第 34 卷 第 4 期
2019 年 4 月

控 制 与 决 策
*Control and Decision*

Vol.34 No.4
Apr. 2019

文章编号: 1001-0920(2019)04-0861-10

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1374

# 基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法

刘玉敏, 朱 峰†, 靳琳琳

(郑州大学 商学院，郑州 450001)

**摘 要:** 针对概率犹豫模糊元的多个隶属度和其概率各不相同的特点,提出基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法. 首先,定义3种新的概率犹豫模糊熵: 模糊熵、犹豫熵和总熵,以分别测量概率犹豫模糊元的模糊性、犹豫性和整体不确定性;然后给出3种熵测度的公理化定义和表达式;最后,根据概率犹豫模糊元的3种熵,构建能够解决属性权重完全未知的多属性决策模型,并通过案例和对比分析验证所提模型的有效性和合理性.

**关键词:** 概率犹豫模糊熵；概率犹豫模糊元；犹豫熵；总熵

**中图分类号:** C934　　**文献标志码:** A

# Multi-attribute decision method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy

*LIU Yu-min, ZHU Feng†, JIN Lin-lin*

(Business of School，Zhengzhou University，Zhengzhou 450001，China)

**Abstract:** A multi-attribute decision-making method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy is proposed for the multiple membership degree of probabilistic hesitant fuzzy elements and the characteristics that their probability is different. Firstly, three new probabilistic fuzzy entropies are proposed: The fuzzy entropy, the hesitant entropy and the total entropy which are used to measure the fuzziness, the hesitation and the global uncertainty of the probability hesitant fuzzy elements respectively. Then, the axiomatic definition and expressions of the three entropies are given. Finally, the multi-attribute decision-making model that can solve completely unknown attribute weights is constructed by the three entropy of the probability hesitant fuzzy elements, and the effectiveness and rationality of the model are verified by a case and contrast analysis.

**Keywords:** probabilistic hesitant fuzzy entropy；probabilistic hesitant fuzzy element；hesitant entropy；total entropy

## 0 引 言

为了解决复杂多属性决策中专家偏好的不一致性, Torra等[1-2]首先提出了犹豫模糊集. 近年来,国内外学者对犹豫模糊集进行了较为广泛的研究[3-11], 先后将犹豫模糊集拓展为犹豫模糊语言集[12]、区间犹豫模糊集[13]、对偶犹豫模糊集[14]、广义犹豫模糊集[15]、犹豫三角模糊集[16]等. 虽然犹豫模糊集允许一个元素属于某个集合的隶属度可以是多个不同的值,但却将每一个隶属度发生的概率看作是相同的. 例如一名汽车专家应邀评估某新车的安全性,由于缺乏相关的信息,该专家对于该车安全性能的判断在0.7与0.8之间犹豫不决,则该车的安全性评估信息可用犹豫模糊元$\{0.7, 0.8\}$表示,但是该专家认为0.7比0.8发生的可能性更大,而犹豫模糊集无法表达专家的这种偏好.

为了能够考虑每一个隶属度发生的概率, Xu等[17]提出了概率犹豫模糊集,即针对前文提出的汽车安全性评估的例子,可得到一个概率犹豫模糊元$\{0.7|0.9, 0.8|0.1\}$,其中0.9和0.1分别代表隶属度0.7和0.8发生的概率. 与犹豫模糊集相比,概率犹豫模糊集包含的不确定信息更多,既充分考虑到不同的隶属度,又给出每一个隶属度发生的概率,有效地考虑了决策者的偏好. 因此,概率犹豫模糊集可以充分地刻画决策者的不确定性决策信息,这引起了越来越多学者的关注. Gao等[18]定义了概率犹豫模糊集的距离测度,并且提出了考虑时间因素的概率犹豫模糊变量和与之相关的多种动态概率犹豫模糊算子; Li等[19]提出了概率犹豫模糊集的可能度公式,用于比较两个

**收稿日期:** 2017-10-17；**修回日期:** 2017-12-22.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(71672182, 71711540309, U1604262).

**作者简介:** 刘玉敏(1956−), 女, 教授, 博士生导师, 从事决策分析、智能监控等研究；朱峰(1994−), 男, 硕士生, 从事多属性决策方法、智能优化算法的研究.

†通讯作者. E-mail: zhufengl1994@163.com.

概率犹豫模糊集的优劣;Zhou等[20]根据概率犹豫模糊集的优良特性提出了犹豫风险价值,并将其应用到最优库存股的选择问题中;Hao等[21]对概率犹豫模糊集进行了拓展,提出了概率对偶犹豫模糊集.

为了测量犹豫模糊集的不确定性,犹豫模糊熵被引入到犹豫模糊多属性决策中. Xu等[22]将模糊熵、交叉熵推广到犹豫模糊环境下,定义了犹豫模糊集的熵和交叉熵,并讨论了两者间的关系;Farhadinia[23]基于犹豫模糊元的距离测度提出了多种犹豫模糊元的熵;Wei等[24]结合犹豫模糊元的均值和方差提出了一系列的犹豫模糊熵;随后,Farhadinia[25]指出熵理论的缺陷,提出了区间转换犹豫模糊元的概念,并以此为基础构造了一种犹豫模糊熵;Hu等[26]基于犹豫模糊相似度,提出了新的犹豫模糊熵;Zhao等[27]从犹豫模糊元的模糊性和非明确性两个角度提出了犹豫模糊元的二元熵.

对于任意一个概率犹豫模糊元,其隶属度的确定具有一定的模糊性. 该模糊元是由多个不同隶属度构成,显示了一定的犹豫性,并且每一个隶属度的概率不尽相同,又具有一定的似然性. 因此,概率犹豫模糊元的不确定性主要包含模糊性、犹豫性和似然性,其与犹豫模糊元的不确定性相比更加复杂. 目前,关于概率犹豫模糊熵的多属性决策研究仍为鲜见. 因此,为了测量概率犹豫模糊元的不确定性,本文首先提出概率犹豫模糊元的模糊熵和犹豫熵的公理化定义以及相关测度,以分别测量概率犹豫模糊元的模糊性和犹豫性;然后,为了能够测量概率犹豫模糊元的整体不确定性,结合概率犹豫模糊元的模糊熵和犹豫熵,提出概率犹豫模糊元的总熵的公理化定义和相关测度;最后,将概率犹豫模糊熵与TOPSIS方法结合,运用到属性权重完全未知的多属性决策问题中,并通过具体案例进行验证分析.

## 1 预备知识

### 1.1 概率犹豫模糊集相关概念

**定义1**[17] 设$X$是给定的一个非空集合,则在$X$上的一个概率犹豫模糊集(PHFS)$H_p$定义为

$$H_p = \{\langle x, h(p_x)\rangle | x \in X\}.$$

其中$h(p_x)$是概率犹豫模糊集$H_p$的基本元素,一般称$h(p_x) = \{\gamma^\lambda | p^\lambda | \lambda = 1, 2, \cdots, l\}$为概率犹豫模糊元(PHFE): $l$代表$h(p_x)$中元素的个数,$\gamma^\lambda$代表集合$X$中的元素$x$属于概率犹豫模糊集$H_p$的隶属度,$\gamma^\lambda \in [0,1]$; $p^\lambda$代表隶属度$\gamma^\lambda$的概率,且$p^\lambda \in [0,1]$, $\sum\limits_{\lambda=1}^{l} p^\lambda = 1$. 特别地,当$p^1 = p^2 = \cdots = p^l$时,退化为一个犹豫模糊集(HFS).

为了简便,记$h(p_x) = h(p)$,且本文中所有的概率犹豫模糊元$h(p)$中的元素$\gamma^\lambda | p^\lambda$一律按照隶属度$\gamma^\lambda$从小到大排序,同时$h(p)$的补集

$$h^c(p) = \{1 - \gamma^\lambda | p^\lambda | \lambda = 1, 2, \cdots, l\}.$$

**定义2**[18] 设任意两个概率犹豫模糊元$h_1(p)$和$h_2(p)$,则称

$$d_p(h_1(p), h_2(p)) = \sum_{\lambda=1}^{l} |\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda| \tag{1}$$

为两个概率犹豫模糊元的海明距离,其中$\gamma_1^\lambda p_1^\lambda$和$\gamma_2^\lambda p_2^\lambda$分别是$h_1(p)$和$h_2(p)$中第$\lambda$大的元素.

**定义3**[19] 设非空集合$X$上的一个概率犹豫模糊集$H_p = \{\langle x, h(p_x)\rangle | x = 1, 2, \cdots, n\}$,其中$h(p_x) = \{\gamma^\lambda | p^\lambda | \lambda = 1, 2, \cdots, l\}$,则隶属度$\gamma$在$X$上的总概率为

$$P(x = \gamma^\lambda) = \\ \sum_{\lambda=1}^{n} P(x = h(p_x)) P(x = \gamma^\lambda / x = h(p_x)). \tag{2}$$

### 1.2 犹豫模糊元的熵测度

为了描述犹豫模糊元的模糊性和非明确性, Zhao等[27]首次提出了犹豫模糊元的二元熵概念. 关于二元熵的公理化定义如下.

**定义4**[27] 设任意两个犹豫模糊元$h_1$和$h_2$,一般称二元函数$(E_F, E_N): H \to [0,1]$为犹豫模糊元的二元熵,其中$E_F$和$E_N$为犹豫模糊元的模糊熵和非明确熵,分别代表犹豫模糊元的模糊性和非明确性,而且需要满足以下性质:

1) 当且仅当$h_1 = \{0\}$或者$h_1 = \{1\}$时,$E_F(h_1) = 0$;

2) 当且仅当$h_1 = \{0.5\}$时,$E_F(h_1) = 1$;

3) $\forall i = 1, 2, \cdots, l$,如果$h_1^{\delta(i)} \leqslant h_2^{\delta(i)} \leqslant 0.5$或者$h_1^{\delta(i)} \geqslant h_2^{\delta(i)} \geqslant 0.5$,则$E(h_1) \leqslant E(h_2)$;

4) $E_F(h_1) = E_F(h_1^c)$;

5) 当且仅当犹豫模糊元$h_1$只包含一个隶属度时,$E_N(h_1) = 0$;

6) 当且仅当$h_1 = \{0, 1\}$时,$E_N(h_1) = 1$;

7) $E_N(h_1) = E_N(h_1^c)$;

8) 当且仅当$\forall i = 1, 2, \cdots, l, \forall j = 1, 2, \cdots, l$,有$|h_1^{\delta(i)} - h_1^{\delta(j)}| \leqslant |h_2^{\delta(i)} - h_2^{\delta(j)}|$时,$E_N(h_1) \geqslant E_N(h_2)$.

## 2 概率犹豫模糊元的熵测度

为了测量概率犹豫模糊元的模糊性、犹豫性和整体不确定性,本文分别提出概率犹豫模糊元的模糊熵、犹豫熵和总熵的公理化定义和一系列熵测度公式.

### 2.1 概率犹豫模糊元的模糊熵

一个概率犹豫模糊元的模糊性是由其与概率犹豫模糊元$\{0.5|1\}$之间的差异程度所决定的,一般差异程度越小代表它的模糊性越大,反之模糊性越小.根据定义4中犹豫模糊元的模糊熵公理化定义,本文提出概率犹豫模糊元的模糊熵公理化定义和相关熵测度.

**定义5** 设任意3个概率犹豫模糊元$h(p)$、$h_1(p)$和$h_2(p)$. 其中:$h(p)=\{\gamma^\lambda|p^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l\}$,$h_1(p)=\{\gamma_1^\lambda|p_1^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_1\}$,$h_2(p)=\{\gamma_2^\lambda|p_2^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_2\}$. 一般称函数$E_{Fp}:H_p\to[0,1]$为概率犹豫模糊元的模糊熵,而且需要满足以下性质:

1) 当且仅当$h(p)=\{0|p,1|1-p\}$时,$E_{Fp}(h(p))=0$;

2) 当且仅当$h(p)=\{0.5|1\}$时,$E_{Fp}(h(p))=1$;

3) $\forall i=1,2,\cdots,l$,如果$\gamma_1^i\leqslant\gamma_2^i\leqslant 0.5$或$\gamma_1^i\geqslant\gamma_2^i\geqslant 0.5$且$p_1^i=p_2^i,l_1=l_2=l$,则$E_{Fp}(h_1(p))\leqslant E_{Fp}(h_2(p))$;

4)$E_{Fp}(h(p))=E_{Fp}(h^c(p))$.

**定义6** 对于任意一个概率犹豫模糊元$h(p)=\{\gamma^\lambda|p^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l\}$,称

$$E_{Fp}(h(p))=\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda E_F(\gamma^\lambda)\tag{3}$$

为$h(p)$的模糊熵,其中$E_F$满足定义4中犹豫模糊元模糊熵的性质.

**证明** 1) 当$E_{Fp}(h(p))=0$时,由于$p^\lambda\in[0,1]$和$E_F(\gamma^\lambda)\in[0,1]$,有$E_F(\gamma^\lambda)=0$,所以当且仅当$\gamma=1$或$\gamma=0$时,$h(p)=\{0|p,1|1-p\}$;当$h(p)=\{0|p,1|1-p\}$时,易得$E_{Fp}=0$. 综上,当且仅当$h(p)=\{0|p,1|1-p\}$时,$E_{Fp}=0$.

2) 当$E_{Fp}(h(p))=1$时,由于$p^\lambda\in[0,1]$和$\sum\limits_{\lambda=1}^{l}p^\lambda E_F(\gamma^\lambda)\in[0,1]$,有$E_F(\gamma^\lambda)=1$,由于当且仅当$\gamma=0.5$时,有$E_F(\gamma^\lambda)=1$,此时$h(p)=\{0.5|1\}$;当$h(p)=\{0.5|1\}$时,易得$E_{Fp}=1$. 综上,当且仅当$h(p)=\{0.5|1\}$时,$E_{Fp}=1$.

3) $\forall i=1,2,\cdots,l$,如果$\gamma_1^i\leqslant\gamma_2^i\leqslant 0.5$或$\gamma_1^i\geqslant\gamma_2^i\geqslant 0.5$,且$p_1^i=p_2^i$,易得$p_1^iE_F(\gamma_1^i)\leqslant p_2^iE_F(\gamma_2^i)$,所以$E_{Fp}(h_1(p))\leqslant E_{Fp}(h_2(p))$.

4) 由定义1中概率犹豫模糊元的补集和$E_F(\gamma)=E_F(1-\gamma)$可得

$$E_{Fp}(h^c(p))=\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda E_F(1-\gamma^\lambda)=\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda E_F(\gamma^\lambda)=E_{Fp}(h(p)).\quad\square$$

通过改变定义6中$E_F(\gamma^\lambda)$的表达式可以获得许多类型概率犹豫模糊元的模糊熵,如

$$E_{Fp1}(h(p))=-\frac{1}{\ln 2}\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda[\gamma^\lambda\ln(\gamma^\lambda)+(1-\gamma^\lambda)\ln(1-\gamma^\lambda)];\tag{4}$$

$$E_{Fp2}(h(p))=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}-1}\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda[\gamma^\lambda\mathrm{e}^{1-\gamma^\lambda}+(1-\gamma^\lambda)\mathrm{e}^{\gamma^\lambda}-1];\tag{5}$$

$$E_{Fp3}(h(p))=\frac{1}{(1-q)\ln 2}\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda\ln[(\gamma^\lambda)^q+(1-\gamma^\lambda)^q],\tag{6}$$

$$E_{Fp4}(h(p))=4^t\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda(\gamma^\lambda)^t(1-\gamma^\lambda)^t.\tag{7}$$

其中:$q>0,q\neq 1;0<t\leqslant 1$.

文献[28]认为一个新的熵可以由自变量是已知的熵的函数构成.基于该思想,本文提出一种具有广义形式的概率犹豫模糊元的模糊熵,相关表达式如下.

**定义7** 对于任意一个概率犹豫模糊元$h(p)=\{\gamma^\lambda|p^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l\}$,设$E_{Fpi}(h(p))(i=1,2,\cdots,n)$是$h(p)$的模糊熵,则称

$$\bar{E}_{Fp}(h(p))=\varPhi_{Fp}(E_{Fp1}(h(p)),E_{Fp2}(h(p)),\cdots,E_{Fpn}(h(p)))\tag{8}$$

为$h(p)$的模糊熵,其中函数$\varPhi_{Fp}(x_1,x_2,\cdots,x_n):[0,1]^n\to[0,1]$满足以下3个性质:

1) 当$x_i\in[0,1]$时,$\varPhi_{Fp}$关于$x_i$单调递增;

2) 仅当$x_i=1(i=1,2,\cdots,n)$时,函数值$\varPhi_{Fp}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$;

3) 仅当$x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$时,函数值$\varPhi_{Fp}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

关于$\bar{E}_{Fp}(h(p))$满足定义5的证明过程略.

关于$\varPhi_{Fp}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的表达式,本文给出一些简单的例子如下:

$$\varPhi_{Fp1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i,\tag{9}$$

$$\varPhi_{Fp2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\Big)\mathrm{e}^{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ix_i},\tag{10}$$

$$\varPhi_{Fp3}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1-\cos\Big(0.5\pi\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\Big),\tag{11}$$

其中$\alpha_i\in[0,1]$且$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$.

## 2.2 概率犹豫模糊元的犹豫熵

犹豫熵的本质是描述概率犹豫模糊元中所包含隶属度的离散程度.本文认为一个概率犹豫模糊元的犹豫性可以从两个方面考虑: 1) 当各个隶属度值保持不变时,它们对应的概率彼此越接近,代表隶属度分布越分散,犹豫性就越大; 2) 当各个隶属度对应的概率保持不变时,它们的隶属度彼此差值越大,代表隶属度之间的差异性越大,犹豫性就越大. 基于以上两点和定义4中犹豫模糊元的非明确熵公理化定义,本文提出概率犹豫模糊元的犹豫熵公理化定义和对应的熵测度,定义如下.

**定义8** 设任意3个概率犹豫模糊元$h(p)$、$h_1(p)$和$h_2(p)$. 其中: $h(p)=\{\gamma^\lambda|p^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_1\}$, $h_1(p)=\{\gamma_1^\lambda|p_1^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_1\}$, $h_2(p)=\{\gamma_2^\lambda|p_2^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_2\}$. 一般称函数$E_{Hp}: H_p\to[0,1]$为概率犹豫模糊元的犹豫熵,而且需要满足以下性质:

1) 当且仅当$h(p)=\{\gamma|1\}$时, $E_{Hp}(h(p))=0$;

2) 当且仅当$h(p)=\{0|0.5,1|0.5\}$时, $E_{Hp}(h(p))=1$;

3) $\forall i,j=1,2,\cdots,l, i\neq j$, 有$|\gamma_1^i-\gamma_1^j|\leqslant|\gamma_2^i-\gamma_2^j|$, 而且$l_1=l_2=l$, $p_1^i=p_2^i$, 则$E_{Hp}(h_1(p))\leqslant E_{Hp}(h_2(p))$;

4) $E_{Hp}(h(p))=E_{Hp}(h^c(p))$;

5) 随着$|\gamma^i-\gamma^j|\to 0$, 有$E_{Hp}(h(p))\to 0$;

6) 若$h(p)=\{\gamma^1|p^1,\gamma^2|p^2\}$, 则随着$|p^1-p^2|\to 1$, 有$E_{Hp}(h(p))\to 0$.

**定义9** 对于任意一个概率犹豫模糊元$h(p)$, 称

$$E_{Hp}(h(p))=\begin{cases}0,\ l=1;\\ \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l}4p^ip^jg(u^{ij}),\ l>1\end{cases}\tag{12}$$

为$h(p)$的犹豫熵. 其中: $u^{ij}=|\gamma^i-\gamma^j|$, 函数$g(x):[0,1]\to[0,1]$满足以下3个性质:

1) 当$x\in[0,1]$时, $g$关于$x$严格单调递增;

2) 仅当$x=1$时, 函数值$g(x)=1$;

3) 仅当$x=0$时, 函数值$g(x)=0$.

**证明** 1) 假设概率犹豫模糊元$h(p)$包含至少两个互不相等的隶属度, 当$E_{Hp}(h(p))=0$时, 由于$g(x)\in[0,1]$, $4p^ip^j\in[0,1]$, 所以存在以下3种情况:

1) $4p^ip^j=0$;

2) $g(u^{ij})=0$;

3) $\begin{cases}4p^ip^j=0,\\ g(u^{ij})=0.\end{cases}$

根据情况1)获得

$$p^i=0,\ p^j=1.$$

此时概率犹豫模糊元只包含一个隶属度, 与假设矛盾; 根据情况2)和$g(x)=0$, 仅当$x=0$可得$\gamma^i=\gamma^j$, 此时概率犹豫模糊元只包含一个隶属度, 与假设矛盾; 根据情况3)可直接获得概率犹豫模糊元只包含一个隶属度, 与假设矛盾, 因此$h(p)=\{\gamma|1\}$. 当$h(p)=\{\gamma|1\}$时, 易得$E_{Hp}(h(p))=0$. 综上可得, 当且仅当$h(p)=\{\gamma|1\}$时, $E_{Hp}(h(p))=0$.

2) 当$E_{Hp}(h(p))=1$时, 已知$g(u^{ij})\in[0,1]$和$4p^ip^j\in[0,1]$, 所以$g(u^{ij})=4p^ip^j=1$, 根据仅当$x=1$时, $g(x)=1$可得

$$p^i=p^j=0.5,\ \gamma^1=0,\ \gamma^2=1,$$

此时$h(p)=\{0|0.5,1|0.5\}$; 当$h(p)=\{0|0.5,1|0.5\}$时, 易得$E_{Hp}(h(p))=1$. 综上可得, 当且仅当$h(p)=\{0|0.5,1|0.5\}$时, $E_{Hp}(h(p))=1$.

3) 当$l_1=l_2=1$时

$$E_{Hp}(h_1(p))=E_{Hp}(h_2(p))=0;$$

当$l_1=l_2>1$且$p_1^i=p_2^i$时

$$E_{Hp}(h(p))=\sum_{i=1}^{l}\sum_{i=1}^{l}4p^ip^jg(u^{ij}).$$

由函数$g(x)$的性质可知, 当$x\in[0,1]$时, $g$关于$x$严格单调递增, 且$u_1^{ij}\leqslant u_2^{ij}$. 由此可得$0<g(u_1^{ij})<g(u_2^{ij})$, 因此

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l}4p_1^ip_1^jg(u_1^{ij})\leqslant\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l}4p_2^ip_2^jg(u_2^{ij})\Rightarrow$$
$$E_{Hp}(h_1(p))\leqslant E_{Hp}(h_2(p)).$$

4) 由定义1中$h(p)$的补集$h^c(p)$可得

$$\begin{aligned}&E_{Hp}(h^c(p))=\\&\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l}4p^ip^jg(|\gamma^i-\gamma^j|)=\\&\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l}4p^ip^jg(|1-\gamma^i-1+\gamma^j|)=\\&E_{Hp}(h(p)).\end{aligned}$$

5) 由于$g$是严格单调递增函数, 且仅当$x=1$时, 函数值$g(x)=1$; 仅当$x=0$时, 函数值$g(x)=0$. 因此, 当$u^{ij}$逐渐递减至0时, $g$也逐渐递减至0, 此时$E_{Hp}(h(p))$也逐渐接近于0.

6) 若$h(p)=\{\gamma^1|p^1,\gamma^2|p^2\}$, 当$|p^1-p^2|\to 1$时, $p^1\to 1$, $p^2\to 0$, 则此时$E_{Hp}(h(p))$也逐渐接近于0. □

通过改变$g(x)$的表达式可以获得许多类型概率犹豫模糊元的犹豫熵, 如

$$E_{Hp1}(h(p))=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l}4p_1^ip_1^j(u^{ij})^r,\ r>0;\tag{13}$$

$$E_{Hp2}(h(p)) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l} 4p_1^i p_1^j \sin(0.5u^{ij}\pi); \tag{14}$$

$$E_{Hp3}(h(p)) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l} 4p_1^i p_1^j (1-\cos(0.5u^{ij}\pi)); \tag{15}$$

$$E_{Hp4}(h(p)) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l} 4p_1^i p_1^j \Big(\frac{2u^{ij}}{u^{ij}+1}\Big). \tag{16}$$

本文基于文献[28]的思想,提出具有广义形式的概率犹豫模糊元的犹豫熵,定义如下.

**定义10**　对于任意一个概率犹豫模糊元$h(p) = \{\gamma^\lambda|p^\lambda|\lambda = 1,2,\cdots,l\}$,设$E_{Hpi}(h(p))(i = 1,2,\cdots,n)$是$h(p)$的犹豫熵,则称

$$\bar{E}_{Hp}(h(p)) = \Phi_{Hp}(E_{Hp1}(h(p)), E_{Hp2}(h(p)),\cdots,E_{Hpn}(h(p))) \tag{17}$$

为$h(p)$的犹豫熵. 其中函数$\Phi_{Hp}(x_1,x_2,\cdots,x_n) : [0,1]^n \to [0,1]$满足以下3个性质:

1) 当$x_i \in [0,1]$时,$\Phi_{Hp}$关于$x_i$单调递增;

2) 仅当$x_i = 1(i = 1,2,\cdots,n)$时,函数值$\Phi_{Hp}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 1$;

3) 仅当$x_i = 0(i = 1,2,\cdots,n)$时,函数值$\Phi_{Hp}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0$.

关于$\bar{E}_{Hp}(h(p))$满足定义8的证明过程略.

关于$\Phi_{Hp}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的表达式,本文给出一些简单的例子如下:

$$\Phi_{Hp1}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i; \tag{18}$$

$$\Phi_{Hp2}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\Big)\mathrm{e}^{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i x_i}; \tag{19}$$

$$\Phi_{Hp3}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 1-\cos\Big(0.5\pi\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\Big). \tag{20}$$

其中:$\beta_i \in [0,1]$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i = 1$.

### 2.3　概率犹豫模糊元的总熵

由2.1节和2.2节可知,模糊熵和犹豫熵仅代表了概率犹豫模糊元的模糊性和犹豫性. 为了全面地考虑概率犹豫模糊元信息的不确定性,本文根据定义5、定义6、定义8和定义9提出概率犹豫模糊元的总熵以及对应公理化定义.

**定义11**　设任意3个概率犹豫模糊元$h(p)$、$h_1(p)$和$h_2(p)$. 其中: $h(p) = \{\gamma^\lambda|p^\lambda|\lambda = 1,2,\cdots,l\}$, $h_1(p) = \{\gamma_1^\lambda|p_1^\lambda|\lambda = 1,2,\cdots,l_1\}$, $h_2(p) = \{\gamma_2^\lambda|p_2^\lambda|\lambda = 1,2,\cdots,l_2\}$,函数$\bar{E}_{Fp}$为概率犹豫模糊元的模糊熵,函数$\bar{E}_{Hp}$为概率犹豫模糊元的犹豫熵. 一般称函数$E_{Tp} : H_p \to [0,1]$为概率犹豫模糊元的总熵,而且需要满足以下性质:

1) 当且仅当$h(p) = \{0|1\}$或者$h(p) = \{1|1\}$时,有$E_{Tp}(h(p)) = 0$;

2) 当且仅当$h(p) = \{0|0.5, 1|0.5\}$或者$h(p) = \{0.5|1\}$时,有$E_{Tp}(h(p)) = 1$;

3) 若$\bar{E}_{Fp}(h_1(p)) \leqslant \bar{E}_{Fp}(h_2(p)), \bar{E}_{Hp}(h_1(p)) \leqslant \bar{E}_{Hp}(h_2(p))$,则$E_{Tp}(h_1(p)) \leqslant E_{Tp}(h_2(p))$;

4) $E_{Tp}(h(p)) = E_{Tp}(h^c(p))$.

**定义12**　对于任意一个概率犹豫模糊元$h(p)$, $\bar{E}_{Fp}(h(p))$为$h(p)$的模糊熵,$\bar{E}_{Hp}(h(p))$为$h(p)$的犹豫熵,称

$$E_{Tp}(h(p)) = z(\bar{E}_{Fp}(h(p)),\ \bar{E}_{Hp}(h(p))) \tag{21}$$

为概率犹豫模糊元的总熵. 同时,函数$z(x,y) : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$满足以下4个性质:

1) 当且仅当$x = 0$和$y = 0$时,$z(x,y) = 0$;

2) $z(0,1) = z(1,0) = 1$;

3) $z(x,y) = z(y,x)$;

4) 当$y$不变时,函数$z(x,y)$随$x$的递增而递增,当$x$不变时,函数$z(x,y)$随$y$的递增而递增.

**证明**　1) 当$E_{Tp}(h(p)) = 0$时,由函数的性质可得,当且仅当$x = 0$和$y = 0$时,$z(x,y) = 0$,所以$\bar{E}_{Fp}(h(p)) = \bar{E}_{Hp}(h(p)) = 0$,因此$h(p) = \{0|1\}$或者$h(p) = \{1|1\}$;当$h(p) = \{0|1\}$或者$h(p) = \{1|1\}$时,易得$E_{Tp}(h(p)) = 0$.

2) 首先由定义5和定义8容易得到,当$\bar{E}_{Fp}(h(p))$逐渐接近于1时,$\bar{E}_{Hp}(h(p))$也逐渐接近于0. 特别地,当$\bar{E}_{Fp}(h(p)) = 1$时,恒有$\bar{E}_{Hp}(h(p)) = 0$. 同理,当$\bar{E}_{Hp}(h(p))$逐渐接近于1时,$\bar{E}_{Fp}(h(p))$也逐渐接近于0. 特别地,当$\bar{E}_{Hp}(h(p)) = 1$时,恒有$\bar{E}_{Fp}(h(p)) = 0$. 因此,$z(x^*,1) = z(1,y^*)(x^* \neq 0, y^* \neq 0)$没有实际意义. 由函数的性质可知$z(0,1) = z(1,0) = 1$,此时可得$\bar{E}_{Fp}(h(p)) = 0, \bar{E}_{Hp}(h(p)) = 1$,或者$\bar{E}_{Fp}(h(p)) = 1, \bar{E}_{Hp}(h(p)) = 0$. 因此,$E_{Tp}(h(p)) = 1$. 当$E_{Tp}(h(p)) = 1$时,容易计算得到$E_{Tp}(h(p)) = 1$.

3) 若$\bar{E}_{Fp}(h_1(p)) \leqslant \bar{E}_{Fp}(h_2(p)), \bar{E}_{Hp}(h_1(p)) \leqslant \bar{E}_{Hp}(h_2(p))$,则由函数性质可知,当$y$不变时,函数$z(x,y)$随$x$的递增而递增;当$x$不变时,函数$z(x,y)$随$y$的递增而递增. 因此,$E_{Tp}(h_1(p)) \leqslant E_{Tp}(h_2(p))$.

4) 根据定义5和定义8很容易得到$E_{Tp}(h(p)) = E_{Tp}(h^c(p))$. □

通过改变定义12中函数$z$的表达形式,可以获得许多类型概率犹豫模糊元的总熵如下:

$$E_{Tp1}(h(p))=\max(\bar{E}_{Fp}(h(p)),\bar{E}_{Hp}(h(p))); \tag{22}$$

$$E_{Tp2}(h(p))=\min(\bar{E}_{Fp}(h(p))+\bar{E}_{Hp}(h(p)),1); \tag{23}$$

$$E_{Tp3}(h(p))=\bar{E}_{Fp}(h(p))+\bar{E}_{Hp}(h(p))-\bar{E}_{Fp}(h(p))\times\bar{E}_{Hp}(h(p)). \tag{24}$$

由已知的概率犹豫模糊元的总熵可以得到具有广义形式的新概率犹豫模糊元的总熵,相关定义如下.

**定义13** 对于任意一个概率犹豫模糊元$h(p)=\{\gamma^\lambda|p^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l\}$,设$E_{Tpi}(h(p))(i=1,2,\cdots,n)$是$h(p)$的犹豫熵,则称

$$\bar{E}_{Tp}(h(p))=\varPhi_{Tp}(E_{Tp1}(h(p)),E_{Tp2}(h(p)),\cdots,E_{Tpn}(h(p))) \tag{25}$$

为$h(p)$的总熵. 其中函数$\varPhi_{Tp}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ :\ [0,1]^n\rightarrow[0,1]$满足以下3个性质:

1) 当$x_i\in[0,1]$时,$\varPhi_{Tp}$关于$x_i$单调递增;

2) 仅当$x_i=1(i=1,2,\cdots,n)$时,函数值$\varPhi_{Tp}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$;

3) 仅当$x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$时,函数值$\varPhi_{Tp}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

关于$\bar{E}_{Tp}(h(p))$满足定义13的证明过程略.

关于$\varPhi_{Tp}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的表达式本文给出一些简单的例子如下:

$$\varPhi_{Tp1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i x_i; \tag{26}$$

$$\varPhi_{Tp2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i x_i\Big)\mathrm{e}^{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i x_i}; \tag{27}$$

$$\varPhi_{Tp3}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1-\cos\Big(0.5\pi\sum_{i=1}^{n}\varphi_i x_i\Big). \tag{28}$$

其中:$\varphi_i\in[0,1]$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i=1$.

## 3 基于概率犹豫模糊熵的多属性决策模型

利用上述概率犹豫模糊元的模糊熵、犹豫熵和总熵的公理化定义和测度公式,建立基于3种概率犹豫模糊熵的多属性决策模型.

对于某一概率犹豫模糊多属性决策问题,设方案集$X=\{x_i|i=1,2,\cdots,m\}$,属性集$A=\{a_j|j=1,2,\cdots,n\}$和属性权重集$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$,其中方案集和属性集已知,而属性权重集完全未知,则决策步骤如下.

Step 1: 根据获得的评价结果和式(2),计算每一个概率犹豫模糊集中隶属度的总概率. 由于多属性决策问题中属性存在两种类型,即利益型和成本型,前者的属性值越大越好,而后者的属性值越小越好. 两种属性值无法进行数学运算,因此需要按照以下规则进行处理:

1) 对于利益型属性,其属性值保持不变;

2) 对于成本型属性,需要将其转化为利益型属性,$h_{ij}(p)\Rightarrow h^*_{ij}(p)=\{1-\gamma^\lambda|p^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_{ij}\}$,最终获得决策矩阵$M=(h_{ij}(p))_{m\times n}$.

Step 2: 首先根据式(8)和(17)计算概率犹豫模糊元$h_{ij}(p)$的模糊熵$\bar{E}_{Fp}(h_{ij}(p))$和犹豫熵$\bar{E}_{Hp}(h_{ij}(p))$;然后根据式(25)确定概率犹豫模糊元$h_{ij}(p)$的总熵$\bar{E}_{Tp}(h_{ij}(p))$;最后计算属性$a_j$的熵值,计算公式为

$$\bar{E}_p(a_j)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{E}_{Tp}(h_{ij}(p)). \tag{29}$$

Step 3: 由信息熵理论可知,熵值越小,相应的评价指标越重要;反之,熵值越大,该评价指标越不重要. 因此,属性$a_j$权重的计算公式如下:

$$w_j=\frac{1-\bar{E}_p(a_j)}{n-\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{E}_p(a_j)}. \tag{30}$$

Step 4: 根据属性权重集$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n\}$和式(1)分别计算方案$x_i(i=1,2,\cdots,m)$与正理想概率犹豫模糊集$x^+=\{\tilde{1}_i(p)|i=1,2,\cdots,m\}$、负理想概率犹豫模糊集$x^-=\{\tilde{0}_i(p)|i=1,2,\cdots,m\}$的加权正理想距离$D^+_{pi}$和加权负理想距离$D^-_{pi}$,其相关计算公式分别是

$$D^+_{pi}=\sum_{j=1}^{n}w_j d_p(h_{ij}(p),\tilde{1}_j(p)), \tag{31}$$

$$D^-_{pi}=\sum_{j=1}^{n}w_j d_p(h_{ij}(p),\tilde{0}_j(p)). \tag{32}$$

其中:$\tilde{1}_j(p)=\{1|p^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_{ij}\}$和$\tilde{0}_j(p)=\{0|p^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_{ij}\}$的元素个数会随着每一个概率犹豫模糊元$h_{ij}(p)$中元素的个数而定,而且概率$p^\lambda(\lambda=1,2,\cdots,l_{ij})$与概率犹豫模糊元$h_{ij}(p)$中隶属度的概率相等.

Step 5: 结合Liao等[29]提出的一种考虑决策者偏好的满意度公式和TOPSIS方法,本文提出以下满意度计算公式:

$$\mathrm{CI}_{pi}=\frac{(1-\theta)D_{pi}^{-}}{(1-\theta)D_{pi}^{-}+\theta D_{pi}^{+}}.\tag{33}$$

其中参数$\theta(\theta\in[0,1])$代表了决策者的风险偏好系数,若$\theta<0.5$,则代表决策者属于风险规避型;若$\theta>0.5$,则代表决策者属于风险接受型. 一般满意度$\mathrm{CI}_{pi}$越大代表$x_i$越好.

## 4　算例分析

为了便于与已有的方法进行比较,本文选取了Xu等[17]和Li等[19]采用的案例.

### 4.1　算　例

2015年6月,4名候选者$x_i(i=1,2,\cdots,4)$提出了博士入学申请,而名额只有1个. 4位专家$d_i(i=1,2,\cdots,4)$应邀对4位候选者进行博士生入学面试,其中每位专家的权重都相同. 现通过计算能力$a_1$、学术能力$a_2$和英语能力$a_3$三个属性对4位候选者进行评估,且这3个属性是属于利益型,其评估结果用概率犹豫模糊集的形式表示. 表1～表3分别表示4位专家对这3种属性的评估结果.

表1　属性$a_1$的评价结果

| $a_1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | $\{0.8\|1\}$ | $\{0.4\|1\}$ | $\{0.3\|0.4, 0.5\|0.4, 0.6\|0.2\}$ | $\{0.15\|0.4, 0.37\|0.6\}$ |
| $d_2$ | $\{0.55\|0.6, 0.76\|0.4\}$ | $\{0.95\|1\}$ | $\{0.68\|1\}$ | $\{0.6\|1\}$ |
| $d_3$ | $\{0.65\|1\}$ | $\{0.69\|1\}$ | $\{0.5\|1\}$ | $\{0.4\|1\}$ |
| $d_4$ | $\{0.8\|1\}$ | $\{0.58\|1\}$ | $\{0.6\|1\}$ | $\{0.73\|1\}$ |

表2　属性$a_2$的评价结果

| $a_2$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | $\{0.75\|1\}$ | $\{0.6\|0.3, 0.7\|0.4, 0.8\|0.3\}$ | $\{0.85\|1\}$ | $\{0.48\|1\}$ |
| $d_2$ | $\{0.65\|1\}$ | $\{0.35\|1\}$ | $\{0.55\|0.5, 0.66\|0.5\}$ | $\{0.48\|0.6, 0.62\|0.4\}$ |
| $d_3$ | $\{0.3\|1\}$ | $\{0.7\|1\}$ | $\{0.45\|1\}$ | $\{0.55\|1\}$ |
| $d_4$ | $\{0.2\|0.2, 0.3\|0.3, 0.4\|0.5\}$ | $\{0.65\|1\}$ | $\{0.56\|1\}$ | $\{0.66\|1\}$ |

表3　属性$a_3$的评价结果

| $a_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | $\{0.8\|0.6, 0.94\|0.4\}$ | $\{0.65\|1\}$ | $\{0.45\|1\}$ | $\{0.38\|1\}$ |
| $d_2$ | $\{0.55\|1\}$ | $\{0.45\|0.5, 0.65\|0.5\}$ | $\{0.55\|1\}$ | $\{0.75\|1\}$ |
| $d_3$ | $\{0.55\|1\}$ | $\{0.45\|1\}$ | $\{0.68\|1\}$ | $\{0.5\|0.5, 0.7\|0.5\}$ |
| $d_4$ | $\{0.75\|1\}$ | $\{0.7\|1\}$ | $\{0.75\|1\}$ | $\{0.85\|1\}$ |

根据式(2)分别计算概率犹豫模糊集中每一个隶属度的总概率值. 由于3种属性均为利益型,形成了概率犹豫模糊决策矩阵$M=(h_{ij}(p))_{4\times3}$如下:

$$M=$$

$$\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array}\begin{array}{c}a_1\\ \left[\begin{array}{c}\{0.55|0.15, 0.65|0.25, 0.76|0.1, 0.8|0.5\}\\ \{0.4|0.25, 0.58|0.25, 0.69|0.25, 0.95|0.25\}\\ \{0.3|0.1, 0.5|0.35, 0.6|0.3, 0.68|0.25\}\\ \{0.15|0.1, 0.37|0.15, 0.4|0.25, 0.6|0.25, 0.73|0.25\}\end{array}\right.\end{array}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{array}{c}a_2\\ \{0.2|0.05, 0.3|0.325, 0.4|0.125, 0.65|0.25, 0.75|0.25\}\\ \{0.35|0.25, 0.6|0.075, 0.65|0.25, 0.7|0.35, 0.8|0.075\}\\ \{0.45|0.25, 0.55|0.125, 0.56|0.25, 0.66|0.125, 0.85|0.25\}\\ \{0.48|0.4, 0.55|0.25, 0.62|0.1, 0.66|0.25\}\end{array}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{array}{c}a_3\\ \left.\begin{array}{c}\{0.55|0.5, 0.75|0.25, 0.8|0.15, 0.94|0.1\}\\ \{0.25|0.25, 0.45|0.375, 0.65|0.375\}\\ \{0.45|0.25, 0.55|0.25, 0.68|0.25, 0.75|0.25\}\\ \{0.38|0.25, 0.5|0.125, 0.7|0.125, 0.75|0.25, 0.85|0.25\}\end{array}\right]\end{array}.$$

由于概率犹豫模糊总熵的测度公式可以有多种选择. 本文首先选取$\varPhi_{Fp1}(E_{Fp1},E_{Fp2},E_{Fp3},E_{Fp4})$作为每一个概率犹豫模糊元模糊熵的计算公式,其中取$q=0.5,t=1$和$\alpha_i=0.25(i=1,2,3,4)$;然后选取$\varPhi_{Hp1}(E_{Hp1},E_{Hp2},E_{Hp3},E_{Hp4})$作为每一个概率犹豫模糊元犹豫熵的计算公式,其中取$r=1$和$\beta_i=0.25(i=1,2,3,4)$;最后选取$\varPhi_{Tp1}(E_{Tp1},E_{Tp2},E_{Tp3})$作为每一个概率犹豫模糊元总熵的计算公式,其中取$\varphi_i=1/3(i=1,2,3)$,计算结果如表4所示.

结合式(29)和(30)计算得到的属性权重集为

$$w=(0.390\,6, 0.259\,2, 0.350\,2)^{\mathrm{T}}.$$

本文取$\theta=0.5$,根据式(1)、(31)～(33)计算$x_i(i=1,2,\cdots,4)$的加权正理想距离$D_{pi}^{+}$、加权负理想距离$D_{pi}^{-}$和满意度$\mathrm{CI}_{pi}$,结果如表5所示.

根据表5中的满意度,可以得到适宜的排序为

$$x_1\succ x_3\succ x_2\succ x_4.$$

最终认为候选者$x_1$最好,可作为最佳的博士生人选.

表 4 决策矩阵 $M$ 的熵值矩阵

| | | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{E}_{Hp}$ | $x_1$ | 0.8181 | 0.8759 | 0.8384 |
| | $x_2$ | 0.7844 | 0.8987 | 0.9225 |
| | $x_3$ | 0.9536 | 0.8858 | 0.9226 |
| | $x_4$ | 0.8964 | 0.9736 | 0.8260 |
| $\bar{E}_{Fp}$ | $x_1$ | 0.2195 | 0.4804 | 0.3191 |
| | $x_2$ | 0.4829 | 0.3403 | 0.3730 |
| | $x_3$ | 0.2573 | 0.3548 | 0.2868 |
| | $x_4$ | 0.4394 | 0.1805 | 0.4429 |
| $\bar{E}_{Tp}$ | $x_1$ | 0.8920 | 0.9371 | 0.9095 |
| | $x_2$ | 0.8910 | 0.9440 | 0.9580 |
| | $x_3$ | 0.9730 | 0.9374 | 0.9558 |
| | $x_4$ | 0.9461 | 0.9840 | 0.9097 |

表 5 满意度

| | $D_{pi}^-$ | $D_{pi}^+$ | $\mathrm{CI}_{pi}$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.6501 | 0.3499 | 0.6501 |
| $x_2$ | 0.5777 | 0.4223 | 0.5777 |
| $x_3$ | 0.5892 | 0.4108 | 0.5892 |
| $x_4$ | 0.5666 | 0.4334 | 0.5666 |

### 4.2 敏感性分析

在式(33)中,风险偏好系数$\theta$的取值可能会影响最终的排序结果,因此通过对$\theta$取不同的数值进行敏感性分析.将风险偏好系数$\theta$从区间[0,1]范围内以步长为0.1取值,分析候选人评价结果的排序情况. 计算结果如图1所示.

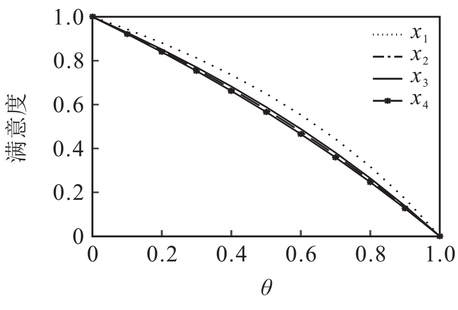


图 1 满意度随$\theta$值的变化曲线

由图1的结果可见,随着风险偏好系数$\theta$的改变,排序结果始终是$x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$,与上文的决策结果是一致的. 由此可见,排序结果对风险偏好系数$\theta$的变动不敏感.当$\theta$越大,满意度越小,且$\theta$越接近于0.6时,满意度的区分情况越来越好. 特别当$\theta = 0.6$时,满意度值的区分情况最好.

此外,本文模型采用熵权法所得到的属性权重,虽然较为客观,但是需要决策者提前选定合适的熵测度公式. 当这些公式发生改变后,属性的权重会发生改变,为了确定决策结果是否会发生改变,下面将选取不同的熵测度并结合本文模型进行决策分析,对得到的决策结果进行对比分析.

**情况 1** 选取$\varPhi_{Fp2}(E_{Fp1}, E_{Fp2}, E_{Fp3}, E_{Fp4})$作为每一个概率犹豫模糊元模糊熵的计算公式,其中取$q = 0.5, t = 1$和$\alpha_i = 0.25 (i = 1, 2, \cdots, 4)$;然后选取$\varPhi_{Hp2}(E_{Hp1}, E_{Hp2}, E_{Hp3}, E_{Hp4})$作为每一个概率犹豫模糊元犹豫熵的计算公式,其中取$r = 1$和$\beta_i = 0.25 (i = 1, 2, \cdots, 4)$;最后选取$\varPhi_{Tp2}(E_{Tp1}, E_{Tp2}, E_{Tp3})$作为每一个概率犹豫模糊元总熵的计算公式,其中取$\varphi_i = 1/3 (i = 1, 2, 3)$,并结合第3节的Step2$\sim$Step5进行决策分析.

**情况 2** 选取$\varPhi_{Fp3}(E_{Fp1}, E_{Fp2}, E_{Fp3}, E_{Fp4})$作为每一个概率犹豫模糊元模糊熵的计算公式,其中取$q = 0.5, t = 1$和$\alpha_i = 0.25 (i = 1, 2, \cdots, 4)$;然后选取$\varPhi_{Hp3}(E_{Hp1}, E_{Hp2}, E_{Hp3}, E_{Hp4})$作为每一个概率犹豫模糊元犹豫熵的计算公式,其中取$r = 1$和$\beta_i = 0.25 (i = 1, 2, \cdots, 4)$;最后选取$\varPhi_{Tp3}(E_{Tp1}, E_{Tp2}, E_{Tp3})$作为每一个概率犹豫模糊元总熵的计算公式,其中取$\varphi_i = 1/3 (i = 1, 2, 3)$,并结合第3节的Step 2$\sim$Step 5进行决策分析.

情况1的属性权重集是$w^{(1)} = (0.6298, 0.0803, 0.2899)^{\mathrm{T}}$,情况2的属性权重集是$w^{(2)} = (0.4034, 0.2435, 0.3531)^{\mathrm{T}}$.

两种情况下的决策结果如图2和图3所示.

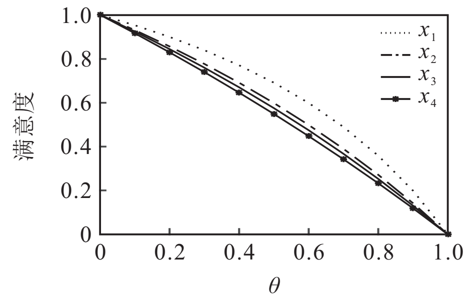


图 2 情况1下满意度随$\theta$值的变化曲线

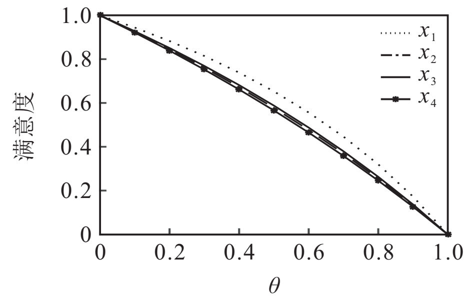


图 3 情况2下满意度随$\theta$值的变化曲线

从图2和图3可以看出,随着参数$\theta$取值发生变化,情况1和情况2的排序结果始终没有发生改变,因此两种情况下的排序结果对参数$\theta$的变动都不敏感.

但是,情况1的排序结果始终是$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$,而情况2的排序结果始终是$x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$,二者在$x_2$和$x_3$之间的排序存在差异.主要原因如下:两种情况下选取了不同的熵测度公式,得到的属性权重互不相同,使得决策结果存在差异,因此决策者根据自身偏好采用不同的熵测度公式时,利用本文模型得到的决策结果可能会发生变化.

### 4.3 比较分析

为了说明本文模型的有效性,运用文献[17]和文献[19]的方法对评价结果进行比较分析.文献[17]和文献[19]假设属性的权重集为$w^* = (0.2, 0.5, 0.3)^{\mathrm{T}}$.

1) 文献[17]提出了3种考虑决策者风险偏好的概率犹豫模糊集结算子:代表决策者风险态度属于风险接受的概率犹豫模糊最大有序加权平均($\mathrm{HPFO^aWA}$)算子,代表决策者风险态度属于风险规避的概率犹豫模糊最小有序加权平均($\mathrm{HPFO^iWA}$)算子,代表决策者风险态度属于风险中立的概率犹豫模糊有序加权平均(HPFOWA)算子.将以上3种算子的计算结果与本文的计算结果进行比较,其结果如表6所示.

**表6 4种方法的结果比较**

| 方法 | 排序结果 |
|---|---|
| $\mathrm{HPFO^aWA}$ | $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$ |
| $\mathrm{HPFO^iWA}$ | $x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$ |
| HPFOWA | $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ |
| 本文模型 | $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ |

由表6的结果可知:虽然本文模型得到的结果与文献[17]中的结果存在部分差异,但在本文模型中决策者可根据自身偏好选择合适的熵测度和风险偏好系数进行决策分析,与文献[17]仅考虑决策者的3种风险偏好相比具有较大的灵活性.此外,采用文献[17]的方法进行计算时,步骤复杂且耗时过多,而本文模型的计算过程简单且易于理解.

2) 文献[19]基于概率犹豫模糊集的可能度公式提出了两种方法:概率犹豫模糊QUALIFLEX法和概率犹豫模糊PROMETHEE II法.将以上两种方法的计算结果与本文的计算结果进行比较,其结果如表7所示.

**表7 3种方法的结果比较**

| 方法 | 排序结果 |
|---|---|
| QUALIFLEX | $x_3 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_2$ |
| PROMETHEE II | $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$ |
| 本文模型 | $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ |

由表7的结果可知:文献[19]中的两种方法得到的最佳候选人是$x_3$,而本文模型得到的最佳候选人是$x_1$,二者互不同.主要原因在于文献[19]没有考虑决策者的心理偏好,而本文模型充分考虑了决策者的心理偏好,更加符合决策者的实际经历,因此能够产生更有说服力的结果.此外,本文模型采取熵权法能够客观地确定属性的权重,与文献[17]、文献[19]相比减少了决策者的主观随意性.

## 5 结 论

本文将犹豫模糊熵拓展到概率犹豫模糊集的环境下,指出了概率犹豫模糊元的不确定性包括模糊性、犹豫性和似然性,提出了能够测量概率犹豫模糊元模糊性和犹豫性的模糊熵和犹豫熵,并结合犹豫熵和模糊熵提出了能够全面测量概率犹豫模糊元不确定性的总熵.针对属性权重完全未知的概率犹豫模糊多属性决策问题,本文应用这3种概率犹豫模糊熵建立了决策模型,研究结果表明了该决策模型的有效性.在后续的研究中将关注概率犹豫模糊集的交叉熵,另外,还可考虑将本文模型拓展到概率对偶犹豫模糊环境下,使决策信息更加完善.

### 参考文献(References)


[1] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. The 18th IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Jeju Island: IEEE, 2009: 1378-1382.

[2] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[3] Xu Z S, Xia M M. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information[J]. Int J of Intelligent Systems, 2011, 26(5): 410-425.

[4] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[5] Xu Z S, Zhang X L. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(5): 53-64.

[6] Wei G W. Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 31(1): 176-182.

[7] Chen N, Xu Z S. Hesitant fuzzy ELECTRE II approach: A new way to handle multi-criteria decision making problems[J]. Information Sciences, 2015, 292(20): 175-197.

[8] Zhang X L, Xu Z S. Hesitant fuzzy QUALIFLEX approach with a signed distance-based comparison method for multiple criteria decision analysis[J]. Expert

Systems with Applications, 2015, 42(2): 873-884.

[9] Wang W, Liu X. Some hesitant fuzzy geometric operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2014, 20(3): 371-390.

[10] 刘小弟, 朱建军, 张世涛, 等. 考虑属性权重优化的犹豫模糊多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(2): 297-302.
(Liu X D, Zhu J J, Zhang S T, et al. Hesitant fuzzy multiple attribute decision making method based on optimization of attribute weights[J]. Control and Decision, 2016, 31(2): 297-302.)

[11] 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊TOPSIS多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(5): 864-870.
(Wang Y M, Que C P, Lan Y X. Hesitant fuzzy TOPSIS multi-attribute decision method based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2017, 32(5): 864-870.)

[12] Lin R, Zhao X F, Wei G W. Models for selecting an ERP system with hesitant fuzzy linguistic information[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(5): 2155-2165.

[13] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37(2): 528-540.

[14] Zhu B, Xu Z S, Xia M M. Dual hesitant fuzzy sets[J]. J of Applied Mathematics, 2012, 26(5): 410-425.

[15] Qian G, Wang H, Feng X Q. Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37(4): 357-365.

[16] Wei G W, Wang H J, Zhao X F, et al. Hesitant triangular fuzzy information aggregation in multiple attribute decision making[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(3): 1201-1209.

[17] Xu Z S, Zhou W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2017, 16(4): 481-503.

[18] Gao J, Xu Z S, Liao H C. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017(4): 1-18.

[19] Li J, Wang J Q. Multi-criteria outranking methods with hesitant probabilistic fuzzy sets[J]. Cognitive Computation, 2017(6): 1-15.

[20] Zhou W, Xu Z S. Expected hesitant VaR for tail decision making under probabilistic hesitant fuzzy environment[J]. Applied Soft Computing, 2017, 60: 297-311.

[21] Hao Z N, Xu Z S, Zhao H ed. Probabilistic dual hesitant fuzzy set and its application in risk evaluation[J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 127: 16-28.

[22] Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multi-attribute decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822.

[23] Farhadinia B. Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. Information Science, 2013, 240(10): 129-144.

[24] Wei C P, Yan F F, Rosa M. R. Entropy measures for hesitant fuzzy sets and their application in multi criteria decision making[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2016, 31(1): 673-685.

[25] Farhadinia B. A multiple criteria decision making model with entropy weight in an interval-transformed hesitant fuzzy environment[J]. Cognitive Computation, 2017, 9(4): 513-525.

[26] Hu J H, Zhang X L, Chen X H et al. Hesitant fuzzy information measures and their applications in multi-criteria decision making[J]. Int J of Systems Science, 2016, 47(1): 62-76.

[27] Zhao N, Xu Z S, Liu F. Uncertainty measures for hesitant fuzzy information[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 30(7): 818-836.

[28] Farhadinia B. Multiple criteria decision-making methods with completely unknown weights in hesitant fuzzy linguistic term setting[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 93: 135-144.

[29] Liao H C, Xu Z S. Satisfaction degree based interactive decision making method under hesitant fuzzy environment with incomplete weights[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2014, 22(4): 553-572.

(责任编辑：齐 霁)