第 34 卷 第 4 期　　控 制 与 决 策　　Vol.34 No.4
2019 年 4 月　　Control and Decision　　Apr. 2019

文章编号: 1001-0920(2019)04-0834-09　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1301

联盟值为梯形模糊数的合作对策最小平方求解模型与方法

肖　燕, 李登峰†

(福州大学 经济与管理学院，福州 350108)

摘　要: 针对现实经济管理决策环境与条件具有模糊性的特点,着重研究一类联盟特征(或支付)值为梯形模糊数的合作对策,提出一种求解梯形模糊数合作对策的最小平方优化方法. 利用梯形模糊数距离(平方)概念和最小平方法,建立最小化局中人联盟分配和支付值差值平方和的优化模型,根据模型推导出联盟成员梯形模糊数分配值的解析公式,探讨该最小平方解的重要性质. 设计一种新的理论优化模型以避免传统梯形模糊数减法导致的计算结果不确定性扩大等问题,为求解梯形模糊数合作对策提供一种新的实践工具与参考思路.

关键词: 梯形模糊数合作对策；最小平方法；配送联盟；损失函数；数学规划

中图分类号: TP273　　**文献标志码:** A

The least square solution model and method of cooperative games with trapezoidal fuzzy numbers

XIAO Yan, LI Deng-feng†

(College of Economics and Management，Fuzhou University，Fuzhou 350108，China)

Abstract: In view of the characteristics of the fuzzy nature of real economic management decision making environment and conditions, this paper studies a class of cooperative games that the values of coalitions are expressed with trapezoidal fuzzy numbers. The main purpose of this paper is to develop a kind of least square optimization method for solving trapezoidal fuzzy number cooperative games. Firstly, according to the concept of the trapezoidal fuzzy numbers' distance (square) and the least square method, an optimized mathematical model is proposed by considering that players in coalitions try to guarantee their payoffs' sums being as close to the coalitions' values as possible. Then all players' analytical formulas of trapezoidal fuzzy number payoffs are determined by the optimized mathematical model. Finally, some important properties of the least square solutions are discussed. The new model is proposed to avoid the uncertainty expansion caused by the trapezoidal fuzzy number subtraction, which can provide a new theoretical perspective and practical tool for solving the trapezoidal fuzzy number cooperative games.

Keywords: trapezoidal cooperative game；least square method；dispatch coalition；loss function；mathematical programming

0　引　言

因经济管理活动中决策环境的复杂性与多变性、信息的不完备性以及人类思维的模糊性,联盟收益值通常以模糊数据代替精确数据的形式给出[1-3]. 联盟特征函数用区间值表示的合作对策就是联盟值具有不确定性的合作对策的一种重要形式,常简称为区间值合作对策. 区间值更一般化的结果是梯形模糊数,换言之,区间值是梯形模糊数的一种特例. 联盟特征函数用梯形模糊数表示的合作对策称为梯形模糊数合作对策. 在梯形模糊数合作对策中,由于每个联盟的收益往往无法用精确数表示,只能以一个梯形模糊数的形式估计出每个联盟的收益[4-5]. 联盟值用区间值表示的合作对策是经典清晰合作对策的重要推广[6-7],而梯形模糊数合作对策又是区间值合作对策的一个延伸推广.

现有的模糊值合作对策求解方法很少有涉及到梯形模糊数合作对策,并且大多数运算都直接利用梯形模糊数减法,极可能造成局中人收益(或分摊成本)的不确定性放大或局中人收益为负值等问题. Mareš[8] 定义了一种具有模糊支付函数合作对策的

收稿日期: 2017-06-01；**修回日期:** 2018-01-09.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(71231003).

责任编委: 冯俊娥.

作者简介: 肖燕(1992−), 女, 博士生, 从事博弈论及其应用的研究；李登峰(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事经济管理决策与对策等研究.

†通讯作者. E-mail: lidengfeng@fzu.edu.cn.

Shapley值,但该模糊Shapley函数不再严格满足相应公理体系. 虽然在文献[8]中定义了模糊Shapley函数并且进行了公理化证明,但由于有特殊限制的要求,仅给出了Shapley值的模糊隶属函数而无法求得实际的分配方案. 谭春桥等[9]研究了联盟成员收益是区间数的情形,通过建立相应的公理化体系,给出了合作n人对策区间型Shapley值的定义;黄礼健等[10]针对具有模糊联盟值的合作n人对策问题,通过模糊集给出了定理,提出了模糊联盟值合作对策的α-对策,并给出了相应的模糊Shapley值表达式;张雯等[11]将支付函数以模糊数的形式表示,并在得到模糊Shapley值的基础上,进一步给出了确定的收益分配方案,但在某些条件下,模糊Shapley值的构造与其集合套矛盾,导致无法构造模糊Shapley值.

本文借鉴最小平方的思想,假设任意联盟中,所有成员都希望他们获得最大联盟收益值,即每个局中人参与大联盟后所获得的分配值之和不应与他们自己单干或者彼此之间形成的子联盟的联盟收益相差太多. 本文构造梯形模糊数的距离(平方)公式,并建立最小化联盟分配收益与联盟支付值差值的平方和的优化模型,据此求解并确定每个局中人的梯形模糊数分配收益,从而有效地避免传统梯形模糊数减法导致的计算结果不确定性扩大以及无法构造模糊Shapley值等问题. 最后,讨论该最小平方解的重要性质,使其在社会经济与管理等领域得到广泛应用.

1 梯形模糊数运算与距离

1.1 梯形模糊数运算

设在论域U上给定映射$\mu_{\tilde{A}}: U \to [0,1]$,使得$x \in U \to \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$,则称$\mu_{\tilde{A}}$确定了论域$U$上的一个模糊子集$\tilde{A}$,简称模糊集,其隶属函数为$\mu_{\tilde{A}}$.如果其隶属函数为

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}(x-a_L)/(a_{m_1}-a_L),\ x\in[a_L,a_{m_1}];\\ 1,\ x\in(a_{m_1},a_{m_2}];\\ (x-a_L)/(a_{m_1}-a_L),\ x\in(a_{m_2},a_R];\\ 0,\ x\in(-\infty,a_L)\bigcup(a_R,+\infty).\end{cases}$$

则称$\tilde{A}$是一个梯形模糊数. 特别地,当$a_{m_1}=a_{m_2}$时,梯形模糊数退化为三角模糊数;当$a_L=a_{m_1}, a_{m_2}=a_R$时,梯形模糊数退化成区间数;当$a_L=a_{m_1}=a_{m_2}=a_R$时,梯形模糊数退化为实数. 因此,梯形模糊数是精确数、区间数以及三角模糊数的拓展. 换言之,精确数、区间数以及三角模糊数都是梯形模糊数的几种特殊情形.

梯形模糊数的运算在梯形模糊数合作对策中具有重要作用. 本小节介绍几种常见的梯形模糊数的运算法则.

定义1 设有两个梯形模糊数$\tilde{a}=(a_L,a_{m_1},a_{m_2},a_R)$和$\tilde{b}=(b_L,b_{m_1},b_{m_2},b_R)$, $\lambda\in R$为任意实数,他们的运算法则如下:

1) 梯形模糊数相等. 当且仅当$a_L=b_L, a_{m_1}=b_{m_1}, a_{m_2}=b_{m_2}, a_R=b_R$时,$\tilde{a}=\tilde{b}$成立. $\tilde{a}=\tilde{b}$意味着梯形模糊数$\tilde{a}$与$\tilde{b}$完全相同.

2) 梯形模糊数加法表示为

$$\tilde{a}+\tilde{b}=(a_L+b_L,a_{m_1}+b_{m_1},a_{m_2}+b_{m_2},a_R+b_R).$$

3) 梯形模糊数与实数乘积表示为

$$\lambda\tilde{a}=\begin{cases}(\lambda a_L,\lambda a_{m_1},\lambda a_{m_2},\lambda a_R),\ \lambda\geqslant 0;\\ (\lambda a_R,\lambda a_{m_2},\lambda a_{m_1},\lambda a_L),\ \lambda<0.\end{cases}$$

其中λ为任意实数.

1.2 梯形模糊数之间的距离

定义2[12] 设$\tilde{a}=(a_L,a_{m_1},a_{m_2},a_R)$, $\tilde{b}=(b_L,b_{m_1},b_{m_2},b_R)$和$\tilde{c}=(c_L,c_{m_1},c_{m_2},c_R)$是实数集上的任意3个梯形模糊数. 若满足: 1) $D(\tilde{a},\tilde{b})\geqslant 0$; 2) $D(\tilde{a},\tilde{b})=D(\tilde{b},\tilde{a})$; 3) $D(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant D(\tilde{a},\tilde{c})+D(\tilde{c},\tilde{b})$. 则称$D(\tilde{a},\tilde{b})$为梯形模糊数$\tilde{a}$与$\tilde{b}$之间的距离.

将最小平方法的思想应用在梯形模糊数合作对策中,给出如下梯形模糊数距离(平方)公式:

$$\varphi(\tilde{a},\tilde{b})=(a_L-b_L)^2+(a_{m_1}-b_{m_1})^2+(a_{m_2}-b_{m_2})^2+(a_R-b_R)^2. \tag{1}$$

显然,式(1)满足定义2中条件1)和条件2). 下面仅验证条件3). 由式(1)可得

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{a},\tilde{b})=&(a_L-b_L)^2+(a_{m_1}-b_{m_1})^2+\\&(a_{m_2}-b_{m_2})^2+(a_R-b_R)^2\leqslant\\&[(a_L-c_L)^2+(c_L-b_L)]^2+\\&[(a_{m_1}-c_{m_1})^2+(c_{m_1}-b_{m_1})^2]+\\&[(a_{m_2}-c_{m_2})^2+(c_{m_2}-b_{m2})^2]+\\&[(a_R-c_R)^2+(c_R-b_R)^2]=\\&\varphi(\tilde{a},\tilde{c})+\varphi(\tilde{c},\tilde{b}),\end{aligned}$$

即$\varphi(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\varphi(\tilde{a},\tilde{c})+\varphi(\tilde{c},\tilde{b})$. 因此,式(1)为梯形模糊数$\tilde{a}$到$\tilde{b}$的距离(平方).

2 求解梯形模糊数合作对策的最小平方优化模型

2.1 梯形模糊数运算

梯形模糊数合作对策$\tilde{\upsilon}$定义在局中人集合$N=\{1,2,\cdots,n\}$上,梯形模糊数$\tilde{\upsilon}(S)$为联盟$S\subseteq N$的联盟特征(或支付)值,即梯形模糊数特征函数,记

$\tilde{v}(S) = (v_L(S), v_{m_1}(S), v_{m_2}(S), v_R(S))$. 规定 $\tilde{v}(\varnothing) = 0$, 其中 $\varnothing$ 为空集. 通常将 $\tilde{v}(\{i\})$ 简写成 $\tilde{v}(i)(i \in N)$. n 人梯形模糊数合作对策 $\tilde{v}$ 的集合记为 $\tilde{G}^n$.

不难看出, 由于每个局中人的联盟值都是梯形模糊数, 他们从联盟合作中分配得到的值也应为梯形模糊数. 用 $\tilde{x}_i = (x_{Li}, x_{m_1 i}, x_{m_2 i}, x_{Ri})$ 表示局中人 $i \in N$ 从合作中得到的分配值, 所有 n 个局中人的分配值可表示为向量 $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)^{\mathrm{T}}$. 因此, 由定义1 可知, $\tilde{x}(S) = \sum\limits_{i\in S} \tilde{x}_i$ 表示联盟 S 中所有局中人的分配值之和, $\tilde{x}(S) = \Big(\sum\limits_{i\in S} x_{Li}, \sum\limits_{i\in S} x_{m_1 i}, \sum\limits_{i\in S} x_{m_2 i}, \sum\limits_{i\in S} x_{Ri}\Big)$ 也是梯形模糊数.

任意联盟 $S \subseteq N$ 中的全部局中人都希望他们从最大联盟中获得的分配值之和尽可能地与其联盟值 $\tilde{v}(S)$ 接近. 利用式(1) 可得梯形模糊数 $\tilde{x}(S)$ 与 $\tilde{v}(S)$ 的差异, 即

$$\begin{aligned}&\varphi(\tilde{x}(S), \tilde{v}(S)) = \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{Li} - v_L(S)\Big)^2 + \Big(\sum_{i\in S} x_{m_1 i} - v_{m_1}(S)\Big)^2 + \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{m_2 i} - v_{m_2}(S)\Big)^2 + \Big(\sum_{i\in S} x_{Ri} - v_R(S)\Big)^2.\end{aligned}$$

所有联盟 $S \subseteq N$ 的距离(平方)之和可以表示为

$$\begin{aligned}Q(\tilde{\boldsymbol{x}}) = &\sum_{S\subseteq N} \varphi(\tilde{x}(S), \tilde{v}(S)) = \\ &\sum_{S\subseteq N} \Big[\Big(\sum_{i\in S} x_{Li} - v_L(S)\Big)^2 + \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{m_1 i} - v_{m_1}(S)\Big)^2 + \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{m_2 i} - v_{m_2}(S)\Big)^2 + \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{Ri} - v_R(S)\Big)^2\Big],\end{aligned}$$

其中 $Q(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 可看作所有联盟的一种平方损失函数.

2.2 梯形模糊数运算

容易看出, 当平方损失函数 $Q(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 取最小值时, 求得的最优解为所有局中人的一个最优分配方案, 即梯形模糊数合作对策的一种解. 根据管理决策的实际需要, 需增加一些约束条件, 如集体合理性(或有效性), 即 $x(N) = v(N)$. 为此, 建立如下数学优化模型:

$$\begin{aligned}\min \Big\{Q(\tilde{\boldsymbol{x}}) = &\sum_{S\subseteq N} \Big[\Big(\sum_{i\in S} x_{Li} - v_L(S)\Big)^2 + \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{m_1 i} - v_{m_1}(S)\Big)^2 + \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{m_2 i} - v_{m_2}(S)\Big)^2 + \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{Ri} - v_R(S)\Big)^2\Big]\Big\};\end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{Li} = v_L(N), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{m_1 i} = v_{m_1}(N), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{m_2 i} = v_{m_2}(N), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{Ri} = v_R(N).\end{cases} \tag{2}$$

为了求解式(2), 构造拉格朗日函数

$$\begin{aligned}&L(\tilde{x}, \lambda, \alpha, \beta, \mu) = \\ &\sum_{S\subseteq N} \Big[\Big(\sum_{i\in S} x_{Li} - v_L(S)\Big)^2 + \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{m_1 i} - v_{m_1}(S)\Big)^2 + \Big(\sum_{i\in S} x_{m_2 i} - v_{m_2}(S)\Big)^2 + \\ &\Big(\sum_{i\in S} x_{Ri} - v_R(S)\Big)^2\Big] + \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{Li} - v_L(N)\Big) + \\ &\alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{m_1 i} - v_{m_1}(N)\Big) + \beta\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{m_2 i} - v_{m_2}(N)\Big) + \\ &\mu\Big(\sum_{i=1}^{n} x_R - v_R(N)\Big).\end{aligned}$$

对 $L(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 关于变量 x_{Lj}、$x_{m_1 j}$、$x_{m_2 j}$、$x_{Rj}(j \in S \subseteq N)$ 和 λ、α、β、μ 分别求偏导数, 并令其等于0, 则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\tilde{x}, \lambda, \alpha, \beta, \mu)}{\partial x_{Lj}} = \\ 2\sum\limits_{S\subseteq N: j\in S} \Big(\sum\limits_{i\in S} x_{Li} - v_L(S)\Big) + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L(\tilde{x}, \lambda, \alpha, \beta, \mu)}{\partial x_{m_1 j}} = \\ 2\sum\limits_{S\subseteq N: j\in S} \Big(\sum\limits_{i\in S} x_{m_1} i - v_{m_1}(S)\Big) + \alpha = 0, \\ \dfrac{\partial L(\tilde{x}, \lambda, \alpha, \beta, \mu)}{\partial x_{m_2 j}} = \\ 2\sum\limits_{S\subseteq N: j\in S} \Big(\sum\limits_{i\in S} x_{m_2 i} - v_{m_2}(S)\Big) + \beta = 0, \\ \dfrac{\partial L(\tilde{x}, \lambda, \alpha, \beta, \mu)}{\partial x_{Rj}} = \\ 2\sum\limits_{S\subseteq N: j\in S} \Big(\sum\limits_{i\in S} x_{Ri} - v_R(S)\Big) + \mu = 0,\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\tilde{x},\lambda,\alpha,\beta,\mu)}{\partial\lambda}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{Li}-\upsilon_L(N)=0,\\ \dfrac{\partial L(\tilde{x},\lambda,\alpha,\beta,\mu)}{\partial\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{m_1i}-\upsilon_{m_1}(N)=0,\\ \dfrac{\partial L(\tilde{x},\lambda,\alpha,\beta,\mu)}{\partial\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{m_2i}-\upsilon_{m_2}(N)=0,\\ \dfrac{\partial L(\tilde{x},\lambda,\alpha,\beta,\mu)}{\partial\mu}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{R}-\upsilon_R(N)=0,\end{cases}$$

其中$j=1,2,\cdots,n$.

由此可得

$$\begin{cases}\sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\Big(\sum\limits_{i\in S}x_{Li}-\upsilon_L(S)\Big)+\dfrac{\lambda}{2}=0,\\ \sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\Big(\sum\limits_{i\in S}x_{m_1i}-\upsilon_{m_1}(S)\Big)+\dfrac{\alpha}{2}=0,\\ \sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\Big(\sum\limits_{i\in S}x_{m_2i}-\upsilon_{m_2}(S)\Big)+\dfrac{\beta}{2}=0,\\ \sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\Big(\sum\limits_{i\in S}x_{Ri}-\upsilon_R(S)\Big)+\dfrac{\mu}{2}=0,\end{cases}\tag{3}$$

和

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_{Li}=\upsilon_L(N),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{m_1i}=\upsilon_{m_1}(N),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{m_2i}=\upsilon_{m_2}(N),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{Ri}=\upsilon_R(N),\end{cases}\tag{4}$$

其中$j=1,2,\cdots,n$.

为求解x_{Li}、x_{m_1i}、x_{m_2i} 和$x_{Ri}(i=1,2,\cdots,n)$, 将方程组(3)分别展开,可得

$$\begin{cases}a_{11}x_{L1}+a_{12}x_{L2}+\cdots+a_{1n}x_{Ln}+\dfrac{\lambda}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_L(S),\\ a_{21}x_{L1}+a_{22}x_{L2}+\cdots+a_{2n}x_{Ln}+\dfrac{\lambda}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_L(S),\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_{L1}+a_{n2}x_{L2}+\cdots+a_{nn}x_{Ln}+\dfrac{\lambda}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_L(S).\end{cases}\tag{5}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_{m_11}+a_{12}x_{m_12}+\cdots+a_{1n}x_{m_1n}+\dfrac{\alpha}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_{m_1}(S),\\ a_{21}x_{m_11}+a_{22}x_{m_12}+\cdots+a_{2n}x_{m_1n}+\dfrac{\alpha}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_{m_1}(S),\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_{m_11}+a_{n2}x_{m_12}+\cdots+a_{nn}x_{m_1n}+\dfrac{\alpha}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_{m_1}(S).\end{cases}\tag{6}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_{m_21}+a_{12}x_{m_22}+\cdots+a_{1n}x_{m_2n}+\dfrac{\beta}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_{m_2}(S),\\ a_{21}x_{m_21}+a_{22}x_{m_22}+\cdots+a_{2n}x_{m_2n}+\dfrac{\beta}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_{m_2}(S),\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_{m_21}+a_{n2}x_{m_22}+\cdots+a_{nn}x_{m_2n}+\dfrac{\beta}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_{m_2}(S).\end{cases}\tag{7}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_{R1}+a_{12}x_{R2}+\cdots+a_{1n}x_{Rn}+\dfrac{\mu}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_R(S),\\ a_{21}x_{R1}+a_{22}x_{R2}+\cdots+a_{2n}x_{Rn}+\dfrac{\mu}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_R(S),\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_{R1}+a_{n2}x_{R2}+\cdots+a_{nn}x_{Rn}+\dfrac{\mu}{2}=\\ \sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_R(S).\end{cases}\tag{8}$$

由排列组合理论可知,含有局中人$i\in N$的局中人个数为1的联盟S的总个数为C_{n-1}^{0},含有局中人$i\in N$的局中人个数为2的联盟S的总个数为C_{n-1}^{1},以此类推,含有局中人$i\in N$的局中人个数为n的联盟S的总个数为C_{n-1}^{n-1}. 于是,含有局中人$i\in N$的所有联盟S的总个数为$C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{1}+\cdots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$.

类似地,同时含有局中人$i\in N$和$j\in N(i\neq j)$

且局中人个数为2的联盟S的总个数为C_{n-2}^{0},同时含有局中人$i\in N$和$j\in N(i\neq j)$且局中人个数为3的联盟S的总个数为C_{n-2}^{1},以此类推,同时含有局中人$i\in N$和$j\in N(i\neq j)$且局中人个数为n的联盟S的总个数为C_{n-2}^{n-2}. 于是,同时含有局中人$i\in N$和$j\in N(i\neq j)$的所有联盟S的总个数为$C_{n-2}^{0}+C_{n-2}^{1}\cdots+C_{n-2}^{n-3}+C_{n-2}^{n-2}=2^{n-2}$.

通过上述分析可得

$$a_{ij}=\begin{cases}2^{n-1},\ i=j \text{ and } i,j\in\{1,2,\cdots,n\};\\ 2^{n-2},\ i\neq j \text{ and } i,j\in\{1,2,\cdots,n\}.\end{cases}$$

记$\boldsymbol{X}_L=(x_{L1},x_{L2},\cdots,x_{Ln})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_{m_1}=(x_{m_11},x_{m_12},\cdots,x_{m_1n})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_{m_2}=(x_{m_21},x_{m_22},\cdots,x_{m_2n})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_R=(x_{R1},x_{R2},\cdots,x_{Rn})^{\mathrm{T}}$, $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,且有

$$\boldsymbol{B}_L=\Big(\sum_{S\subseteq N:1\in S}v_L(S),\sum_{S\subseteq N:2\in S}v_L(S),\cdots,\sum_{S\subseteq N:n\in S}v_L(S)\Big)^{\mathrm{T}},\tag{9}$$

$$\boldsymbol{B}_{m_1}=(\sum_{S\subseteq N:1\in S}v_{m_1}(S),\sum_{S\subseteq N:2\in S}v_{m_1}(S),\cdots,\sum_{S\subseteq N:n\in S}v_{m_1}(S))^{\mathrm{T}},\tag{10}$$

$$\boldsymbol{B}_{m_2}=\Big(\sum_{S\subseteq N:1\in S}v_{m_2}(S),\sum_{S\subseteq N:2\in S}v_{m_2}(S),\cdots,\sum_{S\subseteq N:n\in S}v_{m_2}(S)\Big)^{\mathrm{T}},\tag{11}$$

$$\boldsymbol{B}_R=\Big(\sum_{S\subseteq N:1\in S}v_R(S),\sum_{S\subseteq N:2\in S}v_R(S),\cdots,\sum_{S\subseteq N:n\in S}v_R(S)\Big)^{\mathrm{T}},\tag{12}$$

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix}2^{n-1}&2^{n-2}&\cdots&2^{n-2}\\2^{n-2}&2^{n-1}&\cdots&2^{n-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2^{n-2}&2^{n-2}&\cdots&2^{n-1}\end{bmatrix}_{n\times n}.$$

则方程组(3)和方程组(4)可分别写成如下矩阵形式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_L+\dfrac{\lambda}{2}=\boldsymbol{B}_L,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{m_1}+\dfrac{\alpha}{2}=\boldsymbol{B}_{m_1},\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{m_2}+\dfrac{\beta}{2}=\boldsymbol{B}_{m_2},\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_R+\dfrac{\mu}{2}=\boldsymbol{B}_R.\end{cases}\tag{13}$$

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_L=v_L(N),\\ \mathrm{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{m_1}=v_{m_1}(N),\\ \mathrm{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{m_2}=v_{m_2}(N),\\ \mathrm{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_R=v_R(N).\end{cases}\tag{14}$$

记矩阵为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}2^{n-1}&2^{n-2}&\cdots&2^{n-2}&1&0&\cdots&0\\2^{n-2}&2^{n-1}&\cdots&2^{n-2}&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2^{n-2}&2^{n-2}&\cdots&2^{n-1}&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}_{n\times 2n},$$

其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵.经过一系列初等变化可得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\sim$$

$$\left[\begin{matrix}1&0&\cdots&0&\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}\\0&1&\cdots&0&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}\end{matrix}\right.\rightarrow$$

$$\leftarrow\left.\begin{matrix}-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\cdots&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}\\\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}&\cdots&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\cdots&\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}\end{matrix}\right]_{n\times 2n}.$$

显然,矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}$等价,从而矩阵$\boldsymbol{A}$可逆,且有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\cdots&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}\\-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}&\cdots&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\cdots&\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}\end{bmatrix}_{n\times n}=$$

$$\frac{1}{2^{n-2}}\begin{bmatrix}\frac{n}{n+1}&-\frac{1}{n+1}&\cdots&-\frac{1}{n+1}\\-\frac{1}{n+1}&\frac{n}{n+1}&\cdots&-\frac{1}{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\frac{1}{n+1}&-\frac{1}{n+1}&\cdots&\frac{n}{n+1}\end{bmatrix}_{n\times n}.\tag{15}$$

利用矩阵乘法可分别得到方程(5)$\sim$(8)的解,即

$$\boldsymbol{X}_L=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_L+\frac{1}{n}\Big(v_L(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{Li}\Big)\boldsymbol{e},\tag{16}$$

$$\boldsymbol{X}_{m_1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_{m_1}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{m_1}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{m_1i}\Big)\boldsymbol{e},\tag{17}$$

$$\boldsymbol{X}_{m_2}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_{m_2}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{m_2}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{m_2i}\Big)\boldsymbol{e},\tag{18}$$

$$\boldsymbol{X}_{R}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_{R}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{R}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{Ri}\Big)\boldsymbol{e}.\tag{19}$$

由此可以得到梯形模糊数合作对策$\tilde{\upsilon}\in\tilde{G}^n$的最小平方解$\tilde{\boldsymbol{x}}$,记为$\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{LS}$,即$\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{LS}=\tilde{\boldsymbol{x}}$.

计算得到局中人$i\in N$的分配值,即梯形模糊数$\tilde{x}_i=(x_{Li},x_{m_1i},x_{m_2i},x_{Ri})(i=1,2,\cdots,n)$.

由式(16)～(19)可得

$$x_{Li}=\boldsymbol{A}_{i.}^{-1}\boldsymbol{B}_{L}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{L}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{Li}\Big),$$

$$x_{m_1i}=\boldsymbol{A}_{i.}^{-1}\boldsymbol{B}_{m1}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{m_1}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{m_1i}\Big),$$

$$x_{m_2i}=\boldsymbol{A}_{i.}^{-1}\boldsymbol{B}_{m_2}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{m_2}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{m_2i}\Big),$$

$$x_{Ri}=\boldsymbol{A}_{i.}^{-1}\boldsymbol{B}_{R}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{R}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{Ri}\Big).$$

式(15)中$\boldsymbol{A}_{i.}^{-1}$是矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$的第i行,即

$$\boldsymbol{A}_{i.}^{-1}=\frac{1}{2^{n-2}}\times\Big[\overbrace{-\frac{1}{n+1},-\frac{1}{n+1},\cdots,-\frac{1}{n+1}}^{i-1},\overbrace{\frac{n}{n+1}}^{ith},\overbrace{-\frac{1}{n+1},-\frac{1}{n+1},\cdots,-\frac{1}{n+1}}^{n-i}\Big].\tag{20}$$

结合式(9)～(12)可以得到

$$x_{Li}=\frac{n\sum\limits_{S\subseteq N:i\in S}\upsilon_L(S)-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\upsilon_L(S)}{2^{n-2}(n+1)}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{L}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{Li}\Big),\tag{21}$$

$$x_{m_1i}=\frac{n\sum\limits_{S\subseteq N:i\in S}\upsilon_{m_1}(S)-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\upsilon_{m_1}(S)}{2^{n-2}(n+1)}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{m_1}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{m_1i}\Big),\tag{22}$$

$$x_{m_2i}=\frac{n\sum\limits_{S\subseteq N:i\in S}\upsilon_{m_2}(S)-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\upsilon_{m_2}(S)}{2^{n-2}(n+1)}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{m_2}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{m_2i}\Big),\tag{23}$$

$$x_{Ri}=\frac{n\sum\limits_{S\subseteq N:i\in S}\upsilon_{R}(S)-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\upsilon_{R}(S)}{2^{n-2}(n+1)}+\frac{1}{n}\Big(\upsilon_{R}(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{Ri}\Big).\tag{24}$$

2.3 梯形模糊数合作对策最小平方解的性质

下面讨论梯形模糊数合作对策最小平方解的一些重要性质.

定理1 对于任意一个梯形模糊数合作对策$\tilde{\upsilon}\in\tilde{G}^n$,根据式(16)～(19)(或(21)～(24)),总是存在一个唯一的梯形模糊数合作对策最小平方解$\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{LS}}(\tilde{\upsilon})$.

根据式(16)～(19)(或(21)～(24))可以直接证明定理1.

定理2 对于任意的两个梯形模糊数合作对策$\tilde{\upsilon}\in\tilde{G}^n$和$\tilde{\nu}\in\tilde{G}^n$,有$\tilde{x}_i(\tilde{\upsilon}+\tilde{\nu})=\tilde{x}_i(\tilde{\upsilon})+\tilde{x}_i(\tilde{\nu})(i=1,2,\cdots,n)$,即$\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{LS}}(\tilde{\upsilon}+\tilde{\nu})=\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{LS}}(\tilde{\upsilon})+\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{LS}}(\tilde{\nu})$.

证明 由式(21)可得

$$\begin{aligned}x_{Li}(\tilde{\upsilon}+\tilde{\nu})=&\frac{n\sum\limits_{S\subseteq N;i\in S}(\upsilon_L(S)+\nu_L(S))}{2^{n-2}(n+1)}-\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\sum\limits_{S\subseteq N;i\in S}(\upsilon_L(S)+\nu_L(S))}{2^{n-2}(n+1)}=\\&\frac{n\sum\limits_{S\subseteq N;i\in S}\upsilon_L(S)-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\sum\limits_{S\subseteq N;i\in S}\upsilon_L(S)}{2^{n-2}(n+1)}+\\&\frac{n\sum\limits_{S\subseteq N;i\in S}\nu_L(S)-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\sum\limits_{S\subseteq N;i\in S}\nu_L(S)}{2^{n-2}(n+1)}=\\&x_{Li}(\tilde{\upsilon})+x_{Li}(\tilde{\nu}),\end{aligned}$$

即$x_{Li}(\tilde{\upsilon}+\tilde{\nu})=x_{Li}(\tilde{\upsilon})+x_{Li}(\tilde{\nu})$.

类似地,由式(22)～(24)同样可证明

$$x_{m_1i}(\tilde{\upsilon}+\tilde{\nu})=x_{m_1i}(\tilde{\upsilon})+x_{m_1i}(\tilde{\nu}),$$

$$x_{m_2i}(\tilde{v}+\tilde{\nu})=x_{m_2i}(\tilde{v})+x_{m_2i}(\tilde{\nu}),$$
$$x_{Ri}(\tilde{v}+\tilde{\nu})=x_{Ri}(\tilde{v})+x_{Ri}(\tilde{\nu}).$$

结合上述结论,由定义1中的条件1)可得

$$\tilde{x}_i(\tilde{v}+\tilde{\nu})=\tilde{x}_i(\tilde{v})+\tilde{x}_i(\tilde{\nu}),\ i=1,2,\cdots,n,$$

即 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{LS}(\tilde{v}+\tilde{\nu})=\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{LS}}(\tilde{v})+\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{LS}}(\tilde{\nu})$. □

定义3 对于两个局中人 $i\in N$ 和 $k\in N(i\neq k)$,如果对于任何联盟 $S\subseteq N\backslash\{i,k\}$,都有 $\tilde{v}(S\bigcup i)=\tilde{v}(S\bigcup k)$,则称在梯形模糊数合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}^n$ 中局中人 i 与局中人 k 是对称的.

显然,两个对称的局中人对任意一个联盟都有相同的贡献. 因此,由梯形模糊数最小平方优化模型的解可知,在梯形模糊数合作对策中两个对称的局中人应当获得相同的特征值,于是可得到下面的定理.

定理3 如果在一个梯形模糊数合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}^n$ 中 $i\in N$ 和 $k\in N$ 是两个对称的局中人,则有 $\tilde{x}_i(\tilde{v})=\tilde{x}_k(\tilde{v})$,即 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^{\mathrm{LS}}(\tilde{v})=\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^{\mathrm{LS}}(\tilde{v})$.

证明 对于局中人 $i\in N$ 和 $k\in N(i\neq k)$,由式(21)可得

$$x_{Li}(\tilde{v})=\Big(-\sum_{j=1,j\neq i,j\neq k}^{n}\sum_{S\subseteq N:j\in S}v_L(S)+\Big(n\sum_{S\subseteq N:i\in S}v_L(S)-\sum_{S\subseteq N:k\in S}v_L(S)\Big)\Big)\Big/(2^{n-2}(n+1)),\quad(25)$$

$$x_{Lk}(\tilde{v})=\Big(-\sum_{j=1,j\neq i,j\neq k}^{n}\sum_{S\subseteq N:j\in S}v_L(S)+\Big(-\sum_{S\subseteq N:i\in S}v_L(S)+n\sum_{S\subseteq N:k\in S}v_L(S)\Big)\Big)\Big/(2^{n-2}(n+1)).\ (26)$$

假设在梯形模糊数合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{R}$ 中局中人 i 与局中人 k 是对称的,则由定义3、式(25)和(26)容易得出

$$\sum_{S\subseteq N:i\in S}v_L(S)=\sum_{S\subseteq N:k\in S}v_L(S),$$

可直接推出

$$n\sum_{S\subseteq N:i\in S}v_L(S)-\sum_{S\subseteq N:k\in S}v_L(S)=-\sum_{S\subseteq N:i\in S}v_L(S)+n\sum_{S\subseteq N:k\in S}v_L(S).$$

值得注意的是,式(25)和(26)中的分子项 $\sum_{j=1,j\neq i,j\neq k}^{n}\sum_{S\subseteq N:j\in S}v_L(S)$ 与局中人 i 和局中人 k 无关,据此可得 $x_{Li}(\tilde{v})=x_{Lk}(\tilde{v})$.

同样地,根据式(22)～(24)也能证明 $x_{m_1i}(\tilde{v})=x_{m_1k}(\tilde{v}),x_{m_2i}(\tilde{v})=x_{m_2k}(\tilde{v})$ 和 $x_{Ri}(\tilde{v})=x_{Rk}(\tilde{v})$,结合上面的结论和定义1可得

$$(x_{Li}(\tilde{v}),x_{m_1i}(\tilde{v}),x_{m_2i}(\tilde{v}),x_{Ri}(\tilde{v}))=(x_{Lk}(\tilde{v}),x_{m_1k}(\tilde{v}),x_{m_2k}(\tilde{v}),x_{Rk}(\tilde{v})),$$

即 $\tilde{x}_i(\tilde{v})=\tilde{x}_k(\tilde{v})$ 或 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^{LS}(\tilde{v})=\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^{LS}(\tilde{v})$. □

定义4 对于一个局中人 $i\in N$,如果对于任何联盟 $S\subseteq N\backslash i$ 都有

$$\tilde{v}(S\bigcup i)=\tilde{v}(S),$$

则称 i 为梯形模糊数合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}^n$ 中的一个无关局中人,

一个无关局中人对任何联盟都没有贡献,特别地 $\tilde{v}(i)=0$,因此,根据梯形模糊数合作对策最小平方优化模型的解可知,一个无关局中人的分配值应该为零.

定理4 若在梯形模糊数合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}^n$ 中 $i\in N$ 是一个无关局中人,则有 $\tilde{x}_i(\tilde{v})=0$,即 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^{\mathrm{LS}}(\tilde{v})=0$.

证明 由式(21)可得

$$x_{Li}(\tilde{v})=\frac{n\sum_{S\subseteq N:i\in S}v_L((S\backslash i)\bigcup i)-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sum_{S\subseteq N:j\in S}v_L(S)}{2^{n-2}(n+1)}=\frac{n\sum_{S\subseteq N:i\in S}v_L(S\backslash i)-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sum_{S\subseteq N:j\in S}v_L(S)}{2^{n-2}(n+1)}.$$

由于假设局中人 i 是梯形模糊数合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}^n$ 中的一个无关局中人,由此可得 $x_{Li}(\tilde{v})=0$.

类似地,由式(22)～(24)可以证明 $x_{m_1}(\tilde{v})=0,x_{m_2}(\tilde{v})=0,x_R(\tilde{v})=0$,因此可以得到 $(x_{Li}(\tilde{v}),x_{m_1i}(\tilde{v}),x_{m_2i}(\tilde{v}),x_{Ri}(\tilde{v}))$,即 $\tilde{x}_i(\tilde{v})=0$ 或 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^{\mathrm{LS}}(\tilde{v})=0$. □

定义5 对于一个局中人 $i\in N$,如果对于任何联盟 $S\subseteq N\backslash i$ 都有 $\tilde{v}(S\bigcup i)=\tilde{v}(S)+\tilde{v}(i)$,则称 i 为梯形模糊数合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{R}$ 中的一个虚拟局中人.

显然,对于每个联盟,一个虚拟局中人只对自己的价值 $\tilde{v}(i)$ 有贡献,这样根据梯形模糊数最小平方优化模型的解可得,在梯形模糊数合作对策中局中人 i 理所应当获得的份额为 $\tilde{v}(i)$.

定理5 如果在梯形模糊数合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}^n$ 中 $i\in N$ 是一个虚拟局中人,则有 $\tilde{x}_i(\tilde{v})=\tilde{v}(i)$,即

$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^{\mathrm{LS}}(\tilde{v}) = \tilde{v}(i)$.

其证明过程与定理4类似.

定理6　对于实数集N上的任意排列σ和一个梯形模糊数合作对策$\tilde{v} \in \tilde{R}$,有$\tilde{x}_{\sigma(i)}^*(\tilde{v}^\sigma) = \tilde{x}_i^*(\tilde{v})$,即$\tilde{\rho}_{\sigma(i)}^{\mathrm{LS}}(\tilde{v}^\sigma) = \tilde{\rho}_i^{LS}(\tilde{v})$或$\tilde{\rho}^{\mathrm{LS}}(\tilde{v}^\sigma) = \sigma^{\#}(\tilde{\rho}^{\mathrm{LS}}(\tilde{v}))$.

由式(25)和(26)很容易证明此定理.

3　实例分析

3.1　实例计算分析

假设有3家不同的供应商(即局中人)均要为某零售商A供应商品P,由于受到不确定市场环境、产品质量、供货能力、技术力量等许多因素的影响,供应商不可预测各个联盟配送的具体收益,只能估计大致的配送收益范围,即配送所得的收益用梯形模糊数表示. 若上述3家供应商都选择对零售商A进行配送,则其期望收益范围均为一个梯形模糊数(10, 11, 12, 13)(单位: 万元),即$\tilde{v}(1) = \tilde{v}(2) = \tilde{v}(3) = (10, 11, 12, 13)$. 若3家供应商共同供应,则通过合作方式可以在一定程度上提高收益,具体为: 若供应商1与供应商2同时供应,则联盟$\{1, 2\}$的收益为$\tilde{v}(\{1, 2\}) = (28, 30, 32, 35)$;若供应商1与供应商3同时供应,则联盟的收益为$\tilde{v}(\{1, 3\}) = (30, 32, 36, 38)$;若供应商2与供应商3同时供应,则联盟的收益为$\tilde{v}(\{2, 3\}) = (25, 28, 29, 32)$;若3家供应商结成大联盟一同合作供应商品,则收益可以最大程度地提高,即最大联盟$N = \{1, 2, 3\}$的收益为$\tilde{v}(\{1, 2, 3\}) = (45, 48, 51, 53)$.

对于3家供应商而言,一方面,任何一家供应商不会希望加入大联盟之后的收益比自己单干或者与某一家供应商形成子联盟时少很多,否则这将影响其加入大联盟的积极性;另一方面,任何一家供应商也不希望另两家供应商加入大联盟之后的收益比他们单干或者形成子联盟时多很多. 因此,只有当每家供应商加入大联盟之后的分配收益与单干或者与另一家供应商形成的子联盟分配得到的收益尽可能接近时,才能得出一种公平合理的分配方案. 综上所述,可以利用式(16)～(19)求得具体的分配方案.

将上面的相关数据代入式(16)～(19)求解可得

$$X_L = A^{-1}B_L + \frac{1}{n}\Big(v_L(N) - \sum_{i=1}^n x_{Li}\Big)\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 13.9 \\ 11.4 \\ 12.4 \end{bmatrix},$$

$$X_{m_1} = A^{-1}B_{m_1} + \frac{1}{n}\Big(v_L(N) - \sum_{i=1}^n x_{Li}\Big)\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 12.5 \\ 13.5 \end{bmatrix},$$

$$X_{m_2} = A^{-1}B_{m_2} + \frac{1}{n}\Big(v_{m_2}(N) - \sum_{i=1}^n x_{m_2 i}\Big)\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 16.1 \\ 12.6 \\ 14.6 \end{bmatrix},$$

$$X_R = A^{-1}B_R + \frac{1}{n}\Big(v_R(N) - \sum_{i=1}^n x_{Ri}\Big)\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 16.9 \\ 13.9 \\ 15.4 \end{bmatrix}.$$

即供应商1、供应商2和供应商3(即局中人)得到的分配值分别为

$$\tilde{x}_1 = (x_{L1}, x_{m_1 1}, x_{m_2 1}, x_{R1}) = (13.9, 14.5, 16.1, 16.9),$$

$$\tilde{x}_2 = (x_{L2}, x_{m_1 2}, x_{m_2 2}, x_{R2}) = (11.4, 12.5, 12.6, 13.9),$$

$$\tilde{x}_3 = (x_{L3}, x_{m_1 3}, x_{m_2 3}, x_{R3}) = (12.4, 13.5, 14.6, 15.4).$$

可以看出,3家供应商通过合作方式均可获得比单干时更多的收益.

3.2　与现有方法比较分析

目前,模糊合作对策的求解大多采用模糊值减法和模糊值排序函数等方法,但这些方法都存在一些不足. 例如,上述方法可能会导致收益分配区间的范围扩大,还会存在收益分配为负值或者不存在等问题. 对比陈雯等[11]提出的模糊合作对策的Shapley值,本文提出的模型与方法有以下3个方面的优势:

1) 模型计算量与方法复杂性低. 文献[11]分别对各个联盟成员的隶属函数进行了单独计算,因此增加了工作量,使求解过程重复并且繁琐. 本文提出的方法可根据式(21)～(24)简单、快速地求解每个局中人的梯形模糊数支付值,这是以往研究无法做到的.

2) 满足集体合理性(或有效性). 本文提出的最小平方法模型考虑了有效性,因此对于每个局中人而言方案更加合理和公平.

3) 可解决由梯形模糊数减法运算或特殊排序函

数等方法导致的局中人收益范围放大和局中人分配值可能为负值以及某些条件下无法构造模糊Shapley值等不合理问题. 文献[11]中将模糊数的截集用区间值表示,其中存在一些缺点,比如在某些条件下,模糊Shapley值的构造与其集合套矛盾,无法构造模糊Shapley值,而本文的方法不存在这种情况,可以克服上述缺点.

4 结 论

本文考虑了最小平方法和梯形模糊数距离(平方)概念,令每个局中人参与大联盟后获得的分配值之和尽可能与他们单干时获得的收益或彼此之间形成子联盟时获得的联盟收益接近,构建了最小平方优化模型,并导出局中人梯形模糊数分配值的解析公式. 由于文中数学模型原理比较简单,计算量小,并且计算过程中未直接使用梯形模糊数的减法运算,可有效避免梯形模糊数减法带来的局中人分配值不确定性放大和局中人分配值可能为负值以及无法构成模糊Shapley值等不合理问题. 本文讨论了该最小平方解的一些重要性质,可以为解决梯形模糊数合作对策提供一种新的参考思路,并在经济与管理等领域得到更广泛的应用.

参考文献(References)

[1] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003: 196-244.
(Li D F. Fuzzy multiobjection many-person decision makings and games[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003: 196-244.)

[2] Li D F. Lexicographic method for matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008, 16(3): 371-389.

[3] 李登峰. 直觉模糊集决策与对策分析方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2012: 235-269.
(Li D F. Intuitionistic fuzzy set decision and game analysis methodologies[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2012: 235-269.)

[4] Yu X H, Zhang Q. An extension of coopera-tive fuzzy games[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161: 1614-1634.

[5] 杨洁, 李登峰. 求解梯形模糊矩阵对策的线性规划方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(7): 1219-1226.
(Yang J, Li D F. Linear programming methodology for solving trapezoidal fuzzy matrix games[J]. Control and Decision, 2015, 30(7): 1219-1226.)

[6] Li D F. Linear programming approach to solve interval-valued matrix games[J]. Omega, 2011, 39: 655-666.

[7] Li D F. Models and methods of interval- valued games in economic management[M]. Switzerland: Springer Int Publishing, 2016: 69-128.

[8] Mareš M. Fuzzy cooperative games[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2001: 39-134.

[9] 谭春桥, 张强. 具有区间联盟值n人对策的Shapley值[J]. 应用数学学报, 2010, 33(2): 193-203.
(Tan C Q, Zhang Q. Shapley value for n-person games with interval coalition worth[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2010, 33(2): 193-203.)

[10] 黄礼健, 吴祈宗, 张强. 具有模糊联盟值的n人合作博弈的模糊Shapley值[J]. 北京理工大学学报, 2007, 27(8): 740-744.
(Huang L J, Wu Q Z, Zhang Q. Fuzzy shapley value of n-person cooperative games with fuzzy worth[J]. Transaction of Beijing Institute of Technology, 2007, 27(8): 740-744.)

[11] 陈雯, 张强. 模糊合作对策的Shapley值[J]. 管理科学学报, 2006, 9(5): 50-55.
(Chen W, Zhang Q. Shapley value for fuzzy cooperative games[J]. J of Management Science in China, 2006, 9(5): 50-55.)

[12] 李登峰, 刘家财. 基于最小平方距离的区间值合作对策求解模型与方法[J]. 中国管理科学, 2016, 24(7): 135-142.
(Li D F, Liu J C. Models and method of interval-valued cooperative games based on the least square distance[J]. Chinese J of Management Science, 2016, 24(7): 135-142.)

(责任编辑：闫 妍)