

考虑老化因素的串联系统不完全维修决策优化

李志强, 徐廷学[†], 顾钧元, 付霖宇, 安进

(海军航空大学 兵器科学与技术系, 山东 烟台 264001)

摘要: 针对 Markov 过程和虚拟役龄方法难以全面描述系统不完全维修的问题, 构建基于准更新过程的串联系统可用度分析模型, 提出平均故障间隔时间和平均维修间隔时间确定方法; 引入运行时间缩减因子、维修时间增长因子描述考虑老化因素的不完全维修过程, 确定系统可用度指标确定方法; 根据单位时间维修成本、系统平均运行时间约束条件, 确定系统在不同指标下的不完全维修次数. 以某控制系统为例, 应用传统方法验证不完全维修条件下可用度确定方法的有效性, 并以维修成本、运行时间为约束确定不同条件下的不完全维修次数, 为维修决策制定提供理论指导.

关键词: Markov 过程; 准更新过程; 串联系统; 系统可用度; 老化因素; 不完全维修

中图分类号: V233; TB114.3

文献标志码: A

Optimal maintenance policies for series systems under imperfect repair considering aging factor

LI Zhi-qiang, XU Ting-xue[†], GU Jun-yuan, FU Lin-yu, AN Jin

(Department of Ordnance Science and Technology, Naval Aviation University, Yantai 264001, China)

Abstract: Aiming at the difficulty of Markov process and virtual age in describing systems under imperfect repair comprehensively, a model for a series system to determine its availability is established on the base of quasi renewal process. Methods for obtaining the mean time between failures and mean time between repairs are proposed. By introducing the operation time reduction factor and repair time increasing factor, availability parameters of systems under imperfect repair considering the aging factor are determined. According to maintenance costs per unit of time and average functioning time, the times of performing imperfect repair can be calculated. Finally, a control unit is used as an example. A traditional method about availability is applied to verify the effectiveness of the proposed method under imperfect repair. And imperfect repair times are calculated under different conditions including maintenance costs and operation time, which can offer suggestions for maintenance decision making.

Keywords: Markov process; quasi renewal process; series system; system availability; aging factor; imperfect repair

0 引言

传统可靠性分析模型假设部件在故障失效后通过维修可以恢复到最初状态, 实现“修复如新”, 即完全维修; 或者恢复到故障发生前的状态, 实现“修复如旧”, 即最小维修. 随着多状态理论^[1-3]研究的深入, 人们逐渐认识到大多数部件除了正常运行与故障失效外, 还有处于二者之间的退化状态. 对于故障失效部件, 在经历维修之后, 可能恢复到最初的“如新”状态, 也可能恢复到故障之前的“如旧”状态, 更多的可能是恢复到介于二者之间的某一状态, 即不完全维修^[4-6].

陈杰等^[7]根据质量状态等级划分, 应用 Markov 链刻画了产品随机运动的统计规律; Cai 等^[8]应用动态贝叶斯网络对深海封井器进行了不完全维修研究. 但是, 这两类模型均假设多状态部件各状态之间的转移率为常数. 由于部件经历长时间的工作运行与维修检修, 逐渐从“浴盆曲线”的平稳期过渡到衰退期, 失效率由常数逐渐过渡到关于时间的递增函数. 葛恩顺等^[9]应用连续时间 Markov 链研究了不完全维修情况下, 单部件系统维修与更换的优化策略. Liu 等^[10]在失效率函数为时间一阶函数或者二阶函数的

收稿日期: 2018-10-17; 修回日期: 2018-05-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51605487); 中国博士后科学基金项目(2016M592965); 山东省自然科学基金项目(ZR2016FQ03).

作者简介: 李志强(1988—), 男, 博士生, 从事可靠性建模与维修决策优化的研究; 徐廷学(1962—), 男, 教授, 博士, 从事武器装备综合保障理论、可靠性评估与维修决策优化等研究.

[†]通讯作者. E-mail: yt-xtx@163.com.

假设条件下,应用通用生成函数建立了多状态系统的可靠性评估模型.但是,随着部件状态的增加或者失效率函数的复杂化,非齐次连续时间Markov模型的求解变得十分繁琐^[11].

为了避免模型复杂化,部分学者引入基于虚拟役龄的Kijima I模型和Kijima II模型,表征不完全维修对部件/系统运行状态的改善效果^[12-15].改善因子随着维修次数的增加逐渐减小,部件的运行时间逐渐缩减,相应的维修时间逐渐增多. Maria等^[12]研究了考虑役龄递减因子和失效率递减因子的不完全维修模型,对矿井挖掘机的可用度进行了预测; Yang等^[16]在役龄衰减机制的基础上,提出了两种广义更新过程,预测产品在保修期内的失效次数.

以上模型主要考虑了部件的故障失效情况,对维修因素考虑较少.邓奥攀等^[17]应用Weibull模型对同时考虑老化与不完全维修因素的电力系统进行建模,预测了其中长期可靠性水平. Dinh等^[18]构建了基于Kijima II虚拟役龄的Weibull模型,对维修效果、预防性维修策略优化进行了分析.鉴于特定分布模型的应用局限性,本文建立串联结构系统在运行时间、维修时间服从任意分布条件下的不完全维修模型,根据系统的可用度需求、维修成本等约束条件,确定串联系统部件更换维修的优化策略.

1 模型假设与符号说明

1.1 模型假设

控制系统作为某型导弹武器系统的关键部件,由导航计算机、加速度计、模拟控制机、无线电高度表和电动舵系统串联构成^[19].随着服役年限的增加,控制系统经历频繁的贮存、检测、值班,承受振动、温湿度、盐雾等各种环境应力,相比于服役前期出现了更多的故障失效事件.分析寿命周期可知,导弹已从平稳期逐渐进入了衰退期,因此在进行可靠性指标分析、制定维修决策时必须充分考虑老化退化因素.

在一定可靠度水平条件下,某部件不完全维修的运行时间和维修时间变化规律如图1所示.在装配之初,部件从最好的工作状态开始运行,当可靠度指标下降到一定程度时,对部件停机维修.一般情况下,难以实现部件的完全维修,维修之后,部件恢复到停机前状态与最好状态之间的某一中间状态.如此往复,直到部件修复后的可靠度指标达不到系统需求或者累积维修次数达到一定数量时,对部件进行更换维修.在进行不完全维修时,部件的运行时间逐渐缩短,即 $T_1 > T_2 > T_3 > \dots$,而维修时间逐渐增加,即 $S_1 < S_2 < S_3 < \dots$.

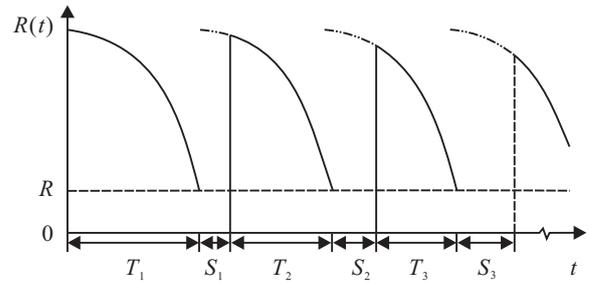


图1 考虑老化因素的部件不完全维修过程

针对多部件串联系统的不完全维修模型作出如下假设:

- 1) 串联系统由 n 个部件构成,在 $t = 0$ 时刻从完好状态开始运行;
- 2) 当处于位置 i 的部件失效次数 $j < k_i$ ($k_i - 1$ 为最大不完全维修次数)时,对失效部件进行不完全维修;
- 3) 当处于位置 i 的部件发生第 k_i 次失效时,对失效部件采取更换维修策略;
- 4) 系统中各个部件的维修时间与相应的运行时间相关;
- 5) 同一位置部件的运行时间之间、维修时间之间相互独立;
- 6) 系统的稳态可用度存在;
- 7) 系统不存在两个或者多个部件同时失效.

在串联系统中,当一个部件进行失效维修时,其他所有部件处于“历程中止”状态,在部件维修结束后,系统重新恢复运行状态.处于“历程中止”状态的部件与停机前状态一致,即系统中任意一个部件的失效中止了其他所有部件的状态变化.当部件的不完全维修累积到一定次数时,则需要更换维修了.

1.2 符号说明

POS: 部件总运行时间,包括部件从投入使用到失效更换之间的运行时段;

n : 系统包含的部件数;

i : 部件位置参数, $i = 1, 2, \dots, n$;

k : 各个位置部件标号, $k = 1, 2, \dots$;

$k_i - 1$: 处于位置 i 的部件最大不完全维修次数, $k_i \geq 1$;

j : 部件的不完全维修次数, $j = 1, 2, \dots, k_i - 1$;

Z_{ik} : 处于位置 i 的部件 k 总运行时间;

X_{ijk} : 处于位置 i 的部件 k 在维修 $j - 1$ 次后的运行时间;

Y_{ijk} : 处于位置 i 的部件 k 在第 j 次失效的不完全维修时间;

Y_{ikik} : 处于位置 i 的部件 k 完全维修时间;

μ_{ij} : X_{ijk} 的期望值, 即 $E[X_{ijk}]$;

η_{ij} : Y_{ijk} 的期望值, 即 $E[Y_{ijk}]$;

μ_i : 处于位置 i 的部件总运行时间, 即 $\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij}$;

η_i : 处于位置 i 的部件总维修时间, 包括完全维修时间和不完全维修时间, 即 $\sum_{j=1}^{k_i} \eta_{ij}$;

$U(t)$: 在 $[0, t]$ 时段内, 系统累积运行时间;

$D(t)$: 在 $[0, t]$ 时段内, 系统累积停机时间;

$U_i(t)$: 在 $[0, t]$ 时段内, 处于位置 i 的部件累积运行时间;

$D_i(t)$: 在 $[0, t]$ 时段内, 处于位置 i 的部件累积停机时间;

$\tilde{N}_i(t)$: 在 $[0, t]$ 时段内, 处于位置 i 的部件累积失效次数;

$\tilde{N}(t)$: 在 $[0, t]$ 时段内, 系统的累积失效次数;

$\tilde{N}_{ij}(t)$: 在 $[0, t]$ 时段内, 处于位置 i 的部件经历 $j-1$ 次维修后的累积失效次数;

$U_{ij}(t)$: 在 $[0, t]$ 时段内, 处于位置 i 的部件经历 $j-1$ 次维修后的累积运行时间;

a.s.: almost surely, 几乎;

α_i : 处于位置 i 的部件运行时间减少因子;

β_i : 处于位置 i 的部件维修时间增长因子.

2 考虑老化因素的串联系统可用度建模

2.1 系统可用度建模

处于位置 i 的部件 k 在经历第 $j-1$ 次维修后的运行时间与第 j 次维修时间相关. 部件的工作时间 X_{ijk} 与维修时间 Y_{ijk} 之间的相关性可以用联合分布密度函数 $f_{ij}(x, y)$ 表示, 相应的边缘密度函数 $f_{ij}(x)$ 、 $g_{ij}(y)$ 分别表示为

$$E(X_{ijk}) = \int_0^\infty x f_{ij}(x) dx = \mu_{ij}, \quad (1)$$

$$E(Y_{ijk}) = \int_0^\infty y g_{ij}(y) dy = \eta_{ij}. \quad (2)$$

令 $U_i(t)$ 为处于位置 i 的部件运行时间, 当其他部件进行维修时, 该部件处于停机状态. 因此, $U(t) = U_i(t)$. 由于 $U(t) + D(t) = t$, 有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{ij}(t)-1} Y_{ijk} \leq D(t) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{ij}(t)} (t) Y_{ijk}, \quad (3)$$

$$\frac{U(t)}{t} = \left[1 + \frac{D(t)}{U(t)} \right]^{-1} \geq \left[1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{\tilde{N}_{ij}(t)} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{ij}(t)} Y_{ijk} \frac{N_{ij} U_{ij}(t)}{U_{ij}(t)} \frac{U_{ij}(t)}{U_i(t)} \right]^{-1}. \quad (4)$$

其中: $N_{ij}(U_{ij}(t)) = \tilde{N}_{ij}(t)$, $\{N_{ij}(t), t \geq 0\}$ 为关于 $\{X_{ijk}\}$ 的计数更新过程.

由大数定理, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{N}_{ij}(t)} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{ij}(t)} Y_{ijk} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \eta_{ij}, \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_{ij}(t)}{U_i(t)} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \frac{\mu_{ij}}{\mu_i}. \quad (6)$$

由基本更新定理^[6,13,20], 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_{ij}(t)}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \frac{1}{\mu_{ij}} \text{ 或 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_{ij}(U_{ij}(t))}{U_{ij}(t)} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \frac{1}{\mu_{ij}}. \quad (7)$$

联立式(6)有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \left[1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \eta_{ij} \cdot \frac{1}{\mu_{ij}} \cdot \frac{\mu_{ij}}{\mu_i} \right]^{-1} = \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\mu_i} \right]^{-1}. \quad (8)$$

因此, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\mu_i} \right]^{-1}. \quad (9)$$

对于所有 $t > 0$, 有 $0 \leq \frac{U(t)}{t} \leq 1$, 则系统的稳态可用度存在. 根据 Lebesgue 控制收敛定理, 系统可用度表示为

$$A_{av} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(U(t))}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\mu_i} \right]^{-1}. \quad (10)$$

2.2 系统MTBF与MTBR

对于不可修部件而言, 平均寿命 (MTTF) 指一批部件在故障失效前的平均工作运行时间. 对于可修部件而言, 平均寿命又称平均故障间隔时间 (MTBF), 指单部件两次相邻故障间的平均工作运行时间. 平均维修间隔时间 (MTBR), 指部件修复性维修总时间与故障失效次数之比. 在 $[0, t]$ 时间段内, 系统的平均运行时间近似为

$$\frac{U(t)}{\tilde{N}(t)} = \frac{U(t)/t}{\sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(t)/t}. \quad (11)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\frac{U(t)}{\tilde{N}(t)} \rightarrow 0$.

部件单位时间内的平均失效次数为

$$\tilde{N}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{N}_i(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{N}_i(t)}{U(t)} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \frac{k_i}{\mu_i} A_{av}. \quad (12)$$

由式(9), 有

$$\bar{\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{\tilde{N}(t)} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \frac{A_{av}}{\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\mu_i} A_{av}} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\mu_i} \right]^{-1}. \quad (13)$$

在时间 $[0, t]$ 内,系统的平均停机时间近似为

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{\tilde{N}(t)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{ij}(t)} Y_{ijk}. \quad (14)$$

类似地,有

$$\tilde{\eta} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \tilde{\mu} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\mu_i}. \quad (15)$$

则有

$$D_{\text{av},i} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D_i(t)}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \frac{\eta_i}{\mu_i} A_{\text{av}}, \quad (16)$$

$$D_{\text{av}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} A_{\text{av}} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\mu_i}. \quad (17)$$

2.3 考虑老化因素的系统可用度

假设在不完全维修后,部件运行时间为前一次运行时间的 $\alpha_i (0 < \alpha_i \leq 1)$ 倍,维修时间增加到前一次维修时间的 $\beta_i (\beta_i \geq 1)$ 倍,有

$$\begin{cases} \mu_{i(j+1)} = \alpha_i \mu_{ij}, \\ \eta_{i(j+1)} = \beta_i \eta_{ij}. \end{cases} \quad (18)$$

其中:对于任意部件 i ,有 $1 \leq j \leq k_i - 1$ 且 $k_i - 1 \geq 1$; $k_i - 1$ 为处于位置 i 的部件最大不完全维修次数; $k_i = 1$ 表示部件只有完全维修,即 $\alpha_i \equiv 1$.

定义 $\alpha_i (0 < \alpha_i \leq 1)$ 为运行时间减少因子,表示在考虑老化因素时,部件维修后的运行时间随维修次数的增加依次递减;同样,定义 $\beta_i (\beta_i \geq 1)$ 为维修时间增长因子,表示在考虑老化因素时,部件失效后的维修时间随着维修次数的增加依次递增.运行时间减少因子、维修时间增长因子可以根据部件历次运行时间、维修时间进行数据拟合确定.

由式(18)可知,处于位置 i 的部件累积运行时间为

$$\begin{aligned} \mu_i &= \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} = \\ &\mu_{i1} + \alpha_i \mu_{i1} + \alpha_i^2 \mu_{i1} + \dots + \alpha_i^{k_i-1} \mu_{i1} = \\ &\frac{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})}{1 - \alpha_i}, \end{aligned} \quad (19)$$

累积停机时间为

$$\begin{aligned} \eta_i &= \sum_{j=1}^{k_i} \eta_{ij} = \\ &\eta_{i1} + \beta_i \eta_{i1} + \beta_i^2 \eta_{i1} + \dots + \beta_i^{k_i-1} \eta_{i1} = \\ &\frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})}{1 - \beta_i}. \end{aligned} \quad (20)$$

假设部件的完好维修时间为 τ_i ,有

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{k_i} \eta_{ij} = \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i-1})}{1 - \beta_i} + \tau_i. \quad (21)$$

将式(19)和(20)代入式(6)、(9)和(10),有

$$A_{\text{av}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(U(t))}{t} = \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)} \right]^{-1}, \quad (22)$$

$$\bar{\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{\tilde{N}(t)} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \left[\sum_{i=1}^n \frac{k_i(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})} \right]^{-1}, \quad (23)$$

$$\bar{\eta} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{\tilde{N}(t)} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \bar{\mu} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)}, \quad (24)$$

$$D_{\text{av},i} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D_i(t)}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)} \right]^{-1} \cdot \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)}, \quad (25)$$

$$D_{\text{av}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \left\{ 1 + \left[\sum_{i=1}^n \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)} \right]^{-1} \right\}^{-1}. \quad (26)$$

处于位置 i 的部件单位时间失效次数为

$$\bar{N}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{N}_i(t)}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} A_{\text{av}} \frac{k_i(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})}. \quad (27)$$

系统的单位时间平均失效次数为

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{N}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(t)}{t} \stackrel{\text{a.s.}}{=} \\ &A_{\text{av}} \left[\sum_{i=1}^n \frac{k_i(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

特别地,对于完全维修,有

$$\lim_{\alpha_i \rightarrow 1} \mu_i = k_i \mu_{i1}, \quad (29)$$

$$\lim_{\beta_i \rightarrow 1} \eta_i = k_i \eta_{i1}. \quad (30)$$

3 串联系统不完全维修优化维修策略

3.1 单位时间停机维修成本

假设 d_i 表示部件 $i (1 \leq i \leq n)$ 失效后维修的单位时间成本,包含单位时间停机成本 d_0 和单位时间维修成本 d_{im} ,有 $d_i = d_0 + d_{im}$.在 $[0, t]$ 时间段内,串联系统总的维修成本与停机成本为

$$C_1(t) = \sum_{i=1}^n d_i D_i(t), \quad (31)$$

单位时间成本为

$$\bar{C}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_1(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n d_i \frac{D_i(t)}{t}. \quad (32)$$

由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D_i(t)}{t} = D_{\text{av},i}$,引入老化因子 (α_i, β_i) ,

有

$$\bar{C}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_1(t)}{t} = A_{av} \left[\sum_{i=1}^n d_i \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})}{1 - \beta_i} \cdot \frac{1 - \alpha_i}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})} \right], \quad (33)$$

即

$$\bar{C}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)}}. \quad (34)$$

3.2 不同维修方式停机维修成本

假设处于位置*i*的部件不完全维修与停机成本为*d_{i1}*,完全维修与停机成本为*d_{i2}*,且*d_{i1}* < *d_{i2}*,则在[0, *t*]时间段内,串联系统总的维修成本与停机成本为

$$C_2(t) = \sum_{i=1}^n \left\{ d_{i1} \left[\tilde{N}_i(t) - \left\lfloor \frac{\tilde{N}_i(t)}{k_i} \right\rfloor \right] + d_{i2} \left\lfloor \frac{\tilde{N}_i(t)}{k_i} \right\rfloor \right\}, \quad (35)$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于*x*的最大整数. 则系统的单位时间成本为

$$\bar{C}_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ d_{i1} \cdot \tilde{N}_i(t)/t + (d_{i2} - d_{i1}) \left\lfloor \frac{\tilde{N}_i(t)}{k_i} \right\rfloor / t \right\}. \quad (36)$$

由于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{N}_i(t)/t = \bar{N}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{N}_i(t) - k_i]/t, \quad (37)$$

$$\left\lfloor \frac{\tilde{N}_i(t) - k_i}{k_i} \right\rfloor / t \leq \left\lfloor \frac{\tilde{N}_i(t)}{k_i} \right\rfloor / t \leq \frac{\tilde{N}_i(t) - k_i}{k_i} / t, \quad (38)$$

有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{\tilde{N}_i(t)}{k_i} \right\rfloor / t = \bar{N}_i(t)/k_i, \quad (39)$$

$$\bar{C}_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2(t)}{t} = A_{av} \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} [(k_i - 1)d_{i1} + d_{i2}]. \quad (40)$$

因此

$$\bar{C}_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2(t)}{t} = A_{av} \sum_{i=1}^n [(k_i - 1)d_{i1} + d_{i2}] \frac{1 - \alpha_i}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})}, \quad (41)$$

即

$$\bar{N}_2 = \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)} \right]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(1 - \alpha_i)[(k_i - 1)d_{i1} + d_{i2}]}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})}. \quad (42)$$

当 $d_i \eta_i = [(k_i - 1)d_{i1} + d_{i2}]$ 时, $\bar{C}_1 = \bar{C}_2$.

3.3 不同约束条件下的优化维修决策

对于可用度要求高的装备,通过减少不完全维修次数可以有效提高系统的可用度. 特别地,当 $k_i = 1$ 时,对系统部件只进行故障后更换,此时的系统具有最高的可用度. 相比于完全维修,不完全维修节约成本,从经济可承受性角度出发,优化部件的不完全维修次数,在保证可用度的前提下,可以有效降低系统的维修成本.

给定维修成本条件下,系统的最大可用度为

$$\begin{aligned} \max A_{av} &= \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)} \right]^{-1}. \\ \text{s.t. } \bar{C}_2 &\leq C_{20}, \\ k_1, k_2, \dots, k_n &\geq 1, \\ k_1, k_2, \dots, k_n &= \text{integer}. \end{aligned} \quad (43)$$

其中常数 C_{20} 为给定的系统单位时间维修成本.

在满足系统运行时间条件下,系统的最小维修成本为

$$\begin{aligned} \min \bar{C}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n d_i \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_{i1}(1 - \beta_i^{k_i})(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})(1 - \beta_i)}}. \\ \text{s.t. } \bar{\mu} &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{k_i(1 - \alpha_i)}{\mu_{i1}(1 - \alpha_i^{k_i})} \right]^{-1} \geq \bar{\mu}_0; \\ k_1, k_2, \dots, k_n &\geq 1; \\ k_i &\leq k_i^0, \forall i = 1, 2, \dots, n; \\ k_1, k_2, \dots, k_n &= \text{integer}. \end{aligned} \quad (44)$$

其中:常数 $\bar{\mu}_0$ 为给定的系统运行时间, k_i^0 为 k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的上限值.

4 实例分析

结合可靠性设计指标,部件历史故障数据与维修信息,确定控制系统各部件的平均故障时间MTTF、平均维修时间MTTR、可失效次数*k_i*、不完全维修成本*d_{i1}*和完全维修成本*d_{i2}*,如表1所示. 统计历次运行时间、维修时间,拟合部件失效次数*k_i*与运行时间缩减因子、维修时间增加因子之间的函数关系,并参考专家意见确定 α_i 、 β_i 的数值. 以电动舵系统为例,假设近5次工作运行时间分别为792、718、650、580、530,通过线性拟合,即可确定 $\alpha_i \approx 0.9$. 类似地,可以确定其他部件的运行时间减少因子与维修时间增长因子. 假设各部件维修成本之间满足 $d_i \eta_i = [(k_i - 1)d_{i1} + d_{i2}]$ 的关系,则可确定部件失效后的单位时间维修成本*d_i*,如表1所示.

表1 控制单元部件参数

序号	名称	MTTF	MTTR	k_i	α_i	β_i	d_i	d_{i1}	d_{i2}
1	计算机	1000	2.0	3	0.90	1.05	90	40	100
2	加导航速度计	500	1.0	4	0.95	1.05	70	10	40
3	模拟控制机	200	0.5	5	0.95	1.05	80	5	20
4	无线电高度表	100	0.2	6	0.95	1.10	100	2	10
5	电动舵系统	800	1.0	3	0.90	1.10	70	15	40

4.1 模型验证

对控制系统各部件采取完全维修策略时,可以保证系统具有最高的可用度,平均运行时间相对最长,部件维修时间缩短为各个部件的完全维修时间,即更换维修时间.

针对不完全维修次数的不同,控制系统在不完全维修条件下具有相对较低的可用度、相对较短的平均运行时间和相对较长的维修时间.表2为控制系统在完全维修与给定不完全维修次数下的可用度指标.

表2 不同维修方式下的仿真结果

参数	完全维修	不完全维修
系统可用度	0.9903	0.9880
系统平均运行时间	51.9481	46.5171
部件1的停机时间	0.0020	0.0023
部件2的停机时间	0.0020	0.0023
部件3的停机时间	0.0025	0.0030
部件4的停机时间	0.0020	0.0029
部件5的停机时间	0.0013	0.0015
部件1的失效次数	0.0010	0.0011
部件2的失效次数	0.0020	0.0021
部件3的失效次数	0.0050	0.0055
部件4的失效次数	0.0100	0.0112
部件5的失效次数	0.0013	0.0014

由于完全维修的存在,控制系统各部件“修复如新”,因此具有比相对不完全维修更高的可用度和相对更长的平均运行时间.由于不完全维修的存在,控制系统各部件在维修后,恢复到介于完好状态与失效状态之间的某一状态,相对于完全维修具有较长的停机时间和较多的失效次数.特别地,当 $k_i = 1$ 时,系统部件的不完全维修转化为完全维修.此时,不完全维修模型与完全维修模型仿真结果一致,正好检验了不完全维修模型建立的准确性和有效性.

4.2 不完全维修优化方案

对于可维修次数少、部件数量少的系统,可以采用枚举法确定优化维修方案.由于控制系统部件多、可维修次数不一,共有1080个维修更换方案,拟采用非线性规划确定优化维修方案.

1) 给定维修成本下的维修方案.假设控制系统可用的单位时间成本为0.22,确定在此条件下系统的最大可用度.根据式(22)、(42)和(43),并结合约束条件,确定控制系统的优化维修方案,如表3所示.在4个方案中,优化方案4具有最低的单位时间成本,优化方案2具有最高的可用度.相对于优化方案4,优化方案2可多进行一次不完全维修,因此在提高系统可用度的同时增加了单位时间成本.

表3 给定维修成本下的优化维修方案

优化方案	部件					单位成本	可用度
	1	2	3	4	5		
1	3	4	4	6	3	0.2187	0.9881
2	3	4	5	5	3	0.2178	0.9882
3	3	4	5	6	2	0.2197	0.9881
4	3	4	5	6	3	0.2158	0.9880

2) 给定系统运行时间下的维修方案.当系统运行时间为50时,有293个优化方案,当运行时间维51时,有66个优化方案.为了减少分析的方案数量,设定运行时间为51.7,此时有4个优化方案,如表4所示.优化方案1具有最长的运行时间,具有相对最低的单位时间成本,此时部件的可失效次数为1,即对所有部件进行完全维修.

表4 给定运行时间下的优化维修方案

优化方案	部件					运行时间	单位时间成本
	1	2	3	4	5		
1	1	1	1	1	1	51.9481	0.7997
2	1	1	1	1	2	51.7711	0.8087
3	1	2	1	1	1	51.8100	0.8067
4	2	1	1	1	1	51.8064	0.8136

5 结论

针对Markov过程和虚拟役龄模型难以全面描述系统不完全维修的问题,建立了考虑老化因素的控制系统的可用度分析模型,并提出了不同约束条件下的维修决策优化方法.

1) 串联系统可用度分析模型只依赖于初次故障时间、初次维修时间、部件的最大不完全维修次数以及运行时间缩减因子、维修时间增长因子,适用于任意运行时间分布、维修时间分布部件,避免了Markov模型、Weibull模型特定分布的局限性.

2) 确定了不同约束条件下部件维修更换的优化方法,在给定维修费用的条件下,可以确定系统的最大可用度;在给定系统平均运行时间的情况下,可以确定满足使用要求时的费用率.

参考文献(References)

- [1] Anatoly L, David E, David L, et al. A multi-state Markov model for a short-term reliability analysis of a power generating unit[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2012, 98: 1-6.
- [2] Li Y F, Enrico Z. A multi-state model for the reliability assessment of a distributed generation system via universal generating function[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2012, 106: 28-36.
- [3] 李志强, 徐廷学, 董琪, 等. 基于Markov模型的多状态不可修元件可靠性评估[J]. *电光与控制*, 2017, 24(9): 58-63.
(Li Z Q, Xu T X, Dong Q, et al. Markov model based reliability assessment of non-repairable element with multiple states[J]. *Electronics Optics & Control*, 2017, 24(9): 58-63.)
- [4] 潘刚, 尚朝轩, 蔡金燕, 等. 基于Semi-Markov模型的多态系统不完全维修决策[J]. *航空学报*, 2017, 38(2): 200-214.
(Pan G, Shang C X, Cai J Y, et al. Imperfect maintenance decision for multi-state system based on Semi-Markov model[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2017, 38(2): 200-214.)
- [5] 葛恩顺, 李庆民, 张光宇, 等. 考虑不完全维修的劣化系统最优视情维修策略[J]. *航空学报*, 2013, 34(2): 316-324.
(Ge E S, Li Q M, Zhang G Y, et al. Optimization of condition-based maintenance for degradation systems under imperfect maintenance[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2013, 34(2): 316-324.)
- [6] Wang H Z, Hoang P. Availability and maintenance of series systems subject to imperfect repair and correlated failure and repair[J]. *European J of Operational Research*, 2006, 174(3): 1706-1722.
- [7] 陈杰, 陈志祥, 高腾, 等. 不完备质量和融资能力约束下的多产品风险厌恶库存模型[J]. *控制与决策*, 2017, 32(4): 647-655.
(Chen J, Chen Z X, Gao T, et al. Multi-product risk-averse inventory system with imperfect quality and financing capacity constraint[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(4): 647-655.)
- [8] Cai B P, Liu Y H, Zhang Y W, et al. Dynamic Bayesian networks based performance evaluation of subsea blowout preventers in presence of imperfect repair[J]. *Expert Systems With Applications*, 2013, 40: 7544-7554.
- [9] 葛恩顺, 李庆民, 黄傲林, 等. 不完全维修下的单部件系统视情维修及更换策略[J]. *系统工程与电子技术*, 2012, 34(12): 2509-2513.
(Ge E S, Li Q M, Huang A L, et al. Condition-based maintenance and replacement policy for single-unit system under imperfect maintenance[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(12): 2509-2513.)
- [10] Liu Y, Huang H Z. Optimal replacement policy for multi-state system under imperfect maintenance[J]. *IEEE Trans on Reliability*, 2010, 59(3): 483-495.
- [11] Krishna B M. Handbook of performability engineering[M]. London: Springer-Verlag London Limited, 2008: 369-380.
- [12] Maria L G T, Marta A F, Enrico A C, et al. ARA and ARI imperfect repair models: Estimation, goodness-of-fit and reliability prediction[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2015, 140: 107-115.
- [13] Monika T, Rajiv N R, Nomes B. Imperfect repair modeling using Kijima type generalized renewal process[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 124: 24-31.
- [14] Maxim F. On the optimal degree of imperfect repair[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2015, 138: 54-58.
- [15] 崔铁军, 马云东. 基于不完全维修的可修系统平均故障次数研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2016, 36(1): 184-188.
(Cui T J, Ma Y D. Research on the number of failures of repairable systems based on imperfect repair model[J]. *System Engineering—Theory & Practice*, 2016, 36(1): 184-188.)
- [16] Yang D, He Z, He S G. Warranty claims forecasting based on a general imperfect repair model considering usage rate[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 145: 147-154.
- [17] 邓奥攀, 胡志坚, 胡美玉, 等. 同时计及设备老化与不完全维修的电力系统可靠性评估[J]. *电力系统保护与控制*, 2017, 45(3): 69-74.
(Deng A P, Hu Z J, Hu M Y, et al. Power system reliability evaluation considering deterioration and imperfect maintenance of equipment[J]. *Power System Protection and Control*, 2017, 45(3): 69-74.)
- [18] Dinh T N, Yann D, Mitra F. Analytical properties of an imperfect repair model and application in preventive maintenance scheduling[J]. *European J of Operational Research*, 2017, 256(2): 439-453.
- [19] 李志强, 徐廷学, 顾钧元, 等. 融合不确定信息的某型导弹控制系统可靠性分析方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2017, 39(12): 2869-2876.
(Li Z Q, Xu T X, Gu J Y, et al. Reliability analysis of a missile control system by fusing uncertain information[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39(12): 2869-2876.)
- [20] Wang H Z. A survey of maintenance policies of deteriorating systems[J]. *European J of Operational Research*, 2002, 139(3): 469-489.

(责任编辑: 齐 霁)