & * \\ A_h^T(d)P(d) & -\left[1 - \sum_{i=1}^s (\tau_i h_i)\right]Q \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

对于所有参数变化轨迹成立, 则系统(4)仿射参数二次稳定, 其中

$$\mathcal{L} = A^T(d)P(d) + P(d)A(d) + \sum_{i=1}^s (\tau_i P_i) + Q.$$

证明 假设不等式(5)成立, 考虑下列Lyapunov泛函:

$$V(x, d) = x^T(t)P(d)x(t) + \int_{t-h(d)}^t x^T(\xi)Qx(\xi)d\xi. \quad (6)$$

令 \$\bar{\lambda}_P := \max \lambda_{\max}(P(d))\$, \$\bar{\lambda}_Q := \lambda_{\max}(Q)\$, \$\underline{\lambda}_P := \min \lambda_{\min}(P(d))\$, 则 \$V(x, d)\$ 是有界的, 因为

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dx^T(t)}{dt}P(d)x(t) + x^T(t)P(d)\frac{dx(t)}{dt} + \\ &x^T(t)\frac{dP(d)}{dt}x(t) + x^T(t)Qx(t) - \\ &\left(1 - \frac{dh(d)}{dt}\right)x^T(t-h(d))Qx(t-h(d)) = \\ &[x^T(t) \ x^T(t-h(d))] \times \\ &\begin{bmatrix} \mathcal{A} & (*) \\ A_h^T(d)P(d) & \left(-1 + \frac{dh(d)}{dt}\right)Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(d)) \end{bmatrix} \leq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\mathcal{A} = A^T(d)P(d) + P(d)A(d) + \frac{dP(d)}{dt} + Q.$$

由不等式(5)可知不等式(7)成立, 因此, \$V(x, d)\$ 是Lyapunov泛函, 所以系统(4)仿射参数二次稳定. \$\square\$

考虑时滞仿射LPV系统(1)和(2), 假设控制输入 \$u(t) = 0\$, 初始函数 \$\phi(\theta) = 0\$, 如下定理给出了时滞LPV系统仿射参数二次稳定且 \$H_\infty\$ 范数不超过给定常数 \$\gamma\$ (即满足 \$H_\infty\$ 性能指标)的条件.

定理2 考虑时滞仿射LPV系统(1)和(2), 给定正常数 \$\gamma\$, 如果存在连续可微的对称正定矩阵 \$P(d)\$ 和对称正定矩阵 \$Q\$, 使得如下不等式对于所有参数变化轨迹成立:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} & * & * & * \\ A_h^T(d)P(d) - \sum_{i=1}^s (\tau_i h_i)Q & * & * & * \\ G^T(d)P(d) & 0 & -\gamma I & * \\ C(d) & C_h(d) & E(d) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & (*) & (*) & (*) \\ A_{hi}^T P_i & 0 & (*) & (*) \\ G_i^T P_i & 0 & 0 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (9)$$

则系统(1)和(2)仿射参数二次稳定且满足 \$H_\infty\$ 指标.

证明 由顶部 \$2 \times 2\$ 的子矩阵和定理1可知时滞LPV系统是参数二次稳定的. 在零初始条件下, 考虑到 \$J_\infty = \int_0^\infty [\gamma^{-1}z^T(t)z(t) - \gamma w^T(t)w(t)]dt\$, 对于任意的外部扰动 \$w(t) \neq 0\$, 利用Lyapunov泛函(6)和初始条件可导出

$$\begin{aligned} J_\infty &= \int_0^\infty [\gamma^{-1}z^T(t)z(t) - \gamma w^T(t)w(t) + \\ &\dot{V}(x(t))]dt - V(x(t)) \leq \\ &\int_0^\infty [\gamma^{-1}z^T(t)z(t) - \\ &\gamma w^T(t)w(t) + \dot{V}(x(t))]dt. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dx^T(t)}{dt}P(d)x(t) + x^T(t)P(d)\frac{dx(t)}{dt} + \\ &x^T(t)\frac{dP(d)}{dt}x(t) + x^T(t)Qx(t) - \\ &\left(1 - \frac{dh(d)}{dt}\right)x^T(t-h(d))Qx(t-h(d)) = \\ &[x^T(t) \ x^T(t-h(d)) \ w^T(t)] \times \\ &\begin{bmatrix} \mathcal{A} & (*) & (*) \\ A_h^T(d)P(d) & \left(-1 + \frac{dh(d)}{dt}\right)Q & (*) \\ G^T(d)P(d) & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\ &[x^T(t) \ x^T(t-h(d)) \ w^T(t)]^T, \end{aligned}$$

$$\gamma^{-1}z^T(t)z(t) - \gamma w^T(t)w(t) =$$

$$\begin{aligned} &[x^T(t) \ x^T(t-h(d)) \ w^T(t)] \times \\ &\begin{bmatrix} \gamma^{-1}C^T(d)C(d) & (*) \\ \gamma^{-1}C_h^T(d)C(d) & \gamma^{-1}C_h^T(d)C_h(d) \rightarrow \\ \gamma^{-1}E^T(d)C(d) & \gamma^{-1}E^T(d)C_h(d) \\ (*) \\ (*) \\ -\gamma I + \gamma^{-1}E^T(d)E(d) \end{bmatrix} \times \\ &[x^T(t) \ x^T(t-h(d)) \ w^T(t)]^T. \end{aligned}$$

根据Schur补引理,矩阵不等式(8)等价于

$$\begin{bmatrix} A + \gamma^{-1}C^T(d)C(d) & & & & \\ A_h^T(d)P(d) + \gamma^{-1}C_h^T(d)C(d) & \rightarrow & & & \\ G^T(d)P(d) + \gamma^{-1}E^T(d)C(d) & & & & \\ & (*) & & (*) & \\ \leftarrow B & & & (*) & \\ \gamma^{-1}E^T(d)C_h(d) - \gamma I + \gamma^{-1}E^T(d)E(d) & & & & \end{bmatrix} < 0,$$

其中

$$B = \left(-1 + \frac{dh(d)}{dt}\right)Q + \gamma^{-1}C_h^T(d)C_h(d).$$

故

$$J_\infty \leq \int_0^\infty [\gamma^{-1}z^T(t)z(t) - \gamma w^T(t)w(t) + \dot{V}(x(t))]dt = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h(d)) & w^T(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A + \gamma^{-1}C^T(d)C(d) & & & & \\ A_h^T(d)P(d) + \gamma^{-1}C_h^T(d)C(d) & \rightarrow & & & \\ G^T(d)P(d) + \gamma^{-1}E^T(d)C(d) & & & & \\ & (*) & & (*) & \\ \leftarrow B & & & (*) & \\ \gamma^{-1}E^T(d)C_h(d) - \gamma I + \gamma^{-1}E^T(d)E(d) & & & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(d)) \\ w(t) \end{bmatrix} dt < 0.$$

不等式(8)成立.

进一步,为了保证系统(1)和(2)为仿射参数二次稳定且满足 H_∞ 指标,定义

$$f_x(d) = x^T(t)[A^T(d)P(d) + P(d)A(d) + \dot{P}(d) + Q]x(t).$$

由于 $A(d), P(d)$ 都是时变参数的函数,一般的 $f_x(d)$ 不是 $d(t)$ 的凸函数,不能由 $f_x(d)$ 在有限集上负定性推出 $f_x(d)$ 在整个参数区间上的负定性. 其中

$$f_x(d) = x^T(A_0^T P_0 + P_0 A_0 + Q)x + x^T \sum_{i=1}^s d_i (A_i^T P_0 + P_0 A_i + A_0^T P_i + P_i A_0)x + x^T \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{i-1} d_i d_j (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i)x + x^T \sum_{i=1}^s d_i^2 (A_i^T P_i + P_i A_i)x + x^T \sum_{i=1}^s P_i \dot{d}_i x.$$

命题“ $f_x(d)$ 在有限集上负定性推出 $f_x(d)$ 在整个参数区间上负定性”成立的一个充分条件是 $f_x(d_1, \dots, d_s)$ 关于每个变量都是凸的,这等价于对

于 $i = 1, 2, \dots, s, \frac{\partial^2 f_x}{\partial d_i^2}(d) = x^T[A_i^T P_i + P_i A_i]x \geq 0$. 由 x 的任意性进一步推出 $f_x(d)$ 是凸函数的充分条件是 $A_i^T P_i + P_i A_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s$. 所以不等式(9)可由不等式(8)推出. \square

2 有记忆状态反馈控制器的设计

考虑时滞仿射LPV系统控制综合问题. 假定系统的状态是可以观测的,要求设计如下所示的有记忆状态反馈控制器:

$$u(t) = K_1(d)x(t) + K_2(d)x(t-h(d)), \quad (10)$$

使闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}(d)x(t) + \bar{A}_h(d)x(t-h(d)) + G(d)w(t), \\ z(t) = \bar{C}(d)x(t) + \bar{C}_h(d)x(t-h(d)) + E(d)w(t) \end{cases} \quad (11)$$

仿射参数二次稳定,且在零初始条件下满足 H_∞ 性能指标. 其中

$$K_1(d) = K_{10} + \sum_{i=1}^s d_i K_{1i},$$

$$K_2(d) = K_{20} + \sum_{i=1}^s d_i K_{2i};$$

$$\begin{cases} \bar{A}(d) = A(d) + B(d)K_1(d), \\ \bar{A}_h(d) = A_h(d) + B(d)K_2(d), \\ \bar{C}(d) = C(d) + D(d)K_1(d), \\ \bar{C}_h(d) = C_h(d) + D(d)K_2(d). \end{cases}$$

结合定理2中对时滞仿射LPV系统的稳定性能分析,得出使闭环系统(11)仿射参数二次稳定且满足 H_∞ 性能指标的条件. 因为定理2提出的LMI是无穷维的,利用凸多面体的思想对LMI做处理,得到如下定理.

定理3 考虑时滞仿射LPV系统(1)和(2),给定的正常数 γ 和 $\delta_i \in V, \delta_i$ 为超立方的顶点,如果存在连续可微的对称正定矩阵 $P_0, P_i(i = 1, 2, \dots, s)$ 和对称正定矩阵 Q ,使得如下不等式:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)\bar{A}(\delta) + \sum_{i=1}^s (\tau_i P_i) + Q & & & & \\ & \bar{A}_h^T(\delta)P(\delta) & & & \\ & G^T(\delta)P(\delta) & & & \\ & & & \bar{C}(\delta) & \\ \leftarrow -\left[1 - \sum_{i=1}^s (\tau_i h_i)\right]Q & & & (*) & (*) & (*) \\ & 0 & & -\gamma I & (*) & \\ & \bar{C}_h(\delta) & & E(\delta) & -\gamma I & \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & (*) & (*) & (*) \\ \Xi_2 & 0 & (*) & (*) \\ G_i^T P_i & 0 & 0 & (*) \\ D_i K_{1i} & D_i K_{2i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (13)$$

$$P(\delta) > 0 \quad (14)$$

对于所有参数变化轨迹成立, 则闭环系统(11)仿射参数二次稳定且满足 \$H_\infty\$ 性能指标. 其中

$$P(\delta) = P_0 + \sum_{i=1}^s \delta_i P_i,$$

$$\Xi_1 = A_i^T P_i + K_{1i}^T B^T(\delta) P_i + K_{1i}^T(\delta) B_i^T P_i + K_{1i}^T B_i^T P(\delta) + P_i A_i + P_i B(\delta) K_{1i} + P_i B_i K_{1i}(\delta) + P(\delta) B_i K_{1i},$$

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \bar{A}^T(\delta)W + P(\delta) & -P(\delta) + \sum_{i=1}^s (\tau_i P_i) + Q & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \bar{A}_h^T(\delta)W & 0 & -\left[1 - \sum_{i=1}^s (\tau_i h_i)\right]Q & (*) & (*) & (*) \\ G^T(\delta)W & 0 & 0 & -\gamma I & (*) & (*) \\ 0 & \bar{C}(\delta) & \bar{C}_h(\delta) & 0 & -\gamma I & (*) \\ W & 0 & 0 & 0 & 0 & -P(\delta) \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 0 & -(W + W^T) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ -P(\delta) + K_{1i}^T B_i^T W & A_i^T W + K_{1i}^T(\delta) B_i^T W + K_{1i}^T B^T(\delta) W - P_i & -P(\delta) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 0 & A_{hi}^T(\delta)W + K_{2i}^T(\delta) B_i^T W + K_{2i}^T B^T(\delta) W & 0 & 0 & (*) & (*) & (*) \\ 0 & G_i^T(\delta)W & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) \\ 0 & 0 & -D_i K_{1i} & -D_i K_{2i} & 0 & 0 & (*) \\ W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P(\delta) \end{bmatrix} \leq 0. \quad (16)$$

对于所有参数变化轨迹成立, 则闭环系统(11)仿射参数二次稳定且满足 \$H_\infty\$ 性能指标.

证明 不等式(15)等价于

$$\begin{bmatrix} 0 & (*) \\ P(\delta) & -P(\delta) + \sum_{i=1}^s (\tau_i P_i) + Q \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}(\delta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & (*) \\ (*) & (*) & (*) & (*) \\ -\left[1 - \sum_{i=1}^s (\tau_i h_i)\right]Q & (*) & (*) & (*) \\ 0 & -\gamma I & (*) & (*) \\ \bar{C}_h(\delta) & 0 & -\gamma I & (*) \\ 0 & 0 & 0 & -P(\delta) \end{bmatrix} +$$

$$\Xi_2 = A_{hi}^T P_i + K_{2i}^T B^T(\delta) P_i + K_{2i}^T(\delta) B_i^T P_i + K_{2i}^T B_i^T P(\delta).$$

证明 因为二次函数在超立方体上负定的充要条件是二次函数在超立方体上的所有顶点都负定, 即式(12)可由式(8)推出. 不等式(13)的证明过程同不等式(9). \$\square\$

由定理3可以看出, 条件(12)中存在 Lyapunov 泛函矩阵 \$P(\delta)\$ 与闭环系统矩阵乘积项. 为解决这一问题, 引入附加矩阵来解耦, 从而得到新的性能准则.

定理4 考虑时滞仿射 LPV 系统(1)和(2), 给定正常数 \$\gamma\$, 如果存在连续可微的对称正定矩阵 \$P(\delta)\$, 对称正定矩阵 \$Q\$ 和矩阵 \$W\$, 使得不等式

$$\begin{bmatrix} -I & \bar{A}(\delta) & \bar{A}_h(\delta) & G(\delta) & 0 & I \end{bmatrix}^T W \times \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T W^T \times \begin{bmatrix} -I & \bar{A}(\delta) & \bar{A}_h(\delta) & G(\delta) & 0 & I \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

而 \$[I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\$ 和 \$[-I \ \bar{A}(\delta) \ \bar{A}_h(\delta) \ G(\delta) \ 0 \ I]\$ 的零空间分别为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} \bar{A}(\delta) & \bar{A}_h(\delta) & G(\delta) & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

应用投影定理得到如下不等式:

$$\begin{bmatrix} -P(\delta) + \sum_{i=1}^s (\tau_i P_i) + Q \\ 0 \\ 0 \\ \bar{C}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & (*) \\ -\left[1 - \sum_{i=1}^s (\tau_i h_i)\right] Q & (*) & (*) & (*) \\ 0 & -\gamma I & (*) & (*) \\ \bar{C}_h(\delta) & 0 & -\gamma I & * \\ 0 & 0 & 0 & -P(\delta) \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

$$\left[\begin{array}{c} \bar{A}^T(\delta)P(\delta) + P(p)\bar{A}(\delta) - P(\delta) + \sum_{i=1}^s (\tau_i P_i) + Q \\ \bar{A}_h^T(\delta)P(\delta) \\ G^T(\delta)P(\delta) \\ \bar{C}(\delta) \\ P(\delta) \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & (*) \\ -\left[1 - \sum_{i=1}^s (\tau_i h_i)\right] Q & (*) & (*) & (*) \\ 0 & -\gamma I & (*) & (*) \\ \bar{C}_h(\delta) & 0 & -\gamma I & (*) \\ 0 & 0 & 0 & -P(\delta) \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

由Schur补引理可知,式(19)等价于定理3的式(12),所以不等式(15)成立;同理可证不等式(16)成立.因此定理4的条件也是定理3的充分条件.□

基于上面定理,控制器的设计如下.

定理5 考虑时滞仿射LPV系统(1)和(2),给定正常数 γ ,如果存在连续可微的对称矩阵 $X_0, U_1, U_2, X_i, U_{1i}, U_{2i}$ 和对称正定矩阵 Y 以及一般矩阵 N ,使得不等式

$$\left[\begin{array}{c} \Pi_1 \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ \Pi_2 \quad \Pi_4 \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ \Pi_3 \quad 0 \quad -\delta(\tau)Y \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ G^T(\delta) \quad 0 \quad 0 \quad -\gamma I \quad (*) \quad (*) \\ 0 \quad \Pi_5 \quad \Pi_6 \quad 0 \quad -\gamma I \quad (*) \\ N^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -X(\delta) \end{array} \right] < 0, \quad (20)$$

$$\left[\begin{array}{c} \Pi_1 \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ 0 \quad \Pi_1 \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ \Pi_7 \quad \Pi_8 \quad -X(\delta) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ 0 \quad \Pi_9 \quad 0 \quad 0 \quad (*) \quad (*) \\ 0 \quad G_i^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (*) \\ 0 \quad 0 \quad \Pi_{10} \quad \Pi_{11} \quad 0 \quad 0 \\ N^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -X(\delta) \end{array} \right] \leq 0. \quad (21)$$

对于所有参数变化轨迹成立,则闭环系统(11)仿射参数二次稳定且满足 H_∞ 性能指标.其中

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -(N + N^T), \\ \Pi_2 &= N^T A^T(\delta) + X(\delta) + U_1^T(\delta)B^T(\delta), \\ \Pi_3 &= N^T A_h^T(\delta) + U_2^T(\delta)B^T(\delta), \\ \Pi_4 &= X(\tau) - X_0 + Y - X(\delta), \\ \Pi_5 &= C(\delta)N + D(\delta)U_1(\delta), \\ \Pi_6 &= C_h(\delta)N + D(\delta)U_2(\delta), \\ \Pi_7 &= -X(\delta) + U_{1i}^T B_i^T, \\ \Pi_8 &= -X_i + N^T A_i^T + U_1^T(\delta)B_i^T + U_{1i}^T B^T(\delta), \\ \Pi_9 &= N^T A_{hi}^T + U_2^T(\delta)B_i^T + U_{2i}^T B^T(\delta), \\ \Pi_{10} &= -D_i U_{1i}, \quad \Pi_{11} = -D_i U_{2i}. \end{aligned}$$

证明 用 $\text{diag}[W^{-1}, W^{-1}, W^{-1}, I, I, W^{-1}]$ 和 $\text{diag}[W^{-1}, W^{-1}, W^{-1}, W^{-1}, I, I, W^{-1}]$ 分别对式(15)和(16)进行全等变换,且定义

$$\begin{aligned} Y &= W^{-T} Q W^{-1}, \quad X(\delta) = W^{-T} P(\delta) W^{-1}, \\ N &= W^{-1}, \quad U_1(\delta) = K_1(\delta) W^{-1}, \quad U_{1i} = K_{1i} W^{-1}, \\ U_2(\delta) &= K_2(\delta) W^{-1}, \quad U_{2i} = K_{2i} W^{-1}, \end{aligned}$$

则式(15)和(16)分别等价于式(20)和(21).□

为将式(21)变为严格不等式,需在式(21)加上 $\text{diag}\{0, 0, -\varsigma_i I, -\varsigma_i I, -\varsigma_i I, -\varsigma_i I, 0\}$,其中 $\varsigma_i > 0$.

通过求解LMI(20)和(21),得到有记忆状态反馈控制器的增益矩阵

$$K_1(d) = U_1(d)N^{-1}, \quad K_2(d) = U_2(d)N^{-1}. \quad (22)$$

推论1 考虑时滞仿射LPV系统(1)和(2),给定正常数 γ ,如果存在连续可微的对称矩阵 X_0, U_1, X_i, U_{1i} 和对称正定矩阵 Y 以及一般矩阵 N ,满足不等式

$$\left[\begin{array}{c} \Pi_1 \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ \Pi_2 \quad \Pi_4 \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ \Pi_3 \quad 0 \quad -\delta(\tau)Y \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ G^T(\delta) \quad 0 \quad 0 \quad -\gamma I \quad (*) \quad (*) \\ 0 \quad \Pi_5 \quad \Pi_6 \quad 0 \quad -\gamma I \quad (*) \\ N^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -X(\delta) \end{array} \right] < 0, \quad (23)$$

$$\left[\begin{array}{c} \Pi_1 \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ 0 \quad \Pi_1 \quad (*) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ \Pi_7 \quad \Pi_8 \quad -X(\delta) \quad (*) \quad (*) \quad (*) \\ 0 \quad \Pi_9 \quad 0 \quad 0 \quad (*) \quad (*) \\ 0 \quad G_i^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (*) \\ 0 \quad 0 \quad \Pi_{10} \quad \Pi_{11} \quad 0 \quad 0 \\ N^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -X(\delta) \end{array} \right] \leq 0, \quad (24)$$

取无记忆状态反馈控制率为 $u(t) = K_1(d)x(t)$ 时,则系统(11)仿射参数二次稳定且满足 H_∞ 性能指标,其中

$$\begin{aligned}
 K_1(d) &= U_1(d)N^{-1}, \quad \Pi_1 = -(N + N^T), \\
 \Pi_2 &= N^T A^T(\delta) + X(\delta) + U_1^T(\delta)B^T(\delta), \\
 \Pi_3 &= N^T A_h^T(\delta), \quad \Pi_4 = X(\tau) - X_0 + Y - X(\delta), \\
 \Pi_5 &= C(\delta)N + D(\delta)U_1(\delta), \quad \Pi_6 = C_h(\delta)N, \\
 \Pi_7 &= -X(\delta) + U_{1i}^T B_i^T, \\
 \Pi_8 &= -X_i + N^T A_i^T + U_1^T(\delta)B_i^T + U_{1i}^T B^T(\delta), \\
 \Pi_9 &= N^T A_{hi}^T, \quad \Pi_{10} = -D_i U_{1i}.
 \end{aligned}$$

注1 比较线性矩阵不等式 (20)、(21) 和 (23)、(24) 可以看出, 当不等式 (23) 和 (24) 有解时, 式 (20) 和 (21) 一定有解 (这时只要取 $U_2(\delta), U_{2i}$ 为 0 即可), 反之则不一定成立. 这说明式 (20) 和 (21) 的可解性比式 (23) 和 (24) 更好. 所以有记忆状态反馈控制器能控制无记忆状态反馈控制器无法控制的系统.

3 仿真示例

3.1 数值仿真

考虑以下时滞仿射线性参数变量系统:

$$\begin{aligned}
 \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \\
 &\begin{bmatrix} 0 & 1 - d(t) \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \\
 &\begin{bmatrix} -0.5 + 9.5d(t) & -0.3 + 8d(t) \\ 0.27 + 3d(t) & 0.85d(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t - 0.9|d(t)|) + \\
 &\begin{bmatrix} 0.5 + 0.2d(t) \\ 2 - 3d(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{bmatrix} 0.2d(t) \\ 0.2 + 0.1d(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(t), \\
 \boldsymbol{z}(t) &= \\
 &\begin{bmatrix} 0.2 + 0.3d(t) & 0 \\ 0.2d(t) & 0.3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \\
 &\begin{bmatrix} 0.4 + 0.2d(t) & 0 \\ 0.5 & 0.2 + 0.1d(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t - 0.9|d(t)|) + \\
 &\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4d(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t).
 \end{aligned}$$

其中: $d(t) = 0.1 \sin t, d(t) \in [-0.1, 0.1], \dot{d}(t) \in [-0.1, 0.1]$, 时延 $h(d) = 0.9|d(t)|$ 的变化范围从 0 到 0.09. 初始函数选为

$$x_0 = [2 \sin \hat{t} \quad -2 \cos \hat{t}], \quad \hat{t} = 4\pi(t - \tau)/\tau, \quad t \leq 0,$$

步长为 0.01 s. 外部扰动 $\boldsymbol{w}(t) = 1, t \geq 0$. 由定理 5 求得 H_∞ 性能指标 $\gamma_b = 1.1961$ 以及参数依赖的有记忆状态反馈控制器增益

$$\begin{aligned}
 K_1(d) &= [-1.9951 \quad -2.3794] + \\
 &\quad d(t)[0.6410 \quad -0.139], \\
 K_2(d) &= d(t)[-10.4156 \quad -8.4921].
 \end{aligned}$$

同样, 由推论 1 得 H_∞ 性能指标 $\gamma_b = 4.0293e + 003$ 以及无记忆状态反馈控制器增益 $K(d) = d(t)[-0.1430 \quad -0.8370]$.

图 1 和图 2 分别为加干扰前有记忆状态反馈控制器和无记忆状态反馈控制器控制下的闭环系统状态响应曲线. 图 3 和图 4 分别为加入干扰后, 两种控制器控制下的闭环系统状态响应曲线. 由图 1~图 4 可知系统状态 x_1 和 x_2 均迅速收敛到 0. 图 5 为 γ 在整个过程中的变化曲线, 用 γ_r 表示, 其中 $\gamma_r(t)^2 = \|z(t)\|^2 / \|w(t)\|^2$. 经对比 $\gamma_b > \gamma_r$, 且在有记忆状态反馈控制器和无记忆状态反馈控制器控制下均成立, 验证了仿真得到的 H_∞ 性能与理论计算的一致性.

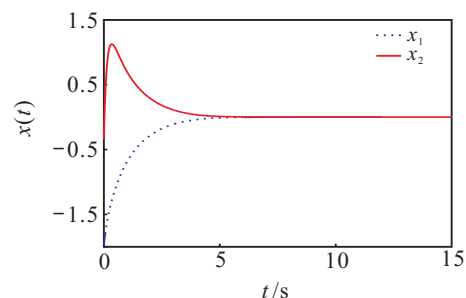


图 1 $(x_0 = [2 \sin \hat{t} \quad -2 \cos \hat{t}])$ 加干扰前有记忆状态反馈控制下的闭环系统状态响应曲线

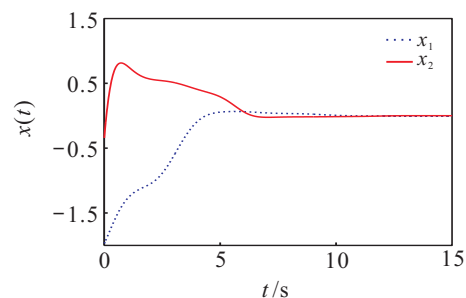


图 2 加干扰前无记忆状态反馈控制下的闭环系统状态响应曲线

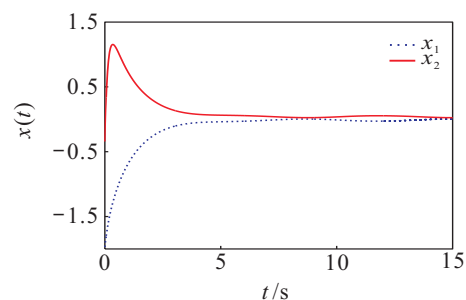


图 3 $(x_0 = [2 \sin \hat{t} \quad -2 \cos \hat{t}])$ 加干扰后有记忆状态反馈控制下的闭环系统状态响应曲线

为了进一步验证系统的大范围稳定性, 将初始域变为原来的 100 倍, 此时初始函数假定为 $x_0 = [200 \sin \hat{t} \quad -200 \cos \hat{t}]$. 图 6 为初始域变大, 加入干扰后有记忆状态反馈控制下的闭环系统状态响应曲线. 由图 6 可知, 虽然由扰动引起的初始偏差变大, 一旦扰动消失, 系统仍能迅速恢复稳定.

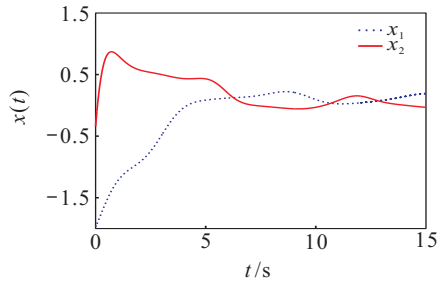


图4 加干扰后无记忆状态反馈控制下的闭环系统状态响应曲线

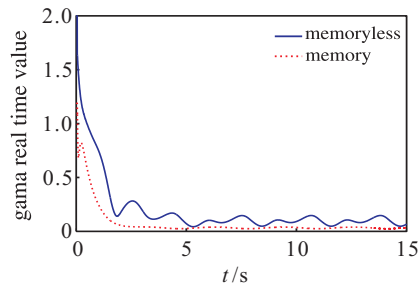


图5 γ_r 在整个过程中的变化曲线

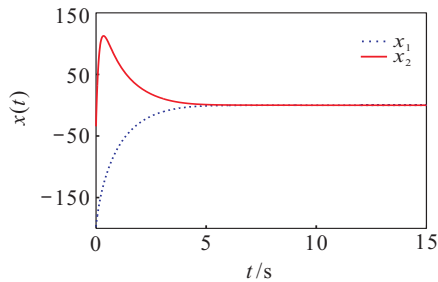


图6 初始域变大后 ($x_0 = [200 \sin \hat{t} \quad -200 \cos \hat{t}]$), 有记忆状态反馈控制下的闭环系统状态响应曲线

从上述两种方法得到的最优抗干扰衰减水平和状态响应曲线可以看出, 本文设计的控制器更能有效减弱扰动对系统的影响, 所以基于时滞LPV系统的有记忆状态反馈控制器的保守性较小。

3.2 实例仿真

考虑铣床铣削过程中的振动控制系统, 可抽象为时滞LPV模型(引用文献[29]), 即

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10.34 + d_1(t) & 10 & 0 & 0 \\ 5 & -15 & 0 & -0.25 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34 - d_1(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t - \pi d_2(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

其中: 系统状态 $x = [x_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2]$, x_1 和 x_2 分别是刀具和机床的位置; $d_1(t) = \sin(2\phi + 1.22)$, ϕ 为刀具的角位置, $d_1(t) \in [-1, 1]$, $|\dot{d}_1(t)| \in [0, 418.9]$ rad/s; $d_2(t) = 1/\omega$, $\omega \in [20.93, 209.3]$ rad/s, ω 为刀具的角速度, 最大变化率为 104.67 rad/s²; 时延 $h(d) = \pi d_2(t)$, 时延变化率小于 0.75. 在仿真中, 外部扰动 $w(t)$ 为如下矩形信号

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 4; \\ 0, & t > 4. \end{cases}$$

由定理5求得 H_∞ 性能指标 $\gamma = 3.1$ 以及参数依赖的有记忆状态反馈控制器

$$K_1(d) = [-1.9994 \quad 5.9231 \quad 0.1514 \quad -1.5198] + d_1(t)[0.2173 \quad -0.5404 \quad -0.0818 \quad 1.0281],$$

$$K_2(d) = [0.0582 \quad -0.0102 \quad -0.0011 \quad 0] + d_1(t)[-0.0434 \quad 0.0017 \quad 0.0001 \quad -0.0001].$$

图7为未加外部扰动 $w(t)$ 时两个模块的位置变化曲线, 图8为加上扰动 $w(t)$ 时两个模块的位置变化曲线. 对比图7和图8, 发现有记忆状态反馈控制器能够有效地减弱扰动对系统的影响。

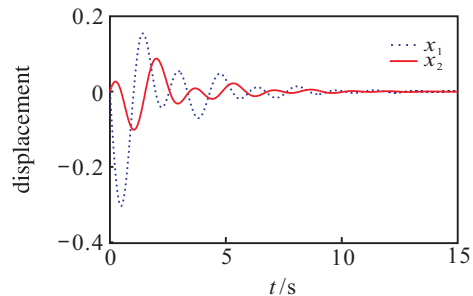


图7 未加扰动时两个模块的位置变化曲线

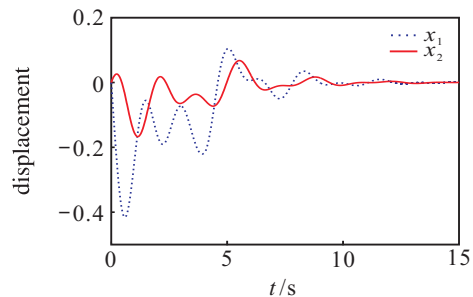


图8 加扰动后两个模块的位置变化曲线

4 结论

本文针对一类时滞仿射线性参数变量系统设计具有记忆状态的反馈控制器, 研究了基于有记忆状态反馈的鲁棒 H_∞ 控制问题. 根据仿射参数二次稳定性定义, 通过构造参数依赖的 Lyapunov 泛函, 得出满足条件的 LMI, 用多凸方法实现了将无穷维问题转化为可以数值求解的有穷维问题, 得到有记忆状态反馈

控制器,其保守性也相对降低.数值例子表明了该设计方法的有效性和低保守性.

参考文献(References)

- [1] Guemghar K, Srinivasan B, Bonvin D. Approximate input-output linearization of nonlinear systems using the observe ability normal Form[C]. European Control Conf (ECC). Cambridge: IEEE, 2003: 713-718.
- [2] Joachim Deutscher. A numerical approach to approximate input-output linearization of nonlinear systems[C]. European Control Conf (ECC). Kos: IEEE, 2007: 3635-3640.
- [3] Matthias Hotz. Linearization of time-varying nonlinear systems using a modified linear iterative method[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2014, 62(10): 2566-2579.
- [4] Vicenç Puig, Yolanda Bolea, Joaquim Blesa. Robust gain-scheduled smith PID controllers for second order LPV systems with time varying delay[J]. IFAC Proc Volumes, 2012, 45(3): 189-193.
- [5] Savvidis P, Grimble M J, Pawel Majecki. Nonlinear predictive generalized minimum variance LPV control of wind turbines[C]. The 5th IET Int Conf on Renewable Power Generation(RPG). London: IET, 2016: 1-6.
- [6] Burzelius F. LPV-based gain scheduling: An H_∞ -LMI approach[D]. Goteborg: Chalmers University of Technology, 2002.
- [7] Marc Jungers, Rodrigo P Caun, Ricardo C L F Oliveira. Model predictive control for linear parameter varying systems using path-dependent Lyapunov functions[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2009, 42(2): 98-105.
- [8] Gérard Benjamin, Souley Ali Harouna, Zasadzinski Michel. LPV approach for H_∞ filter design for a class of nonlinear systems[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2008, 41(2): 1143-1152.
- [9] Zhang D M, Yu L. Survey on the stability analysis of linear time-delay systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(8): 841-849.
- [10] Shen Yi, Wang Jun. Robustness of global exponential stability of nonlinear systems with random disturbances and time delays[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2016, 9(46): 1157-1166.
- [11] Kokame H, Kobayashi H, Mori T. Robust performance for linear delay-differential systems with time-varying uncertainties[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(2): 223-226.
- [12] Apkarian P, Gahinet P, Becker G. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter varying systems: A design example[J]. Automatica, 1995, 31(9): 1251-1261.
- [13] Han Ho Choi, Myung Jin Chung. An LMI approach to H_∞ controller design for linear time-delay systems[J]. Automatica, 1997, 33(4): 737-739.
- [14] Zhou D W. Robust H_∞ control for a class of switch LPV system[J]. J of Northeast Petroleum University, 2012, 36(4): 95-100.
- [15] Azumat, Ikedak, Kondot. Memory state feedback control synthesis for linear systems with time delay via a finite number of linear matrix inequalities[J]. Computers & Electrical Engineering, 2002, 28(3): 217-228.
- [16] Yed, Yanggh. Adaptive reliable H_∞ control for linear time-delay systems via memory state feedback[J]. IET Control Theory Apple, 2007, 1(3): 713-721.
- [17] Moon Y S, Park P, Kwon W H. A delay-dependent robust stabilization of uncertain state delayed systems[J]. Int J of Control, 2001, 74(14): 1447-1455.
- [18] Jiang X F, Fei S M, Feng C B. The H_∞ control of linear time-delay system[J]. Control and Decision, 1999, 14(6): 712-715.
- [19] Ma Yuechao, Fu Lei. H_∞ robust exponential stability and memory state feedback control for uncertain singular time-delay systems with saturating actuators[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(3): 328-338.
- [20] Yang Kun, Shen Yanxia, Ji Zhicheng. H_∞ memory state feedback control for uncertain nonlinear switched singular systems with time-varying delay[C]. Proc of the 32nd Chinese Control Conf. Xi'an: IEEE, 2013: 26-28.
- [21] Balasubramaniam P, Krishnasamy R, Rakkiyappan R. Delay-dependent stability criterion for a class of non-linear singular markovian jump systems with mode-dependent interval time-varying delays[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(9): 3612-3627.
- [22] Su N J, Su H Y, Chu J. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain time-delay systems[J]. IEEE Proc Control Theory and Applications, 2003, 150(5): 489-492.
- [23] Xu S Y, Lam J, Yang C W. Robust H_∞ control for uncertain singular systems with state delay[J]. Robust Nonlinear Control, 2003, 13(13): 1213-1223.
- [24] Zhou Yan, Chen Yongjian. Dynamic output feedback H_∞ control of networked control system with independent time-delay[C]. Int Conf on Control, Automation and Information Sciences(ICCAIS). Changshu: IEEE, 2015: 33-36.
- [25] Chen Fangxin, Hu Yahui, Wang Weijiang. Research on delay-independent stability for discrete-time interval systems with time-varying delay[C]. IEEE Int Conf on Mechatronics and Automation(ICMA). Beijing: IEEE, 2015: 145-150.
- [26] Zhang Jing, Zhang Baoyong. Gain-scheduled state-feedback control for LPV time-delay systems based on multiple performances[C]. Proc of The 11th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shenyang: IEEE, 2014: 4414-4419.
- [27] Yu L. Roust control: Processing methods of linear matrix inequalities[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 18-20.
- [28] Wu Fen, Grigoriadis K M. LPV systems with parameter-varying time delays: Analysis and control[J]. Automatica, 2001, 37(2): 221-229.
- [29] Coretin Briat. Linear parameter-varying and time-delay systems: Analysis, observation, filtering & control[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015: 247-248.