第 34 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 Vol.34 No.4
2019 年 4 月 Control and Decision Apr. 2019

文章编号: 1001-0920(2019)04-0821-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1345

犹豫模糊软集的相关系数及其在决策中的应用

黄先玖†，汤 静

(南昌大学 理学院，南昌 330031)

摘 要: 犹豫模糊软集结合了 Torra(2010) 的犹豫模糊集理论和 Molodtsov(1999) 的软集理论. 鉴于相关系数是数据分析中应用最广泛的指标之一,提出一种犹豫模糊软集相关系数,同时给出犹豫模糊软集的平均值和方差的定义,基于这些概念给出犹豫模糊软集相关系数的计算公式. 新的犹豫模糊软集相关系数的值在区间 $[-1, 1]$ 上,而不是 $[0, 1]$ 上,这与统计学中经典相关系数一致,因此克服了已有犹豫模糊软集相关系数中存在的缺陷. 为了提升其应用的广泛性,提出犹豫模糊软集加权相关系数的概念. 最后,通过医院评估的实例验证所提出的犹豫模糊软集相关系数的适用性和有效性.

关键词: 犹豫模糊软集；平均值；方差；相关系数；加权相关系数；决策

中图分类号: O177.91；O211.3 **文献标志码:** A

The correlation coefficient of hesitant fuzzy soft set and its application in decision making

HUANG Xian-jiu†，*TANG Jing*

(School of Sciences，Nanchang University，Nanchang 330031，China)

Abstract: A hesitant fuzzy soft set (HFSS) is a combination of the Torra's (2010) hesitant fuzzy set (HFS) and the Molodtsov's (1999) soft set theory. Considering that correlation coefficient is one of the most widely used indices in data analysis, a novel concept of correlation coefficient between HFSSs is proposed. At the same time, the mean and the variance of a HFSS are defined. Based on these concepts, a novel correlation coefficient formulation between two HFSSs is developed. The value of the introduced correlation coefficient between two HFSSs lies in the interval $[-1, 1]$ rather than $[0, 1]$, which is in accordance with the classical correlation coefficient in statistics, thus overcomes the weakness of existing correlation coefficient between HFSSs. The weighted correlation coefficient is also proposed to make it more applicable. Finally, an example of hospital assessment is given to illustrate the applicability and effectiveness of the proposed correlation between HFSSs.

Keywords: hesitant fuzzy soft set；mean；variance；correlation coefficient；weighted correlation coefficient；decision making

0 引 言

在日常生活中,客观事物的复杂性和人类认知的主观模糊性导致许多问题都存在一定程度的不确定性,故无法用传统的方法来解决这些问题. 为了克服这种不确定性,许多学者建立了各种不同的数学模型. 1965 年, Zadeh[1] 在精确集的基础上提出了模糊集理论,该理论能描述属性隶属度没有明确定义的对象. 从此以后,许多学者对此做了进一步拓展: Atanassov[2] 通过增加非隶属度提出了直觉模糊集的概念; Miyamoto[3] 提出了多重模糊集的概念; Dubois 等[4] 提出了 2-型模糊集. 但是,在实际问题中,利用模糊集仍然无法解决隶属度有多个可能值的问题. 因此,文献 [5-6] 提出了犹豫模糊集,同时还研究了其与直觉模糊集、多重模糊集的关系. 近几年来,这些模糊集理论的发展十分迅速,但是仍然存在一些固有的问题,诸如怎样在每个特定的环境下构造隶属度和非隶属度函数等类似的问题. 1999 年, Molodtsov[7] 提出了软集的概念,成功克服了这些难题. 这个新的理论可以应用在决策[8-10]、预测[11]、测度论和数据分析[12] 等诸多领域. Babitha 等[13] 在犹豫模糊集的基础

收稿日期: 2017-10-12；**修回日期:** 2018-01-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11461043, 11661053)；江西省自然科学基金项目 (20161BAB201009)；江西省杰出青年人才计划项目 (20171BCB23004).

作者简介: 黄先玖 (1977−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、非线性分析等研究；汤静 (1993−), 女, 硕士生, 从事决策理论与应用、统计分析的研究.

†通讯作者. E-mail: xjhuangxwen@163.com.

上提出了犹豫模糊软集,该理论不会忽略决策者的主观意见,并且能很好地表述不同决策者的偏好,因此该理论已经成为许多研究者的研究重点.

相关系数这一概念最早是卡尔皮尔森于1895年提出的,是研究两个对象之间的线性相关性的统计指标. 该理论在数据分析、决策和医学诊断[14]等方面应用广泛,在统计学中的作用尤为突出. 如今,相关系数的研究已经从两个数集之间扩展到两个模糊集之间,而两个模糊集之间的相关系数在于判断它们之间的依存关系. 许多学者对此做了大量研究,比如模糊集的相关系数[15-18]、直觉模糊集的相关系数[19-23]和犹豫模糊集的相关系数[24-26]等. 最近,Das等[27]在犹豫模糊集相关系数的基础上,提出了犹豫模糊软集和区间值犹豫模糊软集的相关系数,并将其应用到多属性决策问题中.

犹豫模糊软集能使决策者更加灵活和准确地作出决策,在多属性决策问题中是一种十分实用的工具. 当决策者想要明确地表达自己对于事物中各个属性的偏好程度时,需要利用犹豫模糊软集包含的信息才能表达得更加全面. 本文在文献[25]的基础上,提出新的犹豫模糊软集的相关系数和犹豫模糊软集的加权相关系数,讨论它们的有关性质,并通过实例将其与已有的犹豫模糊软集的相关系数进行比较,从而验证其可行性和有效性.

1 预备知识

下面回顾一些基本知识.

定义1[5] 令X是一个固定集合,在X上的犹豫模糊集M定义为

$$M=\{\langle x,h_M(x)\rangle|x\in X\}.$$

其中:$h_M(x)$是$[0,1]$上的子集,表示对于$x\in X$,可能隶属度所组成的集合. 为了方便起见,将$h_M(x)$称为一个犹豫模糊元.

定义2[13] 令$\widehat{H}(X)$是X上犹豫模糊集的全体,其中X是一个固定集合. 令E是一个属性集且$A\subset E$. 一个有序对$(\widehat{F}_A,E)$表示在X上的一个犹豫模糊软集,其中$\widehat{F}_A$为如下映射:$\widehat{F}_A$:$E\to\widehat{H}(X)$.

例1 令$X=\{x_1,x_2,x_3\}$是可供选择的3套房子,令E是参数集且$E=\{e_1,e_2,e_3\}=\{$cheap, beautiful, goodenvironment$\}$,此时,犹豫模糊软集可用于表示决策者对房子的满意程度. 假设

$\widehat{F}_A(e_1)=$

$(\{x_1,(0.2,0.6)\},\{x_2,(0.5,0.7)\},\{x_3,(0.4,0.5)\})$,

$\widehat{F}_A(e_2)=$

$(\{x_1,(0.2,0.7)\},\{x_2,(0.2,0.4)\},\{x_3,(0.3,0.1)\})$,

$\widehat{F}_A(e_3)=$

$(\{x_1,(0.2,0.5)\},\{x_2,(0.8,0.1)\},\{x_3,(0.2,0.2)\})$,

则犹豫模糊软集可以表示为

$$(\widehat{F}_A,E)=\left\{\begin{array}{l}\langle e_1,\{x_1,(0.2,0.6)\},\{x_2,(0.5,0.7)\},\{x_3,(0.4,0.5)\}\rangle\\ \langle e_2,\{x_1,(0.2,0.7)\},\{x_2,(0.2,0.4)\},\{x_3,(0.3,0.1)\}\rangle\\ \langle e_3,\{x_1,(0.2,0.5)\},\{x_2,(0.8,0.1)\},\{x_3,(0.2,0.2)\}\rangle\end{array}\right\}.$$

定义3[28] 犹豫模糊软集可以用犹豫模糊软矩阵来表示. 若$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$且$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,则用$\mathcal{F}=(f_{ij})_{m\times n}$定义一个犹豫模糊软矩阵. 其中:$f_{ij}=h_F(x_i,e_j),i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$.

例2 考虑例1,可以根据定义3得到一个犹豫模糊软矩阵

$$\mathcal{F}=(f_{ij})_{3\times 3}=\begin{bmatrix}(0.2,0.6)&(0.2,0.7)&(0.2,0.5)\\(0.5,0.7)&(0.2,0.4)&(0.8,0.1)\\(0.4,0.5)&(0.3,0.1)&(0.2,0.2)\end{bmatrix}.$$

因此可以用矩阵$[f_{ij}]_{m\times n}=[h_F(x_i,e_j)]_{m\times n}$表示一个犹豫模糊软集$(\widehat{F}_A,E)$.

令$\mathcal{A}=[h_A(x_i,e_k)]_{m\times n}$和$\mathcal{B}=[h_B(x_i,e_k)]_{m\times n}$是定义在论域$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$和属性集$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$上的两个犹豫模糊软集. 文献[27]提出了两个犹豫模糊软集的相关系数的概念.

定义4[27] 两个犹豫模糊软集$\mathcal{A}=[h_A(x_i,e_k)]_{m\times n}$和$\mathcal{B}=[h_B(x_i,e_k)]_{m\times n}$的相关性定义为

$$C_{\mathrm{HFSS}}(\mathcal{A},\mathcal{B})=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{l_i}\Big(\sum_{j=1}^{l_i}[(h_{A\sigma(j)}(x_i,e_k))]\cdot[(h_{B\sigma(j)}(x_i,e_k))]\Big)\Big).$$

其中:$h_{A\sigma(j)}(x_i,e_k)(j=1,2,\cdots,l_i)$表示犹豫模糊元$h_A(x_i,e_k)$中隶属度的一个降序排列,$i=1,2,\cdots,m,k=1,2,\cdots,n;l_i=\max\{l(h_A(x_i,e_k)),l(h_B(x_i,e_k))\}$,$l(h_A(x_i,e_k))$和$l(h_B(x_i,e_k))$分别代表犹豫模糊元$h_A(x_i,e_k)$和$h_B(x_i,e_k)$中元素的个数,当$l(h_A(x_i,e_k))\neq l(h_B(x_i,e_k))$时,元素较少的犹豫模糊元将通过增加隶属度的个数使得长度一致,而增加的隶属度的值则为这个犹豫模糊元中最小的值.

定义5[27] 犹豫模糊软集$\mathcal{A}=[h_A(x_i,e_k)]_{m\times n}$与$\mathcal{B}=[h_B(x_i,e_k)]_{m\times n}$的相关系数定义如下:

$$\rho_{\mathrm{HFSS}}(\mathcal{A},\mathcal{B})=\frac{C_{\mathrm{HFSS}}(\mathcal{A},\mathcal{B})}{(C_{\mathrm{HFSS}}(\mathcal{A},\mathcal{A})\cdot C_{\mathrm{HFSS}}(\mathcal{B},\mathcal{B}))^{\frac{1}{2}}}.\quad(1)$$

2 犹豫模糊软集的相关系数

由定义5可以看出,Das等定义的两个犹豫模糊软集的相关系数要求两个犹豫模糊软集中的犹豫模糊元具有相同长度,否则需要通过增加隶属度的值使其长度一样. 另外,Das等定义的犹豫模糊软集的相关系数的值总是正的,这忽略了负相关的情形. 为了克服这两个明显的缺陷,本节将提出新的犹豫模糊软集的相关系数.

2.1 犹豫模糊软集的相关系数

设$\mathcal{F}=[h_F(x_i,e_k)]_{m\times n}$是定义在论域$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$上的犹豫模糊软集,其属性集为$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,而$\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_j\}(j=1,2,\cdots,l_{ik})$是每个犹豫模糊元$h_F(x_i,e_k)$的可能隶属度,其中$l_{ik}$是每个犹豫模糊元中元素的个数. 与犹豫模糊集类似,有如下定义.

定义6 令$h_F(x_i,e_k)=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_j\}$是定义在论域$X$上的犹豫模糊元,其中$\gamma_j(j=1,2,\cdots,l_{ik})$是犹豫模糊元中的可能隶属度,$l_{ik}$是犹豫模糊元中元素的个数. 犹豫模糊元$h_F(x_i,e_k)$的平均值定义如下:

$$\overline{h}_F(x_i,e_k)=\frac{1}{l_{ik}}\sum_{j=1}^{l_{ik}}\gamma_j.$$

定义7 设$\mathcal{A}=[h_A(x_i,e_k)]_{m\times n}$是定义在$X$上的一个犹豫模糊软集,则犹豫模糊软集$\mathcal{A}$的平均值定义如下:

$$\overline{\mathcal{A}}=E(\mathcal{A})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{h}_A(x_i,e_k)\right)\Big).$$

定义8 设$\mathcal{A}=[h_A(x_i,e_k)]_{m\times n}$是定义在$X$上的一个犹豫模糊软集,则犹豫模糊软集$\mathcal{A}$的方差定义如下:

$$\mathrm{Var}(\mathcal{A})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}})^2\Big).$$

定义9 设$\mathcal{A}=[h_A(x_i,e_k)]_{m\times n}$和$\mathcal{B}=[h_B(x_i,e_k)]_{m\times n}$是定义在$X$上的两个不同的犹豫模糊软集,其中$i=1,2,\cdots,m,k=1,2,\cdots,n$,则犹豫模糊软集$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的相关性定义如下:

$$C(\mathcal{A},\mathcal{B})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}]\cdot[\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}}]\Big).\tag{2}$$

定义10 设$\mathcal{A}=[h_A(x_i,e_k)]_{m\times n}$和$\mathcal{B}=[h_B(x_i,e_k)]_{m\times n}$是定义在$X$上的两个不同的犹豫模糊软集,其中$i=1,2,\cdots,m,k=1,2,\cdots,n$,则

$$\rho(\mathcal{A},\mathcal{B})=\frac{C(\mathcal{A},\mathcal{B})}{[C(\mathcal{A},\mathcal{A})\cdot C(\mathcal{B},\mathcal{B})]^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}]\cdot[\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}}]\Big)\Big/\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}]^2\Big)\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}}]^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\tag{3}$$

称为犹豫模糊软集$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的相关系数.

为了证明犹豫模糊软集相关系数的性质,引入柯西施瓦兹不等式

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\cdot(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2).\tag{4}$$

定理1 设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$为两个不同的犹豫模糊软集,则$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的相关系数满足:

1) $\rho(\mathcal{A},\mathcal{B})=\rho(\mathcal{B},\mathcal{A})$;

2) $-1\leqslant\rho(\mathcal{A},\mathcal{B})\leqslant 1$;

3) 若$\mathcal{A}=\mathcal{B}$,则$\rho_\omega(\mathcal{A},\mathcal{B})=1$.

证明 由定义10可知,1), 3)显然成立.

2) 由式(2)可知

$$|C(\mathcal{A},\mathcal{B})|=\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}]\cdot[\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}}]\Big)\Big|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|\cdot|\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|\Big)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_1,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|\cdot|\overline{h}_B(x_1,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|\Big)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_2,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|\cdot|\overline{h}_B(x_2,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|\Big)+\cdots+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_m,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|\cdot|\overline{h}_B(x_m,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|\Big).$$

由柯西施瓦兹不等式可知,对于任意$i=1,2,\cdots,m$,有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|\cdot|\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|\Big)\leqslant\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\times\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

因此

$$
\begin{aligned}
&|C(\mathcal{A},\mathcal{B})| \leqslant \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_1,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\times \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_B(x_1,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}+ \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_2,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\times \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_B(x_2,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}+\cdots+ \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_m,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\times \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_B(x_m,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\leqslant \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_1,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|^2\Big)+ \\
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_2,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|^2\Big)+\cdots+ \\
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_A(x_m,e_k)-\overline{\mathcal{A}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\times \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_B(x_1,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|^2\Big)+ \\
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_B(x_2,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|^2\Big)+\cdots+ \\
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}|\overline{h}_B(x_m,e_k)-\overline{\mathcal{B}}|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}= \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}]^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\times \\
&\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}}]^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

综上可得$|C(\mathcal{A},\mathcal{B})| \leqslant [C(\mathcal{A},\mathcal{A})]^{\frac{1}{2}}[C(\mathcal{B},\mathcal{B})]^{\frac{1}{2}}$. 因此有$-1 \leqslant \rho(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leqslant 1$. □

2.2 犹豫模糊软集的加权相关系数

在实际应用中,论域X中属性集$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$中每个属性的权重可能不相同. 因此,在本节中提出犹豫模糊软集的加权相关系数.

令$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$是$E$中属性的权重向量, $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k=1$. 设$\mathcal{A}=[h_A(x_i,e_k)]_{m\times n}$和$\mathcal{B}=[h_B(x_i,e_k)]_{m\times n}$是定义在论域$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$上的犹豫模糊软集,其属性集$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,而$\{\gamma_{A_1},\gamma_{A_2},\cdots,\gamma_{A_j}\}(j=1,2,\cdots,l_{A_{ik}})$, $\{\gamma_{B_1},\gamma_{B_2},\cdots,\gamma_{B_t}\}$ $(t=1,2,\cdots,l_{B_{ik}})$分别是每个犹豫模糊元$h_A(x_i,e_k)$和$h_B(x_i,e_k)$的可能隶属度,其中$l_{A_{ik}}$和$l_{B_{ik}}$分别是$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$中每个犹豫模糊元元素的个数. 接下来对以上提出的相关系数作进一步拓展:

1) 犹豫模糊软集的加权平均值为

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}_\omega=&\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\omega_k}{l_{A_{ik}}}\sum_{j=1}^{l_{A_{ik}}}\gamma_{A_j}\Big)\Big)= \\
&\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\omega_k\overline{h}_A(x_i,e_k))\Big). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

2) 犹豫模糊软集的加权方差为

$$
\mathrm{Var}(\mathcal{A}_\omega)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\omega_k\big(\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}_\omega\big)^2\Big). \qquad (6)
$$

3) 两个犹豫模糊软集$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的加权相关性为

$$
\begin{aligned}
&C_\omega(\mathcal{A},\mathcal{B})= \\
&\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\omega_k[\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}}_\omega][\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}}_\omega]\Big). \qquad (7)
\end{aligned}
$$

假设定义在论域X上的两个犹豫模糊软集$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的属性集$E_k(k=1,2,\cdots,n)$的权重向量是$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$,且$\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k=1$,定义$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的加权相关系数为

$$
\begin{aligned}
&\rho_\omega(\mathcal{A},\mathcal{B})=\frac{C_\omega(\mathcal{A},\mathcal{B})}{[C_\omega(\mathcal{A},\mathcal{A})\cdot C_\omega(\mathcal{B},\mathcal{B})]^{\frac{1}{2}}}= \\
&\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\omega_k[\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}_\omega}][\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}_\omega}]\Big)\Big/ \\
&\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\omega_k[\overline{h}_A(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{A}_\omega}]^2\Big)\times \\
&\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\omega_k[\overline{h}_B(x_i,e_k)-\overline{\mathcal{B}_\omega}]^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

定义如式(8)所示的犹豫模糊软集的加权相关系数,满足以下性质:

1) $\rho_\omega(\mathcal{A},\mathcal{B})=\rho_\omega(\mathcal{B},\mathcal{A})$;

2) $-1 \leqslant \rho(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leqslant 1$;

3) 若$\mathcal{A}=\mathcal{B}$,则$\rho_\omega(\mathcal{A},\mathcal{B})=1$.

显然,当属性集$E_k(k=1,2,\cdots,n)$的权重向量为$\omega=\Big\{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\Big\}^{\mathrm{T}}$时,加权犹豫模糊软集的相关系数将会退化为犹豫模糊软集的相关系数,即式(8)会退化为式(3).

3 应用实例

本节用一个实例[29]阐释犹豫模糊软集的相关系数在实际生活中的应用.

近几年来,环境问题日益受到人们的关注. 众所

周知,环境污染会引发极端天气,比如雾霾、全球变暖等,都会对人体健康产生一些负面影响. 雾霾天气会增加哮喘、心脏病和肺癌等诸多疾病的发病几率. 在74个城市空气质量检测中,雾霾导致室外空气颗粒物(PM2.5)达到95.5%. 肺癌病例中有1/5都是由雾霾导致的. 因此,中国如何在有限的医疗资源下应对这样一个局面是一个艰难的问题. 解决这个问题的关键在于如何去优化资源配置并加强对资源的投入与产出的收益之间的平衡,国内一些公立医院针对这些问题已经采取了一些措施. 因此,应该选择一些有效的方法对这些医院的应对措施进行评估. 在评估这些医院时,应该考虑以下3个因素: 1) 公共医疗卫生服务和药物的环境因素(e_1); 2) 个性化的诊断和治疗的优化(e_2); 3) 智慧型医疗卫生服务模式下的社会资源优化配置(e_3). 3个因素的权重向量为$\omega = \{0.2, 0.1, 0.7\}^{\mathrm{T}}$. 评估对象$X = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$分别为四川大学华西医院($A_1$)、复旦大学华山医院($A_2$)、协和医科大学医院($A_3$)和解放军总医院($A_4$). 专家们会给出一个比照样本(如表1所示),并且根据3个主要因素挑选3个不同的部门作为评估对象. 每家医院的评估结果用犹豫模糊软集矩阵表示,如表2～表5所示.

表1　比照样本

	e_1	e_2	e_3
门诊科	(0.3, 0.4, 0.6)	(0.7, 0.9, 0.4)	(0.6, 0.4, 0.5)
住院科	(0.5, 0.7, 0.4)	(0.5, 0.3, 0.6)	(0.7, 0.5, 0.9)
药剂科	(0.4, 0.2, 0.1)	(0.4, 0.8, 0.1)	(0.5, 0.8, 0.9)

表2　华西医院评估结果

	e_1	e_2	e_3
门诊科	(0.4, 0.2, 0.8)	(0.1, 0.3, 0.9)	(0.8, 0.2, 0.6)
住院科	(0.6, 0.8, 0.5)	(0.4, 0.3, 0.4)	(0.7, 0.1, 0.1)
药剂科	(0.3, 0.6, 0.2)	(0.5, 0.7, 0.2)	(0.9, 0.7, 0.4)

表3　华山医院评估结果

	e_1	e_2	e_3
门诊科	(0.5, 0.2, 0.7)	(0.7, 0.8, 0.1)	(0.2, 0.1, 0, 3)
住院科	(0.3, 0.5, 0.7)	(0.2, 0.3, 0.5)	(0.1, 0.6, 0.8)
药剂科	(0.4, 0.1, 0.4)	(0.8, 0.2, 0.1)	(0.6, 0.3, 0)

表4　协和医科大学医院评估结果

	e_1	e_2	e_3
门诊科	(0.2, 0.6, 0.4)	(0.9, 0.4, 0.6)	(0.8, 0.3, 0.5)
住院科	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.1, 0.5, 0.9)	(0.9, 0.7, 0.9)
药剂科	(0.1, 0.4, 0.3)	(0.4, 0.3, 0.7)	(0.4, 0.8, 0.9)

表5　解放军总医院评估结果

	e_1	e_2	e_3
门诊科	(0.6, 0.7, 0.7)	(0.3, 0, 0.2)	(0.4, 0.1, 0.3)
住院科	(0.1, 0.3, 0.2)	(0.5, 0.1, 0.2)	(0.1, 0, 0.2)
药剂科	(0.5, 0.4, 0.2)	(0.1, 0.2, 0.2)	(0.1, 0.1, 0.1)

根据专家提供的比照样本,利用它与评估结果的相关系数挑选出4家医院中最好的一所医院. 根据文中的数据利用式(8)计算出每个医院与对照样本的加权相关系数. 假设3个因素的权重向量为$\omega = \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right\}^{\mathrm{T}}$,利用文献[27]提出的犹豫模糊软集的相关测度(式(1))以及本文提出的犹豫模糊软集的相关系数(式(3))计算出每个医院与对照样本的相关系数. 计算结果如表6所示.

表6　3种相关系数结果比照

	评估对象	计算结果	排序	最佳选择
新的犹豫模糊软集的加权相关系数	A_1	0.1602	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	A_3
	A_2	0.3164		
	A_3	0.9735		
	A_4	−0.7538		
文献[27]的犹豫模糊软集的相关系数	A_1	0.9209	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	A_3
	A_2	0.9341		
	A_3	0.9809		
	A_4	0.7140		
新的犹豫模糊软集的相关系数	A_1	0.2738	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	A_3
	A_2	0.3499		
	A_3	0.9430		
	A_4	−0.6076		

根据新的犹豫模糊软集的相关性质和表6的结果可以得出以下几条结论:

1) 犹豫模糊软集能够把生活中的实际问题,尤其是特别复杂的问题,描述得更加准确. 犹豫模糊软集相较于犹豫模糊集而言,可以包含更多的信息,因此本文不会忽略决策者的主观意见,从而使得决策可以更加快速和有效.

2) 由表6的结果可以看出,虽然利用3种相关系数得到的排序是一样的,但是由文献[27]提出的犹豫模糊软集的相关测度得出的结果比较集中(相关系数都比较高),区分度不高,很难区分这些医院与比照样本的相关程度. 另外,文献[27]提出的相关测度是

没有负值的,因此在他们的定义下,所有的犹豫模糊软集之间的关系都是呈正相关的,在现实生活中显然不适用. 而在表6中不难发现,本文提出的相关测度呈现一个较好的分布,且可以很好地体现出比照样本与4所医院是相互促进(正相关)还是相互制约(负相关)的关系. 表6结果得出的最佳选择都是A_3,说明A_3是评估结果与比照样本最匹配的医院. 另外,本文附加了犹豫模糊软集的加权相关系数与前两者的对比,由此发现属性在占有不同比重的情况下,得出的相关系数也会随之变化.

4 结 论

犹豫模糊软集相关测度的研究是一个全新的且十分具有研究前景的主题. 犹豫模糊软集结合了犹豫模糊集和软集的特征,利用它可以处理现实生活中不确定和复杂的问题. 本文提出了一种新的犹豫模糊软集的相关系数和犹豫模糊软集的加权相关系数的概念,并给出了它们的相关性质,由此可以利用犹豫模糊软集的相关系数解决一些实际问题. 最后,通过一个实例将其与已存在的犹豫模糊软集相关系数进行比较,比较结果验证了其可行性和有效性.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Inforamtion Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Miyamoto S. Remarks on basics of fuzzy sets and fuzzy multisets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2005, 156(3): 427-431.

[4] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets and systems: Theory and applications[M]. New York: Academic Press, 1980: 370-374.

[5] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. The 18th IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Korea: Jeju Island, 2009: 1378-1382.

[6] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[7] Molodtsov D. Soft set theory-first results[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1999, 37(4/5): 19-31.

[8] Cagman N, Enginoglu S. Soft matrix theory and its decision making[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(10): 3308-3314.

[9] Cagman N, Enginoglu S. Soft set theory and uni-int decision making[J]. European J of Operational Research, 2010, 207(2): 848-855.

[10] Roy A R, Maji P K. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems[J]. J of Computational & Applied Mathematics, 2007, 203(2): 412-418.

[11] Xiao Z, Gong K, Zou Y. A combined forecasting approach based on fuzzy soft sets[J]. J of Computational & Applied Mathematics, 2009, 228(1): 326-333.

[12] Zou Y, Xiao Z. Data analysis approaches of soft sets under incomplete information[J]. Knowledge-Based Systems, 2008, 21(8): 941-945.

[13] Babitha K V, John S J. Hesitant fuzzy soft sets[J]. J of New Results in Science, 2013(3): 98-107.

[14] Rodgers J L, Nicewander W A. Thirteen ways to look at the correlation coefficient[J]. American Statistician, 1988, 42(1): 59-66.

[15] Chiang D A, Lin N P. Correlation of fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1999, 102(2): 221-226.

[16] Dumitrescu D. Fuzzy correlations[J]. Studia Universitatis Babes-Bolyai Biologia, 1978(23): 41-44.

[17] Hong D H. Fuzzy measures for a correlation coefficient of fuzzy numbers under TW(the weakest t-norm)-based fuzzy arithmetic operations[J]. Information Science, 2002, 176(2): 150-160.

[18] Liu S T, Kao C. Fuzzy measures for correlation coefficient of fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2002, 128(2): 267-275.

[19] Gerstenkorn T, Manko J. Correlation of intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2007, 44(1): 39-43.

[20] Hong D H, Hwang S Y. Correlation of intuitionistic fuzzy sets in probability spaces[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1995, 75(1): 77-81.

[21] Hung W L, Wu J W. Correlation of intuitionistic fuzzy sets by centroid method[J]. Information Science, 2009, 144(1): 219-225.

[22] Mitchell H B. A correlation coefficient for intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2004, 19(5): 483-490.

[23] Park J H, Lim K M, Park J S, et al. Correlation coefficient between intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Information & Engineering, 2009, 62: 601-610.

[24] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their application to clustering analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4): 2197-2211.

[25] Liao H C, Xu Z S, Zeng X J. Novel correlation coefficient between hesitant fuzzy sets and their application in decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 82(C): 115-127.

[26] Xu Z S, Xia M M. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information[J]. Int J of Intelligent Systems, 2011, 26(5): 410-425.

[27] Das S, Malakar D. Correlation measure of hesitant fuzzy soft sets and their application in decision making[J]. Neural Computing & Applications, 2017(8): 1-17.

[28] Das S, Kar S. The hesitant fuzzy soft set and its application in decision making[D]. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2015, 125: 235-247.

[29] Gou X J, Xu Z S. Novel basic operational laws for linguistic terms, hesitant fuzzy linguistic term sets and probabilistic linguistic term sets[J]. Information Science, 2016, 372: 407-427.

(责任编辑：闫 妍)