

基于梯形模糊中智数的最短路径求解方法

谭睿璞^{1,2}, 张文德^{3,4†}, Said Broumi⁵

- (1. 福州大学 经济与管理学院, 福州 350116; 2. 福建江夏学院 电子信息科学学院, 福州 350108;
3. 福州大学 信息管理研究所, 福州 350116; 4. 福州大学 信息化建设办公室, 福州 350116;
5. 哈桑二世大学 信息处理实验室, 卡萨布兰卡 20000)

摘要: 最短路径的选择是图论中的经典问题之一. 复杂环境中对象之间的关系通常具有模糊性、犹豫性、不确定性和不一致性, 而中智集是元素的真实程度、不确定程度及谬误程度的集合, 更有能力捕捉不完全信息. 基于此, 基于中智集理论和图论的中智图最短路径选择成为一个关键问题. 针对边长表述为梯形模糊中智数的中智图最短路径求解问题, 提出一种扩展的动态规划求解方法. 利用基于梯形模糊中智数的得分函数和精确函数来比较路径长度, 并给出扩展的动态规划求解最短路径方法, 从而得到最短路径和最短路径长度. 最后, 通过两个算例验证此方法的可行性, 通过与 Dijkstra 算法对比分析说明所提出方法的合理性和有效性, 并且分析了采用不同排序方法对中智图最短路径选择的影响.

关键词: 中智集; 梯形模糊中智数(TrFNN); 中智图; 最短路径问题; 动态规划; Dijkstra 算法
中图分类号: C931 **文献标志码:** A

Solving methods for the shortest path problem based on trapezoidal fuzzy neutrosophic numbers

TAN Rui-pu^{1,2}, ZHANG Wen-de^{3,4†}, Said Broumi⁵

- (1. School of Economics and Management, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China; 2. College of Electronics and Information Science, Fujian Jiangxia University, Fuzhou 350108, China; 3. Institute of Information Management, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China; 4. Information Construction Office, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China; 5. Laboratory of Information Processing, University Hassan II, Casablanca 20000, Morocco)

Abstract: The selection of the shortest path problem is one of the classic problems in the graph theory. The relationship between objects in a complex environment usually has fuzziness, hesitancy, uncertainty and inconsistency. A neutrosophic set is characterized by the degree of truth-membership, indeterminacy-membership and falsity-membership, and is more capable of capturing incomplete information. The selection of the shortest path of the neutrosophic graph based on the theory of neutrosophic set and graph theory has become a key issue. For the shortest path problem in the neutrosophic graph, in which the edge length is assigned a trapezoidal fuzzy neutrosophic number instead of a real number, a solving method based on the extended dynamic programming is proposed. The path length is compared using the score function and the accuracy function based on the trapezoidal fuzzy neutrosophic numbers. An extended dynamic programming method for solving the shortest path problem is presented to obtain the shortest path and the shortest path length. Finally, two examples are used to verify the feasibility of this method, and the comparison and analysis with the Dijkstra algorithm illustrate the rationality and effectiveness of this method. And the impact of using different sorting methods on the selection of the shortest path of the neutrosophic graph is analyzed.

Keywords: neutrosophic set; trapezoidal fuzzy neutrosophic numbers(TrFNN); neutrosophic graph; shortest path problem; dynamic planning; Dijkstra algorithm

0 引言

中智集理论(Neutrosophic sets, NS)最早是由 Smarandache 于 1999 年提出的, 中智集更接近于人的

思维, 体现了由于不完整知识、知识获取的过失或随机猜测而造成的不确定性的特点. 中智集是元素的真实程度(T)、不确定程度(I)及谬误程度(F)存在于

收稿日期: 2017-10-16; 修回日期: 2018-03-16.

基金项目: 福建省社会科学规划项目(FJ2016C028); 福建省中青年教育科研项目(JAT160556); 国家社会科学基金项目(17CGL058); 福州大学课题(BPZD1601).

责任编委: 刘宝碇.

作者简介: 谭睿璞(1982—), 女, 副教授, 博士生, 从事模糊信息处理的研究; 张文德(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事信息管理与信息系统等研究.

†通讯作者. E-mail: zhangwd@fzu.edu.cn.

非标准单位区间的集合. 中智集是对模糊集、直觉模糊集及悖论集合等的概括总结, 而模糊集和直觉模糊集是中智集的一种特殊情况^[1]. 中智集可以处理不确定、不一致的信息, 其处理信息的能力更加全面. 中智集是研究中立性起源、特性和范围以及与其他思想观念相互作用的中智学的一个重要组成部分, 由于其主要是从哲学角度提出的, 难以应用于科学与工程领域.

为便于将中智集应用于实际问题中, Wang等^[2-3]提出了区间中智集(INS)和单值中智集(SNS)的概念; Peng等^[4]首次提出了多值中智集(MVNS)的概念, 研究了其运算法则, 并应用于决策问题中; Ye^[5]将犹豫模糊集和单值中智集合并, 提出了单值中智犹豫模糊集(SNHFS)的概念; Tian等^[6]基于简化中智集和语言术语集, 提出了简化中智语言集(SNLS)的概念, 其可以处理主观语言信息; Deli等^[7]提出了两极中智集(BNS)的概念, 它是模糊集、两极模糊集、直觉模糊集和中智集的扩展, 应用于决策问题中; Biswas等^[8]提出了梯形模糊中智数(TrFNN)的Cosine相似度测度公式, 并将其用于多属性决策方法; Ye^[9]提出了梯形模糊中智数的定义, 研究了梯形模糊中智数加权算数平均算子(TNNWAA)和梯形模糊中智数加权几何平均算子, 并应用于决策问题中.

最短路径问题(Shortest path problem, SPP)是一个基本的组合问题, 出现在各种科学和工程领域, 例如道路网络应用、运输、通信信道路由与调度问题^[10]. 最短路径问题的目的是在图中找到起点与终点间的最短路径和最小长度. 边(弧)的长度可以代表实际的生活数量, 例如时间、成本等. 在经典的最短路径问题中, 网络图不同节点之间边的距离通常被认为是确定的, 用精确数来表示. 但随着社会环境的复杂变化, 现实世界中节点对象间很多关系是不确定的^[11]. 例如交通路线的选择, 在发生交通事故等不确定环境下的交通网络中, 边权是由距离、事件、路况等多因素构成的, 具有很大的不确定性^[12]. 再如突发事件中人员疏散的路径选择, 影响路径边权的因素很多, 如路面状况、疏散人群机构状况、疏散易发生事故状况等. 总之, 影响边长量化的因素很多, 且具有模糊性、不确定性、不一致性. 因此, 近年来, 边长表示为模糊数、直觉模糊数的网络图的最短路径问题得到国内外学者的关注^[13-16]. Deng等^[13]提出了模糊环境下的基于Dijkstra算法的最短路径求解方法; Jayagowri等^[14]、Das等^[15]和Majumder等^[16]研究了梯形直觉模糊数网络图中的最优路径求解方法. 随着中智集

理论成为研究热点, 中智图及其基于中智图的最短路径求解方法引起了国内外学者的关注. Broumi等^[17]基于单值中智集和图论, 提出了单值中智图的概念(SVNG), 包括强单值中智图、恒定单值中智图和完全单值中智图, 并提出了单值中智图中基于Dijkstra算法的最短路径求解方法^[18], 之后还研究了基于Dijkstra算法的区间中智图的最短路径问题求解方法^[19]. 除此之外, Broumi等提出了两极单值中智图的概念, 它是两极模糊图、N-图、直觉模糊图、单值中智图和两极直觉模糊图的一般化表示^[20]; 研究了网络图边长表示为两极中智数的最短路径求解算法^[21]; 提出了区间值中智图的定义^[22]; 研究了将Dijkstra算法扩展至三角模糊中智图环境下去解决最短路径问题^[23]; 提出了梯形中智数环境下基于Dijkstra算法的最短路径求解方法^[24]. Biswas等^[8]提出的梯形模糊中智数比模糊数、直觉模糊数、三角直觉模糊数、梯形直觉模糊数、单值中智数、区间中智数等具有优势, 是一种广义表示形式, 能够更好地表示数据的不确定性, 并且能够表示出边长数据的最大可能取值范围及可能波动范围. 因此, 本文研究边长表示为梯形模糊中智数的中智图. 动态规划是解决多阶段决策过程最优化问题的一种方法, 由贝尔曼在20世纪50年代提出, 它可以将困难的多阶段决策问题变换成一系列互相联系较容易的单阶段问题. 动态规划具有最优化原理, 即最优策略的任意一子策略都是最优的, 同时其计算量比现有Dijkstra算法小. 动态规划方法在工程技术、经济管理、工业生产及军事部门中都有广泛应用, 而纵观国内外文献, 将动态规划方法用于中智图的最短路径求解方法尚不多见, 因此本文研究梯形模糊中智图中基于动态规划的最短路径求解方法.

1 理论基础

1.1 中智集

定义1^[2] 设 X 为对象集, x 为其中任意一个元素, X 上的一个中智集 A 可以由真实程度函数 $T_A(x)$ 、不确定程度函数 $I_A(x)$ 及谬误程度函数 $F_A(x)$ 表示, 其中 $T_A(x)$ 、 $I_A(x)$ 和 $F_A(x)$ 是 $]0^-, 1^+[$ 的标准或非标准实数子集, 即 $T_A(x) : X \rightarrow]0^-, 1^+[$, $I_A(x) : X \rightarrow]0^-, 1^+[$, $F_A(x) : X \rightarrow]0^-, 1^+[$ (非标准有限数 $1^+ = 1 + \varepsilon$, 1为它的标准部分; $\varepsilon > 0$ 为无穷小数, 是它的非标准部分), 且 $0^- \leq \sup T_A(x) + \sup I_A(x) + \sup F_A(x) \leq 3^+$.

1.2 梯形模糊中智数

定义2^[9] X 是一个论域, 则 X 中的一个梯形模糊中智集 \tilde{N} 可表示为如下形式:

$$\tilde{N} = \{ \langle x, T_{\tilde{N}}(x), I_{\tilde{N}}(x), F_{\tilde{N}}(x) \rangle | x \in X \}. \quad (1)$$

其中: $T_{\tilde{N}}(x) \subset [0, 1], I_{\tilde{N}}(x) \subset [0, 1]$ 和 $F_{\tilde{N}}(x) \subset [0, 1]$ 是3个梯形模糊数; $T_{\tilde{N}}(x) = (t_{\tilde{N}}^1(x), t_{\tilde{N}}^2(x), t_{\tilde{N}}^3(x), t_{\tilde{N}}^4(x)) : X \rightarrow [0, 1], I_{\tilde{N}}(x) = (i_{\tilde{N}}^1(x), i_{\tilde{N}}^2(x), i_{\tilde{N}}^3(x), i_{\tilde{N}}^4(x)) : X \rightarrow [0, 1], F_{\tilde{N}}(x) = (f_{\tilde{N}}^1(x), f_{\tilde{N}}^2(x), f_{\tilde{N}}^3(x), f_{\tilde{N}}^4(x)) : X \rightarrow [0, 1]$, 满足条件 $0 \leq t_{\tilde{N}}^4(x) + i_{\tilde{N}}^4(x) + f_{\tilde{N}}^4(x) \leq 3, x \in X$.

定义3^[8] 在论域 X 中的一个梯形模糊中智数 \tilde{n} 可以表示为 $\tilde{n} = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \rangle$. 其中, 参数可满足如下关系: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4, b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4, c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$.

梯形模糊中智集的真实程度函数可表示为

$$T_{\tilde{N}}(x) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\rangle. \quad (2)$$

梯形模糊中智集的不确定程度函数可表示为

$$I_{\tilde{N}}(x) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{b_2 - x}{b_2 - b_1} & b_1 \leq x \leq b_2 \\ 0 & b_2 \leq x \leq b_3 \\ \frac{x - b_3}{b_4 - b_3} & b_3 \leq x \leq b_4 \\ 1 & \text{otherwise} \end{array} \right\rangle. \quad (3)$$

梯形模糊中智集的谬误程度函数可表示为

$$F_{\tilde{N}}(x) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{c_2 - x}{c_2 - c_1} & c_1 \leq x < c_2 \\ 0 & c_2 \leq x \leq c_3 \\ \frac{x - c_3}{c_4 - c_3} & c_3 < x \leq c_4 \\ 1 & \text{otherwise} \end{array} \right\rangle. \quad (4)$$

当 \tilde{n} 中 $a_2 = a_3, b_2 = b_3, c_2 = c_3$ 时, TrFNN 成为三角模糊中智数, 三角模糊中智数是 TrFNN 的一种特殊情况.

定义4^[9] $\tilde{n}_1 = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \rangle$ 和 $\tilde{n}_2 = \langle (e_1, e_2, e_3, e_4), (f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4) \rangle$ 是两个 TrFNNs, 则:

1)

$$\tilde{n}_1 \oplus \tilde{n}_2 = \left\langle \begin{array}{l} (a_1 + e_1 - a_1e_1, a_2 + e_2 - a_2e_2, \\ a_3 + e_3 - a_3e_3, a_4 + e_4 - a_4e_4), \\ (b_1f_1, b_2f_2, b_3f_3, b_4f_4), \\ (c_1g_1, c_2g_2, c_3g_3, c_4g_4) \end{array} \right\rangle; \quad (5)$$

2)

$$\tilde{n}_1 \otimes \tilde{n}_2 = \left\langle \begin{array}{l} (a_1e_1, a_2e_2, a_3e_3, a_4e_4), \\ (b_1 + f_1 - b_1f_1, b_2 + f_2 - b_2f_2, \\ b_3 + f_3 - b_3f_3, b_4 + f_4 - b_4f_4), \\ (c_1 + g_1 - c_1g_1, c_2 + g_2 - c_2g_2, \\ c_3 + g_3 - c_3g_3, c_4 + g_4 - c_4g_4) \end{array} \right\rangle; \quad (6)$$

3)

$$\lambda \tilde{n}_1 = \left\langle \begin{array}{l} (1 - (1 - a_1)^\lambda, 1 - (1 - a_2)^\lambda, \\ 1 - (1 - a_3)^\lambda, 1 - (1 - a_4)^\lambda), \\ (b_1^\lambda, b_2^\lambda, b_3^\lambda, b_4^\lambda), \\ (c_1^\lambda, c_2^\lambda, c_3^\lambda, c_4^\lambda) \end{array} \right\rangle, \lambda > 0; \quad (7)$$

4)

$$\tilde{n}_1^\lambda = \left\langle \begin{array}{l} (a_1^\lambda, a_2^\lambda, a_3^\lambda, a_4^\lambda), \\ (1 - (1 - b_1)^\lambda, 1 - (1 - b_2)^\lambda, \\ 1 - (1 - b_3)^\lambda, 1 - (1 - b_4)^\lambda), \\ (1 - (1 - c_1)^\lambda, 1 - (1 - c_2)^\lambda, \\ 1 - (1 - c_3)^\lambda, 1 - (1 - c_4)^\lambda) \end{array} \right\rangle, \lambda > 0; \quad (8)$$

5) 若 $a_i = e_i, b_i = f_i, c_i = g_i, i = 1, 2, 3, 4$, 即 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) = (f_1, f_2, f_3, f_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) = (g_1, g_2, g_3, g_4)$, 则 $\tilde{n}_1 = \tilde{n}_2$.

1.3 排序方法

本文采用的排序方法演变自犹豫模糊集的得分函数和精确函数. 下面简单介绍犹豫模糊集的相关概念及基于梯形模糊中智数的得分函数和精确函数.

定义5^[25-26] 设 X 是给定的论域, 称定义在 X 上的犹豫模糊集(HFS)为

$$E = \{ \langle x, h_E(x) \rangle | x \in X \}, \quad (9)$$

其中 $h_E(x)$ 是由区间 $[0, 1]$ 上几个不同的数构成的集合, 表示 x 属于集合 E 的若干种可能隶属度. 为了计算方便, 称 $h = h_E(x) = \{ \gamma | \gamma \in h_E(x) \}$ 为一个犹豫模糊元(HFE).

定义6^[27] 设 h 为一个 HFE, 则 h 的得分函数为

$$s(h) = \frac{1}{n(h)} \sum_{\gamma \in h} \gamma, \quad (10)$$

其中 $n(h)$ 为 h 中元素的个数. 设两个犹豫模糊元为 h_1 和 h_2 , 如果 $s(h_1) > s(h_2)$, 则有 $h_1 > h_2$; 如果 $s(h_1) = s(h_2)$, 则有 $h_1 = h_2$.

定义7^[28] 设 h 为一个 HFE, 则 h 的精确函数为

$$k(h) = \sqrt{\frac{1}{n(h)} \sum_{\gamma \in h} (\gamma - s(h))^2}. \quad (11)$$

其中: $n(h)$ 为 h 中元素的个数, $s(h)$ 为 h 的得分函数. 设两个犹豫模糊元为 h_1 和 h_2 , 如果 $k(h_1) < k(h_2)$, 则

有 $h_1 < h_2$; 如果 $k(h_1) = k(h_2)$, 则有 $h_1 = h_2$.

定义 8^[29-30] 设 h_1 和 h_2 为两个 HFES, $s(h_1)$ 和 $s(h_2)$ 分别是 h_1 和 h_2 的得分函数, $k(h_1)$ 和 $k(h_2)$ 分别是 h_1 和 h_2 的精确函数值, 则:

1) 如果 $s(h_1) < s(h_2)$, 则 $h_1 < h_2$.

2) 如果 $s(h_1) = s(h_2)$, 则: i) 如果 $k(h_1) = k(h_2)$, 则 $h_1 \sim h_2$; ii) 如果 $k(h_1) < k(h_2)$, 则 $h_1 > h_2$; iii) 如果 $k(h_1) > k(h_2)$, 则 $h_1 < h_2$.

定义 9^[9] $\tilde{n} = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \rangle$ 是一个 TrFNN, 则其得分函数可以表示为

$$S(\tilde{n}) = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} - \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4} - \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{4} \right). \quad (12)$$

$S(\tilde{n}) \in [0, 1]$, $S(\tilde{n})$ 值越大, 梯形模糊中智数 \tilde{n} 越大.

定义 10^[9] $\tilde{n} = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \rangle$ 是一个 TrFNN, 则其精确函数可以表示为

$$H(\tilde{n}) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} - \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{4}. \quad (13)$$

$H(\tilde{n}) \in [-1, 1]$, $H(\tilde{n})$ 值越大, 梯形模糊中智数 \tilde{n} 越大.

基于得分函数 $S(\tilde{n})$ 和精确函数 $H(\tilde{n})$, 可以给出两个 TrFNNs 的排序关系.

定义 11^[9] $\tilde{n}_1 = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \rangle$ 和 $\tilde{n}_2 = \langle (e_1, e_2, e_3, e_4), (f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4) \rangle$ 是两个 TrFNNs, 则 $S(\tilde{n}_1)$ 和 $S(\tilde{n}_2)$ 分别是 \tilde{n}_1 和 \tilde{n}_2 的得分函数, $H(\tilde{n}_1)$ 和 $H(\tilde{n}_2)$ 分别是 \tilde{n}_1 和 \tilde{n}_2 的精确函数, 则 TrFNNs 的排序关系如下所示:

1) 如果 $S(\tilde{n}_1) > S(\tilde{n}_2)$, 则 $\tilde{n}_1 > \tilde{n}_2$.

2) 如果 $S(\tilde{n}_1) < S(\tilde{n}_2)$, 则 $\tilde{n}_1 < \tilde{n}_2$.

3) 如果 $S(\tilde{n}_1) = S(\tilde{n}_2)$, 则: i) 若 $H(\tilde{n}_1) > H(\tilde{n}_2)$, 则 $\tilde{n}_1 > \tilde{n}_2$; ii) 若 $H(\tilde{n}_1) < H(\tilde{n}_2)$, 则 $\tilde{n}_1 < \tilde{n}_2$.

定义 12^[31] $\tilde{n}_1 = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \rangle$ 是一个 TrFNN, 则其均值 $V_{\lambda, \mu, v}$ 和模糊度 $A_{\lambda, \mu, v}$ 分别为

$$\begin{aligned} V_{\lambda, \mu, v} &= \frac{\lambda}{6}(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) + \\ &\quad \frac{\mu}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4) + \\ &\quad \frac{v}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4), \quad (14) \\ A_{\lambda, \mu, v} &= \frac{\lambda}{6}(-a_1 - 2a_2 + 2a_3 + a_4) + \\ &\quad \frac{\mu}{6}(-b_1 - 2b_2 + 2b_3 + b_4) + \end{aligned}$$

$$\frac{v}{6}(-c_1 - 2c_2 + 2c_3 + c_4). \quad (15)$$

定义 13^[9] $\tilde{n}_1 = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \rangle$ 和 $\tilde{n}_2 = \langle (e_1, e_2, e_3, e_4), (f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4) \rangle$ 是两个 TrFNNs, 则 $V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1)$ 和 $V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$ 分别是 \tilde{n}_1 和 \tilde{n}_2 的均值, $A_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1)$ 和 $A_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$ 分别是 \tilde{n}_1 和 \tilde{n}_2 的模糊度, 则 TrFNNs 的排序关系如下所示:

1) 如果 $V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1) > V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$, 则 $\tilde{n}_1 > \tilde{n}_2$;

2) 如果 $V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1) < V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$, 则 $\tilde{n}_1 < \tilde{n}_2$;

3) 如果 $V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1) = V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$ 且 $A_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1) > A_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$, 则 $\tilde{n}_1 > \tilde{n}_2$;

4) 如果 $V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1) = V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$ 且 $A_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1) < A_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$, 则 $\tilde{n}_1 < \tilde{n}_2$;

5) 如果 $V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1) = V_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$ 且 $A_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_1) = A_{\lambda, \mu, v}(\tilde{n}_2)$, 则 $\tilde{n}_1 = \tilde{n}_2$.

2 中智图理论

一个有向图 $G(V, E)$ 由一组有限的点集 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 和一组有向的边 $E \subseteq V \times V$ 组成. 每条边用有序对 (i, j) 表示, 其中 $i, j \in V$ 且 $i \neq j$. 定义点、边的交错序列 $P_{ij} = \{i = i_1, (i_1, i_2), i_2, \dots, i_{l-1}, (i_{l-1}, i_l), i_l = j\}$ 为一条路径, 则在图 $G(V, E)$ 中肯定存在一条最短路径 P_{si} ($i \in V - \{s\}$). 若图中的边长 d_{ij} 用梯形模糊中智数表示, 则称 $G(V, E)$ 为梯形模糊中智图.

3 基于动态规划的梯形模糊中智图最短路径求解方法

动态规划方法的基本思路是将一个 n 阶段的决策问题转化为依次求解 n 个具有递推关系的单阶段决策问题, 从而简化计算过程. 在动态规划问题的计算中, 较多采用逆序算法.

本文将动态规划用于求解梯形模糊中智图最短路径问题, 具体步骤如下.

Step 1: 划分阶段. 首先将梯形模糊中智图恰当地划分为几个相互联系阶段, 以便于求解, 其中每个部分叫阶段, 一般是根据时间与空间的自然特征去划分阶段, 通常用 k 表示阶段变量.

Step 2: 确定每个阶段的状态变量. 状态表示在任一阶段所处的自然状况或客观条件, 它既是该阶段的起点, 又是前一阶段的终点, 第 k 阶段的状态变量表示为 s_k .

Step 3: 确定决策变量. 在某一阶段, 当状态给定后, 往往作出不同的决定, 从而确定下一阶段的状态, 此决定成为决策, 描述决策的变量称为决策变量, $u_k(s_k)$ 表示第 k 阶段当状态变量为 s_k 时的决策变

量,而这个决策又决定了第 $k + 1$ 阶段的状态. 在实际问题中,决策变量的取值往往限制在某一范围之内,此范围称为允许决策集合. 常用 $D_k(s_k)$ 表示第 k 阶段从状态 s_k 出发的允许决策集合,显然 $u_k(s_k) \in D_k(s_k)$.

Step 4: 建立状态转移方程. 状态转移方程表示由一个状态到另一个状态的演变过程. 某一个阶段的状态变量和决策变量确定后,下一个阶段的状态就随之确定. $s_{k+1} = T(s_k, u_k)$ 表示 k 阶段演变到 $k + 1$ 阶段状态的状态转移方程.

Step 5: 阶段指标. 阶段指标是衡量该阶段决策效果的数量指标,它是整个系统效益的一部分,是阶段状态和阶段决策的函数. $d_k(s_k, u_k)$ 表示在第 k 阶段初始状态为 s_k , 执行决策 $u_k(s_k)$ 时所得的效益,在本文中指两个节点间的梯形模糊中智距离长度.

Step 6: 指标函数和最优指标函数值. 指标函数是衡量全过程策略或 k 子过程策略优劣的数量指标,指标函数的最优值称之为最优指标函数,记作 $f_1(s_1)$ 或 $f_k(s_k)$. 其中: $f_1(s_1)$ 为全过程上的最优指标函数,在本文中指从起点到终点的最短路径; $f_k(s_k)$ 为 k 子过程上的最优指标函数.

Step 7: 最后,得到动态规划的一般模型为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min_{u_k \in D_k(s_k)} \{d_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \\ f_{k+1}(s_{k+1}) = 0, \quad k = n, n - 1, \dots, 2, 1. \end{cases}$$

Step 8: 逆向计算每个阶段最优指标函数值及最优决策,迭代直至第一阶段.

4 算例分析

4.1 案例分析

算例 1 本文图例改编自文献 [24], 求解其最短路径问题,与传统网络图的区别在于其网络图的边长表示为梯形模糊中智数,称之为梯形模糊中智图,其

图和边长表示如图 1 和表 1 所示.

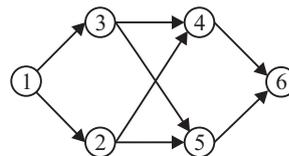


图 1 梯形模糊中智图

表 1 梯形模糊中智图边长

边	边的梯形模糊中智长度
① - ②	$\langle\langle 0.1, 0.2, 0.3, 0.5 \rangle, \langle 0.2, 0.3, 0.5, 0.6 \rangle, \langle 0.4, 0.5, 0.6, 0.8 \rangle\rangle$
① - ③	$\langle\langle 0.2, 0.4, 0.5, 0.7 \rangle, \langle 0.3, 0.5, 0.6, 0.9 \rangle, \langle 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 \rangle\rangle$
② - ④	$\langle\langle 0.3, 0.4, 0.6, 0.7 \rangle, \langle 0.1, 0.2, 0.3, 0.5 \rangle, \langle 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 \rangle\rangle$
② - ⑤	$\langle\langle 0.1, 0.3, 0.4, 0.5 \rangle, \langle 0.3, 0.4, 0.5, 0.7 \rangle, \langle 0.2, 0.3, 0.6, 0.7 \rangle\rangle$
③ - ④	$\langle\langle 0.2, 0.3, 0.5, 0.6 \rangle, \langle 0.2, 0.5, 0.6, 0.7 \rangle, \langle 0.4, 0.5, 0.6, 0.8 \rangle\rangle$
③ - ⑤	$\langle\langle 0.3, 0.6, 0.7, 0.8 \rangle, \langle 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 \rangle, \langle 0.1, 0.4, 0.5, 0.6 \rangle\rangle$
④ - ⑥	$\langle\langle 0.4, 0.6, 0.8, 0.9 \rangle, \langle 0.2, 0.4, 0.5, 0.6 \rangle, \langle 0.1, 0.3, 0.4, 0.5 \rangle\rangle$
⑤ - ⑥	$\langle\langle 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \rangle, \langle 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 \rangle, \langle 0.1, 0.3, 0.5, 0.6 \rangle\rangle$

基于动态规划方法求解图 1 的最短路径,采用逆序解法,从最后一个阶段开始,从终点 6 向始点 1 方向逐阶段逆推,找出各点到终点的最短路,当逆推到始点时,即找到了从始点到终点的全过程的最短路径.

Step 1: 将图 1 的中智图划分成 3 个阶段,即 $k = 3$.

Step 2: 当 $k = 3$, 即在第 3 个阶段时,数据如表 2 所示.

$$\begin{aligned} f_3(④) &= \min \{(d_3(④, ⑥) \oplus f_4(⑥))\} = \\ & d_3(④, ⑥) = \\ & \langle\langle 0.4, 0.6, 0.8, 0.9 \rangle, \langle 0.2, 0.4, 0.5, 0.6 \rangle, \\ & \langle 0.1, 0.3, 0.4, 0.5 \rangle\rangle, \\ f_3(⑤) &= \min \{(d_3(⑤, ⑥) \oplus f_4(⑥))\} = \\ & d_3(⑤, ⑥) = \\ & \langle\langle 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \rangle, \langle 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 \rangle, \\ & \langle 0.1, 0.3, 0.5, 0.6 \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Step 3: 当 $k = 2$, 即在第 2 个阶段时,数据如表 3 所示.

表 2 阶段 3

本阶段始点(状态)	本阶段各终点(决策)	到 E 的最短距离 $f_3(s_k)$	本阶段最优终点(最优决策)
	⑥		
④	$\langle\langle 0.4, 0.6, 0.8, 0.9 \rangle, \langle 0.2, 0.4, 0.5, 0.6 \rangle, \langle 0.1, 0.3, 0.4, 0.5 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.4, 0.6, 0.8, 0.9 \rangle, \langle 0.2, 0.4, 0.5, 0.6 \rangle, \langle 0.1, 0.3, 0.4, 0.5 \rangle\rangle$	⑥
⑤	$\langle\langle 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \rangle, \langle 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 \rangle, \langle 0.1, 0.3, 0.5, 0.6 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \rangle, \langle 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 \rangle, \langle 0.1, 0.3, 0.5, 0.6 \rangle\rangle$	⑥

表 3 阶段 2

本阶段始点(状态)	本阶段各终点(决策)		到 E 的最短距离 $f_2(s_k)$	本阶段最优终点(最优决策)
	④ $(d_2(s_k, ④) \oplus f_3(④))$	⑤ $(d_2(s_k, ⑤) \oplus f_3(⑤))$		
②	$\langle\langle 0.58, 0.76, 0.92, 0.97 \rangle, \langle 0.02, 0.08, 0.15, 0.30 \rangle, \langle 0.03, 0.15, 0.28, 0.45 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.28, 0.51, 0.64, 0.75 \rangle, \langle 0.09, 0.16, 0.25, 0.42 \rangle, \langle 0.02, 0.09, 0.30, 0.42 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.28, 0.51, 0.64, 0.75 \rangle, \langle 0.09, 0.16, 0.25, 0.42 \rangle, \langle 0.02, 0.09, 0.30, 0.42 \rangle\rangle$	⑤
③	$\langle\langle 0.52, 0.72, 0.90, 0.96 \rangle, \langle 0.04, 0.20, 0.30, 0.42 \rangle, \langle 0.04, 0.15, 0.24, 0.40 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.44, 0.72, 0.82, 0.90 \rangle, \langle 0.03, 0.08, 0.15, 0.24 \rangle, \langle 0.01, 0.12, 0.25, 0.36 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.52, 0.72, 0.90, 0.96 \rangle, \langle 0.04, 0.20, 0.30, 0.42 \rangle, \langle 0.04, 0.15, 0.24, 0.40 \rangle\rangle$	④

$$\begin{aligned}
 f_2(2) &= \\
 \min\{ &(d_2(2, 4) \oplus f_3(4)), (d_2(2, 5) \oplus f_3(5))\} = \\
 \min\{ &\langle(0.3, 0.4, 0.6, 0.7), (0.1, 0.2, 0.3, 0.5), \\
 &(0.3, 0.5, 0.7, 0.9)\rangle \oplus \langle(0.4, 0.6, 0.8, 0.9), \\
 &(0.2, 0.4, 0.5, 0.6), (0.1, 0.3, 0.4, 0.5)\rangle, \\
 &\langle(0.1, 0.3, 0.4, 0.5), (0.3, 0.4, 0.5, 0.7), \\
 &(0.2, 0.3, 0.6, 0.7)\rangle \oplus \langle(0.2, 0.3, 0.4, 0.5), \\
 &(0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.1, 0.3, 0.5, 0.6)\rangle\} = \\
 \min\{ &\langle(0.58, 0.76, 0.92, 0.97), \\
 &(0.02, 0.08, 0.15, 0.30), (0.03, 0.15, 0.28, 0.45)\rangle, \\
 &\langle(0.28, 0.51, 0.64, 0.75), (0.09, 0.16, 0.25, 0.42), \\
 &(0.02, 0.09, 0.30, 0.42)\rangle\}, \\
 S(d_2(2, 4) \oplus f_3(4)) &= \\
 S(\langle &\langle(0.58, 0.76, 0.92, 0.97), (0.02, 0.08, 0.15, 0.30), \\
 &(0.03, 0.15, 0.28, 0.45)\rangle) = 0.81, \\
 S(d_2(2, 5) \oplus f_3(5)) &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(\langle &\langle(0.28, 0.51, 0.64, 0.75), (0.09, 0.16, 0.25, 0.42), \\
 &(0.02, 0.09, 0.30, 0.42)\rangle) = 0.70.
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 f_2(2) &= \\
 \min\{ &(d_2(2, 4) \oplus f_3(4)), (d_2(2, 5) \oplus f_3(5))\} = \\
 d_2(2, 5) \oplus f_3(5) &= \\
 \langle &\langle(0.28, 0.51, 0.64, 0.75), (0.09, 0.16, 0.25, 0.42), \\
 &(0.02, 0.09, 0.30, 0.42)\rangle.
 \end{aligned}$$

同理可得,

$$\begin{aligned}
 f_2(3) &= \\
 \min\{ &(d_2(3, 4) \oplus f_3(4)), (d_2(3, 5) \oplus f_3(5))\} = \\
 d_2(3, 5) \oplus f_3(5) &= \\
 \langle &\langle(0.52, 0.72, 0.90, 0.96), (0.04, 0.20, 0.30, 0.42), \\
 &(0.04, 0.15, 0.24, 0.40)\rangle.
 \end{aligned}$$

Step 4: 当 $k = 1$, 即在第 1 个阶段时, 数据如表 4 所示.

表 4 阶段 1

本阶段始点(状态)	本阶段各终点(决策)		到 E 的最短距离 $f_1(1)$	本阶段最优终点(最优决策)
	② $d_1(1, 2) \oplus f_2(2)$	③ $d_1(1, 3) \oplus f_2(3)$		
①	$\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), (0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle$	$\langle(0.62, 0.83, 0.95, 0.99), (0.01, 0.10, 0.18, 0.38), (0.00, 0.03, 0.07, 0.16)\rangle$	$\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), (0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle$	②

$$\begin{aligned}
 f_1(1) &= \\
 \min\{ &(d_1(1, 2) \oplus f_2(2)), (d_1(1, 3) \oplus f_2(3))\} = \\
 \min\{ &\langle(0.1, 0.2, 0.3, 0.5), (0.2, 0.3, 0.5, 0.6), \\
 &(0.4, 0.5, 0.6, 0.8)\rangle \oplus \langle(0.28, 0.51, 0.64, 0.75), \\
 &(0.09, 0.16, 0.25, 0.42), (0.02, 0.09, 0.30, 0.42)\rangle, \\
 &\langle(0.2, 0.4, 0.5, 0.7), (0.3, 0.5, 0.6, 0.9), \\
 &(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)\rangle \oplus \langle(0.52, 0.72, 0.90, 0.96), \\
 &(0.04, 0.20, 0.30, 0.42), (0.04, 0.15, 0.24, 0.40)\rangle = \\
 \min\{ &\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), \\
 &(0.02, 0.05, 0.13, 0.25), (0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle, \\
 &\langle(0.62, 0.83, 0.95, 0.99), (0.01, 0.10, 0.18, 0.38), \\
 &(0.00, 0.03, 0.07, 0.16)\rangle\}, \\
 S(d_1(1, 2) \oplus f_2(2)) &= \\
 S(\langle &\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), \\
 &(0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle) = 0.80, \\
 S(d_1(1, 3) \oplus f_2(3)) &= \\
 S(\langle &\langle(0.62, 0.83, 0.95, 0.99), (0.01, 0.10, 0.18, 0.38), \\
 &(0.00, 0.03, 0.07, 0.16)\rangle) = 0.87.
 \end{aligned}$$

因为

$$S(d_1(1, 2) \oplus f_2(2)) < S(d_1(1, 3) \oplus f_2(3)),$$

所以

$$\begin{aligned}
 f_1(1) &= \\
 \min\{ &(d_1(1, 2) \oplus f_2(2)), (d_1(1, 3) \oplus f_2(3))\} = \\
 \langle &\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), \\
 &(0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle.
 \end{aligned}$$

因此, 最短路径为 ① → ② → ⑤ → ⑥, 具体可见图 2 虚线部分.

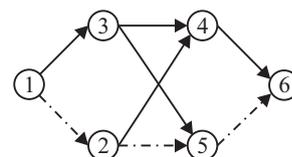


图 2 最短路径

最短路径的长度为

$$\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), (0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle.$$

同时, 可得到所有节点到终点 ⑥ 的最短路径及最短路径长度, 具体如表 5 所示.

表5 任意节点到终点的最短路径及最短路径长度

节点	最短路径长度	最短路径
⑤	$\langle(0.2, 0.3, 0.4, 0.5), (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.1, 0.3, 0.5, 0.6)\rangle$	⑤ → ⑥
④	$\langle(0.4, 0.6, 0.8, 0.9), (0.2, 0.4, 0.5, 0.6), (0.1, 0.3, 0.4, 0.5)\rangle$	④ → ⑥
③	$\langle(0.52, 0.72, 0.90, 0.96), (0.04, 0.20, 0.30, 0.42), (0.04, 0.15, 0.24, 0.40)\rangle$	③ → ④ → ⑥
②	$\langle(0.28, 0.51, 0.64, 0.75), (0.09, 0.16, 0.25, 0.42), (0.02, 0.09, 0.30, 0.42)\rangle$	② → ⑤ → ⑥
①	$\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), (0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle$	① → ② → ⑤ → ⑥

算例2 为了说明方法过程, 求解图3最短路径问题, 其边长表示为梯形模糊中智数, 边长数据如表6

所示. 采用本文提出的扩展动态规划方法求解图3的最短路径, 其结果如表7所示.

表6 梯形模糊中智图边长

边	边的梯形模糊中智长度	边	边的梯形模糊中智长度
①-②	$\langle(0.1, 0.2, 0.3, 0.5), (0.2, 0.3, 0.5, 0.6), (0.4, 0.5, 0.6, 0.8)\rangle$	④-⑦	$\langle(0.4, 0.5, 0.6, 0.6), (0.2, 0.2, 0.3, 0.3), (0.2, 0.3, 0.4, 0.4)\rangle$
①-③	$\langle(0.2, 0.4, 0.5, 0.7), (0.3, 0.5, 0.6, 0.9), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)\rangle$	④-⑧	$\langle(0.3, 0.4, 0.6, 0.7), (0.1, 0.2, 0.3, 0.5), (0.3, 0.5, 0.7, 0.9)\rangle$
①-④	$\langle(0.2, 0.3, 0.5, 0.6), (0.1, 0.2, 0.4, 0.5), (0.2, 0.3, 0.4, 0.7)\rangle$	⑤-⑨	$\langle(0.1, 0.3, 0.4, 0.5), (0.3, 0.4, 0.5, 0.7), (0.2, 0.3, 0.6, 0.7)\rangle$
②-⑤	$\langle(0.4, 0.6, 0.8, 0.9), (0.3, 0.4, 0.5, 0.7), (0.2, 0.3, 0.6, 0.7)\rangle$	⑤-⑩	$\langle(0.2, 0.3, 0.4, 0.5), (0.2, 0.3, 0.3, 0.4), (0.3, 0.4, 0.4, 0.5)\rangle$
②-⑥	$\langle(0.5, 0.7, 0.8, 0.9), (0.1, 0.2, 0.3, 0.5), (0.4, 0.5, 0.6, 0.8)\rangle$	⑥-⑨	$\langle(0.2, 0.3, 0.5, 0.6), (0.2, 0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.5, 0.6, 0.8)\rangle$
②-⑦	$\langle(0.3, 0.5, 0.6, 0.9), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)\rangle$	⑥-⑩	$\langle(0.3, 0.4, 0.4, 0.5), (0.1, 0.2, 0.2, 0.3), (0.2, 0.2, 0.3, 0.4)\rangle$
②-⑧	$\langle(0.6, 0.7, 0.8, 0.9), (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)\rangle$	⑦-⑨	$\langle(0.2, 0.3, 0.4, 0.4), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.3, 0.4, 0.4, 0.5)\rangle$
③-⑤	$\langle(0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.1, 0.1, 0.2, 0.3), (0.1, 0.2, 0.2, 0.3)\rangle$	⑦-⑩	$\langle(0.3, 0.4, 0.6, 0.7), (0.1, 0.2, 0.3, 0.5), (0.3, 0.6, 0.7, 0.9)\rangle$
③-⑥	$\langle(0.6, 0.8, 0.8, 0.9), (0.1, 0.2, 0.3, 0.3), (0.2, 0.2, 0.2, 0.2)\rangle$	⑧-⑨	$\langle(0.4, 0.6, 0.8, 0.9), (0.1, 0.3, 0.4, 0.5), (0.2, 0.4, 0.5, 0.6)\rangle$
③-⑦	$\langle(0.4, 0.6, 0.8, 0.9), (0.2, 0.4, 0.5, 0.6), (0.1, 0.3, 0.4, 0.5)\rangle$	⑧-⑩	$\langle(0.1, 0.1, 0.1, 0.1), (0.2, 0.2, 0.2, 0.2), (0.6, 0.7, 0.8, 0.8)\rangle$
③-⑧	$\langle(0.5, 0.6, 0.8, 0.9), (0.2, 0.2, 0.2, 0.2), (0.1, 0.1, 0.2, 0.2)\rangle$	⑨-⑩	$\langle(0.7, 0.7, 0.7, 0.7), (0.3, 0.4, 0.5, 0.7), (0.3, 0.6, 0.7, 0.9)\rangle$
④-⑤	$\langle(0.6, 0.7, 0.8, 0.8), (0.2, 0.2, 0.3, 0.3), (0.1, 0.1, 0.2, 0.3)\rangle$	⑩-⑪	$\langle(0.6, 0.7, 0.8, 0.8), (0.2, 0.2, 0.3, 0.3), (0.1, 0.4, 0.5, 0.6)\rangle$
④-⑥	$\langle(0.4, 0.5, 0.6, 0.7), (0.2, 0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)\rangle$		

表7 任意节点到终点的最短路径及最短路径长度

节点	最短路径长度	最短路径
⑩	$\langle(0.6, 0.7, 0.8, 0.8), (0.2, 0.2, 0.3, 0.3), (0.1, 0.4, 0.5, 0.6)\rangle$	⑩ → ⑪
⑨	$\langle(0.7, 0.7, 0.7, 0.7), (0.3, 0.4, 0.5, 0.7), (0.3, 0.6, 0.7, 0.9)\rangle$	⑨ → ⑩
⑧	$\langle(0.64, 0.73, 0.82, 0.82), (0.04, 0.04, 0.06, 0.06), (0.06, 0.28, 0.40, 0.48)\rangle$	⑧ → ⑩ → ⑪
⑦	$\langle(0.76, 0.79, 0.82, 0.82), (0.03, 0.08, 0.15, 0.28), (0.09, 0.24, 0.28, 0.45)\rangle$	⑦ → ⑨ → ⑩
⑥	$\langle(0.76, 0.79, 0.85, 0.88), (0.06, 0.20, 0.30, 0.49), (0.12, 0.30, 0.42, 0.72)\rangle$	⑥ → ⑨ → ⑩
⑤	$\langle(0.73, 0.79, 0.82, 0.85), (0.09, 0.16, 0.25, 0.49), (0.06, 0.18, 0.42, 0.63)\rangle$	⑤ → ⑨ → ⑩
④	$\langle(0.75, 0.84, 0.93, 0.95), (0.00, 0.01, 0.02, 0.03), (0.02, 0.14, 0.28, 0.43)\rangle$	④ → ⑧ → ⑩ → ⑪
③	$\langle(0.86, 0.92, 0.96, 0.98), (0.01, 0.03, 0.08, 0.17), (0.01, 0.07, 0.11, 0.23)\rangle$	③ → ⑦ → ⑨ → ⑩
②	$\langle(0.88, 0.94, 0.97, 0.99), (0.01, 0.04, 0.09, 0.25), (0.05, 0.15, 0.25, 0.58)\rangle$	② → ⑥ → ⑨ → ⑩
①	$\langle(0.89, 0.95, 0.98, 0.99), (0.00, 0.01, 0.05, 0.15), (0.02, 0.08, 0.15, 0.46)\rangle$	① → ② → ⑥ → ⑨ → ⑩

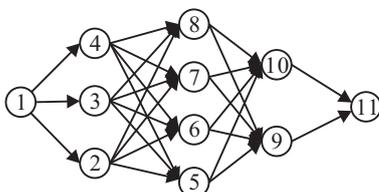


图3 梯形模糊中智图

4.2 不同求解方法对比分析

为说明算法的有效性和合理性, 将本文提出的扩展动态规划方法与文献[24]的Dijkstra算法进行对比分析.

根据Dijkstra算法计算算例1, 可得到起点①到各个节点的最短距离.

首先,起点①标记为
 $\{((0.0, 0.0, 0.0, 0.0), (1.0, 1.0, 1.0, 1.0), (1.0, 1.0, 1.0, 1.0)), -\}$;

节点②标记为
 $\{((0.1, 0.2, 0.3, 0.5), (0.2, 0.3, 0.5, 0.6), (0.4, 0.5, 0.6, 0.8)), 1\}$;

节点③标记为
 $\{((0.2, 0.4, 0.5, 0.7), (0.3, 0.5, 0.6, 0.9), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)), 1\}$;

节点④标记为
 $\{((0.37, 0.52, 0.72, 0.85), (0.02, 0.06, 0.15, 0.30), (0.12, 0.25, 0.42, 0.72)), 2\}$;

节点⑤标记为
 $\{((0.19, 0.44, 0.58, 0.75), (0.06, 0.12, 0.25, 0.42), (0.08, 0.15, 0.36, 0.56)), 2\}$;

节点⑥标记为

$\{((0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), (0.01, 0.05, 0.18, 0.34)), 5\}$.

因此,算例1最短路径为①→②→⑤→⑥,具体可见图2,最短路径的长度为

$\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), (0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle$.

相同计算过程,算例2最短路径为①→②→⑥→⑨→⑩,最短路径长度为

$\langle(0.89, 0.95, 0.98, 0.99), (0.00, 0.01, 0.05, 0.15), (0.02, 0.08, 0.15, 0.46)\rangle$.

采用文献[24]的Dijkstra算法可得到起点①到所有节点的最短路径及最短路径长度,具体如表8(算例1)和表9(算例2)所示.两种方法相比较,本文提出的动态规划扩展方法与文献[24]Dijkstra算法的计算结果是一样的,具有同样的最短路径和最短路径长度,方法具有可行性和合理性.

表8 任意节点到终点的最短路径及最短路径长度(算例1)

节点	最短路径长度	最短路径
②	$\langle(0.1, 0.2, 0.3, 0.5), (0.2, 0.3, 0.5, 0.6), (0.4, 0.5, 0.6, 0.8)\rangle$	①→②
③	$\langle(0.2, 0.4, 0.5, 0.7), (0.3, 0.5, 0.6, 0.9), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)\rangle$	①→③
④	$\langle(0.37, 0.52, 0.72, 0.85), (0.02, 0.06, 0.15, 0.30), (0.12, 0.25, 0.42, 0.72)\rangle$	①→②→④
⑤	$\langle(0.19, 0.44, 0.58, 0.75), (0.06, 0.12, 0.25, 0.42), (0.08, 0.15, 0.36, 0.56)\rangle$	①→②→⑤
⑥	$\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), (0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle$	①→②→⑤→⑥

表9 任意节点到终点的最短路径及最短路径长度(算例2)

节点	最短路径长度	最短路径
②	$\langle(0.1, 0.2, 0.3, 0.5), (0.2, 0.3, 0.5, 0.6), (0.4, 0.5, 0.6, 0.8)\rangle$	①→②→③
③	$\langle(0.2, 0.4, 0.5, 0.7), (0.3, 0.5, 0.6, 0.9), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)\rangle$	①→③
④	$\langle(0.2, 0.3, 0.5, 0.6), (0.1, 0.2, 0.4, 0.5), (0.2, 0.3, 0.4, 0.7)\rangle$	①→④
⑤	$\langle(0.46, 0.68, 0.86, 0.95), (0.06, 0.12, 0.25, 0.42), (0.08, 0.15, 0.36, 0.56)\rangle$	①→②→⑤
⑥	$\langle(0.55, 0.76, 0.86, 0.95), (0.02, 0.06, 0.15, 0.30), (0.16, 0.25, 0.36, 0.64)\rangle$	①→②→⑥
⑦	$\langle(0.37, 0.60, 0.72, 0.95), (0.04, 0.12, 0.25, 0.42), (0.04, 0.10, 0.18, 0.32)\rangle$	①→②→⑦
⑧	$\langle(0.44, 0.58, 0.80, 0.88), (0.01, 0.04, 0.12, 0.25), (0.06, 0.15, 0.28, 0.63)\rangle$	①→④→⑧
⑨	$\langle(0.51, 0.78, 0.92, 0.98), (0.02, 0.05, 0.13, 0.29), (0.02, 0.05, 0.22, 0.39)\rangle$	①→②→⑤→⑨
⑩	$\langle(0.50, 0.62, 0.82, 0.89), (0.00, 0.01, 0.02, 0.05), (0.04, 0.11, 0.22, 0.50)\rangle$	①→④→⑧→⑩
⑪	$\langle(0.89, 0.95, 0.98, 0.99), (0.00, 0.01, 0.05, 0.15), (0.02, 0.08, 0.15, 0.46)\rangle$	①→②→⑥→⑨→⑩

4.3 不同排序方法的对比分析

文献[31]提出了梯形模糊中智数的均值和模糊度排序方法,将此排序方法用于本文的动态规划最短路径求解问题.

由定义12可知,梯形模糊中智数的均值和模糊度排序方法与决策者偏好有关,因此分3种情况来讨

论.当决策者偏好中立时,取 $\lambda = \mu = \nu = 1/3$,

$$V_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}}(d_2(\textcircled{2}, \textcircled{4}) \oplus f_3(\textcircled{4})) = V_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}}(\langle(0.58, 0.76, 0.92, 0.97), (0.02, 0.08, 0.15, 0.30), (0.03, 0.15, 0.28, 0.45)\rangle) = 0.39,$$

$$\begin{aligned}
 &V_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}}(d_2(\textcircled{2}, \textcircled{5}) \oplus f_3(\textcircled{5})) = \\
 &V_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}}(\langle\langle(0.28, 0.51, 0.64, 0.75), \\
 &(0.09, 0.16, 0.25, 0.42), (0.02, 0.09, 0.30, 0.42)\rangle\rangle) = \\
 &0.33, \\
 &f_2(\textcircled{2}) = \\
 &\min\{(d_2(\textcircled{2}, \textcircled{4}) \oplus f_3(\textcircled{4})), (d_2(\textcircled{2}, \textcircled{5}) \oplus f_3(\textcircled{5}))\} = \\
 &d_2(\textcircled{2}, \textcircled{5}) \oplus f_3(\textcircled{5}) = \\
 &\langle\langle(0.28, 0.51, 0.64, 0.75), (0.09, 0.16, 0.25, 0.42), \\
 &(0.02, 0.09, 0.30, 0.42)\rangle\rangle.
 \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
 &f_2(\textcircled{3}) = \\
 &\min\{(d_2(\textcircled{3}, \textcircled{4}) \oplus f_3(\textcircled{4})), (d_2(\textcircled{3}, \textcircled{5}) \oplus f_3(\textcircled{5}))\} = \\
 &\langle\langle(0.44, 0.72, 0.82, 0.90), (0.03, 0.08, 0.15, 0.24), \\
 &(0.01, 0.12, 0.25, 0.36)\rangle\rangle, \\
 &f_1(\textcircled{1}) = \\
 &\min\{(d_1(\textcircled{1}, \textcircled{2}) \oplus f_2(\textcircled{2})), (d_1(\textcircled{1}, \textcircled{3}) \oplus f_2(\textcircled{3}))\} = \\
 &\langle\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), \\
 &(0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle\rangle.
 \end{aligned}$$

因此,最短路径依然为 ① → ② → ⑤ → ⑥, 具体可见图2. 最短路径的长度为

$$\begin{aligned}
 &\langle\langle(0.35, 0.61, 0.75, 0.88), (0.02, 0.05, 0.13, 0.25), \\
 &(0.01, 0.05, 0.18, 0.34)\rangle\rangle.
 \end{aligned}$$

当决策者偏好乐观时, $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq 1$ 且 $0 \leq \mu + v \leq \frac{1}{3}$, 取 $\lambda = \frac{3}{4}, \mu = v = \frac{1}{8}$, 各个节点到终点的最短路径及最短路径长度与决策者偏好中立时的结果一样.

当决策者偏好悲观时, $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{3}$ 且 $\frac{2}{3} \leq \mu + v \leq 1$, 取 $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = v = \frac{3}{8}$, 各个节点到终点的最短路径及最短路径长度与决策者偏好中立时的结果一样.

类似计算算例2, 决策者偏好中立时, 最短路径为 ① → ④ → ⑦ → ⑨ → ⑪; 当决策者偏好乐观时, 最短路径为 ① → ④ → ⑧ → ⑩ → ⑪; 当决策者偏好悲观时, 最短路径为 ① → ③ → ⑧ → ⑩ → ⑪.

从结果看出, 采用文献[31]提出的排序方法和采用得分函数求解梯形模糊中智图的最短路径结果有时是不一样的, 其原因在于不同的中智数排序方法对其真实程度(T)、不确定程度(I)及谬误程度(F)的偏好不同, 也就是对信息的取舍不同, 这对于路径的选择影响很大.

5 结论

本文在研究了梯形模糊中智理论及中智图理论的基础上, 提出了基于动态规划的梯形模糊中智图的最短路径求解方法, 并与Broumi提出的Dijkstra算法进行了对比分析; 同时, 研究了两种梯形模糊中智数排序方法, 基于得分函数和精确函数的排序方法和基于均值和模糊度的排序方法进行了最短路径求解方法的对比分析. 在今后的工作中, 将进一步对中智图理论和方法进行深入研究.

参考文献(References)

- [1] Smarandache F. A unifying field in logics. Neutrosophy: Neutrosophic probability, set and logic[M]. Rehoboth: American Research Press, 1999: 10-16.
- [2] Wang H, Smarandache F, Zhang Y Q, et al. Interval neutrosophic sets and logic: Theory and applications in computing[M]. Hexis: Arizona, 2005: 4-5.
- [3] Wang H B, Smarandache F, Zhang Y Q, et al. Single valued neutrosophic sets[J]. Multispace and Multistructure, 2010, 4(10): 410-413.
- [4] Peng J J, Wang J Q. Multi-valued neutrosophic sets and its application in multi-criteria decision-making problems[J]. Neutrosophic Sets and Systems, 2015, 10: 3-17.
- [5] Ye J. Multiple-attribute decision-making method under a single-valued neutrosophic hesitant fuzzy environment[J]. J of Intelligent Systems, 2014, 24(1): 23-36.
- [6] Tian Z P, Wang J, Zhang H Y, et al. Simplified neutrosophic linguistic normalized weighted Bonferroni mean operator and its application to multi-criteria decision-making problems[J]. Filomat, 2016, 30(12): 3339-3360.
- [7] Deli I, Mumtaz A, Smarandache F. Bipolar neutrosophic sets and their applications based on multicriteria decision making problems advanced mechatronic systems[C]. Proc of the 2015 Int Conf on Advanced Mechatronic Systems. Beijing: IEEE, 2015: 249-254.
- [8] Biswas P, Pramanik S, Giri B C. Cosine similarity measure based multi-attribute decision-making with trapezoidal fuzzy neutrosophic numbers[J]. Neutrosophic Sets and Systems, 2014, 8: 46-56.
- [9] Ye J. Trapezoidal neutrosophic set and its applicaion to multiple attribute decision-making[J]. Neural Comput & Applic, 2015, 26(5): 1157-1166.
- [10] Broumi S, Bakali A, Talea M, et al. Computation of shortest path problem in a network with SV-trapezoidal neutrosophic numbers[C]. Proc of the 2016 Int Conf on Advanced Mechatronic Systems. Melbourne: IEEE,

- 2017: 417-422.
- [11] 鱼先锋. 半直觉模糊图与应用[J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(18): 88-91.
(Yu X F. Half intuitionistic fuzzy graph and application[J]. Computer Engineering and Applications, 2016, 52(18): 88-91.)
- [12] 李秀美, 陈华友. 不确定信息下模糊网络最短路径关键边问题[J]. 武汉理工大学学报: 信息与管理工程版, 2013, 35(1): 36-39.
(Li X M, Chen H Y. Critical edge of the shortest path on fuzzy traffic network in uncertain information environment[J]. J of WUT: Information & Management Engineering, 2013, 35(1): 36-39.)
- [13] Deng Y, Chen Y, Zhang Y, et al. Fuzzy dijkstra algorithm for shortest path problem under uncertain environment[J]. Applied Soft Computing, 2012, 12(3): 1231-1237.
- [14] Jayagowri P, Ramani G G. Using trapezoidal intuitionistic fuzzy number to find optimized path in a network[J]. Advances in Fuzzy Systems, 2014, 2014(1): 12.
- [15] Das D, De P K. Shortest path problem under intuitionistic fuzzy setting[J]. Int J of Computer Applications, 2014, 105(1): 1-4.
- [16] Majumder S, Pal A. Shortest path problem on intuitionistic fuzzy network[J]. Annals of Pure and Applied Mathematics, 2013, 5(1): 26-36.
- [17] Broumi S, Talea M, Bakali A, et al. Single valued neutrosophic graphs[J]. J of New Theory, 2016, 10: 86-101.
- [18] Broumi S, Talea M, Bakali A, et al. Applying dijkstra algorithm for solving neutrosophic shortest path problem[C]. Proc of the 2016 Int Conf on Advanced Mechatronic Systems. Melbourne: IEEE, 2016: 412-416.
- [19] Broumi S, Talea M, Bakali A, et al. Application of dijkstra algorithm for solving interval valued neutrosophic shortest path problem[C]. Proc of the 2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence. Athens: IEEE, 2017: 1-6
- [20] Broumi S, Smarandache F, Talea M, et al. An introduction to bipolar single valued neutrosophic graph theory[J]. Applied Mechanics and Materials, 2016, 841: 184-191.
- [21] Broumi S, Bakali A, Talea M, et al. Shortest path problem under bipolar neutrosophic setting[J]. Applied Mechanics and Materials, 2016, 859: 59-66.
- [22] Broumi S, Talea M, Bakali A, et al. Interval valued neutrosophic graphs[J]. Critical Review, 2016, X: 5-33.
- [23] Broumi S, Bakali A, Talea M, et al. Shortest path problem under triangular fuzzy neutrosophic information[C]. Proc of the 2016 10th Int Conf on Software, Knowledge, Information Management & Applications. Chengdu: IEEE, 2017: 1-6.
- [24] Broumi S, Talea M, Bakali A, et al. Shortest path problem under trapezoidal neutrosophic information[C]. Proc of the Computing Conf. London: IEEE, 2017: 142-148.
- [25] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.
- [26] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. Proc of the 18th IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Jeju Island: IEEE, 2009: 1378-1382.
- [27] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 395-407.
- [28] Xia M M, Xu Z S, Zhu B. Generalized intuitionistic fuzzy bonferroni means[J]. Int J of General Systems, 2011, 27(1): 23-47.
- [29] Chen N, Xu Z S, Xia M M. The electre i multi-criteria decision-making method based on hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Information Technology & Decision Making, 2015, 14(3): 621-657.
- [30] Peng J J, Zhou H, Chen X H, et al. A multi-criteria decision-making approach based on TODIM and choquet integral within a multiset hesitant fuzzy environment[J]. Applied Mathematics & Information Sciences, 2015, 9(4): 2087-2097.
- [31] Biswas P, Pramanik S, Giri B C. Value and ambiguity index based ranking method of single-valued trapezoidal neutrosophic numbers and its application to multi-attribute decision making[J]. Neutrosophic Sets and Systems, 2016, 12: 127-138.

(责任编辑: 齐 霖)