

离散时变多智能体系统有限时间一致性迭代学习控制

曹伟[†], 孙明

(齐齐哈尔大学 计算机与控制工程学院, 黑龙江 齐齐哈尔 161006)

摘要: 针对一类离散时变多智能体系统, 通过引入虚拟领导者产生期望轨迹的方法, 将虚拟领导者和所有智能体组成固定的拓扑结构, 在此基础上, 提出一种离散时间迭代学习控制算法. 该算法对多智能体系统中的每个智能体都设计一个控制器, 各控制器都是利用上一次迭代时, 该智能体与虚拟领导者之间的跟踪误差和该智能体与相邻智能体之间的跟踪误差, 通过拓扑结构中通信权值的组合不断修正上一次的控制律, 从而获得理想控制律. 同时, 基于范数理论严格证明所提出算法的收敛性, 并给出算法在 λ -范数意义下的收敛条件. 该算法能够使离散时变多智能体的输出随着迭代次数的增加在有限时间区间内完全跟踪期望轨迹. 理论分析和仿真结果都表明了所提出算法的有效性.

关键词: 多智能体系统; 虚拟领导者; 迭代学习控制; 有限时间; 输出跟踪; 一致性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Finite-time consensus iterative learning control of discrete time-varying multi-agent systems

CAO Wei[†], SUN Ming

(College of Computer and Control Engineering, Qiqihar University, Qiqihar 161006, China)

Abstract: For a class of discrete time-varying multi-agent systems, a topology is made up of virtual leaders and all agents, and a kind of discrete time iterative learning control algorithm is proposed based on the topological structure by introducing a virtual leader to generate the expected trajectory. The algorithm uses the tracking error between each agent and the virtual leader and neighbor during the last iteration, to revise successively the last control law through the combination of the communication weights in the topological structure, and to get the ideal control law. And this paper proves the convergence of the proposed algorithm based on the norm theory, and gives the convergence condition in the sense of λ -norm. The algorithm can make the output of the discrete time-varying multi-agent completely track the desired trajectory in the finite time interval with the increase of the number of iterations. Both theoretical and simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: multi-agent systems; virtual leader; iterative learning control; finite-time; output tracking; consensus

0 引言

随着计算机技术、通信技术和网络技术的迅速发展, 在解决大型、复杂的现实问题时, 可以利用多智能体系统通过各个智能体之间的通讯、协调合作来替代比较昂贵的单个系统, 且工作效率和性能也远远高于单个系统^[1-2]. 近年来, 有关多智能体系统协同控制方面的研究已成为控制领域新兴的研究热点之一. 多智能体协调控制的研究范畴广泛, 如多智能体的群集^[3-4]、编队控制^[5-6]和一致性^[7-8]等. 在多智能

体系统的诸多研究问题中, 一致性问题是其最根本问题. 多智能体系统的一致性是指, 所有智能体要在某些给定的状态和输出上达到一致^[9]. 目前, 大多数有关多智能体系统的一致性方面的研究成果, 都是使各个智能体的状态或输出随时间增加逐渐趋于一致, 即解决的是多智能体系统的渐近一致性问题. 但像生产线上的多机械臂协同操作, 这类具有重复运行特性的多智能体系统, 一般都要求在有限时间区间内达到完全一致性^[10-12].

收稿日期: 2017-10-16; 修回日期: 2018-01-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61672304, 71803095); 齐齐哈尔市科学技术工业攻关项目(GYGG-201620); 黑龙江省教育厅基本业务专项理工面上项目(135109240).

责任编委: 王燕舞.

作者简介: 曹伟(1977—), 男, 副教授, 博士, 从事迭代学习控制等研究; 孙明(1979—), 男, 副教授, 博士, 从事神经网络与优化控制等研究.

[†]通讯作者. E-mail: yiyuqq168@163.com.

迭代学习控制是针对执行具有重复任务的被控系统,利用以往迭代运算获得的输入输出数据,通过不断修正上一次迭代时的控制输入来获得理想控制输入,从而实现系统输出随迭代次数的增加,在有限时间区间内对期望轨迹完全跟踪的目的.迭代学习控制器设计具有对模型信息要求低、结构简单等优点,因此,自从Arimoto等^[13]提出迭代学习控制算法以来,经过30多年的发展,在控制领域已取得了许多研究成果^[14-17].由于迭代学习控制具有上述优点,许多学者将其应用到多智能体系统中.如:文献[18]将迭代学习控制算法应用到模型不确定的线性多智能体系统中,实现了系统的稳定编队;文献[19]利用迭代学习控制方法解决了非线性多智能体系统在切换拓扑结构下的编队控制问题;文献[20]针对线性多智能体系统,提出了一种迭代学习型一致性算法,并给出了智能体在有向拓扑结构下达到完全一致的充分条件;文献[21]针对在固定拓扑结构下的线性多智能体系统,通过引入虚拟领导者技术,提出了一种分布式学习控制算法,解决了多智能体系统在有限时间区间内的一致性;文献[22]采用终端更新法则,提出了一种反馈迭代学习控制协议,并利用模型参考方法来改进反馈迭代学习协议,解决了多智能体系统在有限时间区间内的一致性;文献[23]从二维系统角度构建出一种迭代学习控制协议,通过适当选择学习增益,可使有向图中的所有智能体都能够利用迭代学习协议实现有限时间区间内的一致性.

分析上述文献可以发现,目前,利用迭代学习控制算法解决多智能体系统一致性问题的有关成果,大多是针对连续时间多智能体系统展开的研究.然而,连续形式的迭代学习控制算法需要通过采样控制技术实现.因此,从实现的角度来看,离散形式的迭代学习控制算法更为直接,并且方便应用.为了解决系统参数时变的多智能体在有限时间区间内的一致性问题,本文提出一种迭代学习控制算法.该算法的思想是:期望轨迹由引入的虚拟领导者产生,将包含虚拟领导者在内的所有智能体组成固定的拓扑结构,在此拓扑结构下,根据拓扑结构中的通信权值分别对每个智能体设计一个控制器,每个控制器都利用上一次迭代时的跟踪误差来修正上一次的控制输入,获得当前的控制输入.如此不断重复,最终获得理想控制输入,实现在有限时间区间内,各个智能体输出对给定期望轨迹完全跟踪的目的.同时,从理论上对所提出算法的收敛性进行证明,给出算法收敛的充分条件.最后通过仿真实例进一步验证所提出算法的有效性.

1 问题描述

考虑由 N 个同类离散时变智能体组成的多智能体系统,假设每个智能体均是完全非正则的,且在有限时间区间内具有重复运行特性.其中第 j 个智能体的动态方程为

$$\begin{cases} x_{j,k}(t+1) = A(t)x_{j,k}(t) + B(t)u_{j,k}(t), \\ y_{j,k}(t) = C(t)x_{j,k}(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:下标 $j(j = 1, 2, \dots, N)$ 表示第 j 个智能体, k 为迭代学习次数; $t \in [0, T]$ 表示重复运行的有限时间; $x_{j,k}(t) \in R^n$, $u_{j,k}(t) \in R^r$, $y_{j,k}(t) \in R^m$ 分别为智能体 j 的状态向量、控制向量和输出向量; $A(t) \in R^{n \times n}$, $B(t) \in R^{n \times r}$, $C(t) \in R^{m \times n}$ 为系统的时变参数矩阵.

假设1 多智能体系统每次运行的初始状态相同,即对于所有的 k 满足 $x_{j,k}(0) = x_0$,其中 x_0 是使跟踪误差 $e_{j,k}(0) = 0$ 的固定值($e_{j,k}(0)$ 的定义见下面).

假设2 多智能体系统动态特性是可逆的,确保存在唯一的理想控制 $u_d(t)$ 使得系统的状态和输出为期望值.

本文假设期望轨迹 $y_d(t)$ 是由一个引入的虚拟领导者产生,由于多智能体系统是分布式结构,有的智能体能直接获得期望轨迹信息,有的智能体则不能直接获取期望轨迹信息.至于哪个智能体能直接获得期望轨迹信息,取决于多智能体间的通信拓扑结构.因此,为后续的分析需要,先介绍相关的图论知识.

本文考虑一个引入的虚拟领导者和 N 个智能体,利用无向带权图 $\zeta = (v, \varepsilon, A)$ 来描述 N 个智能体间通信拓扑结构.其中: $v = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 表示图的节点, v 中每个节点代表一个智能体; $\varepsilon \subseteq v \times v$ 为边界; A 为邻接矩阵.节点 i 与 j 之间构成的边界为 $(i, j) \in \varepsilon$,节点 i 与 j 的联系用带权邻接矩阵 A 表示,其对角线元素 $a_{i,j} = 0$.如果节点 i 与 j 之间有联系,则 $a_{i,j} = a_{j,i} > 0$;否则, $a_{i,j} = 0$.其中: $j \in N_i$, $N_i = \{j\}$ 为节点 i 的邻居节点集合.图 ζ 的Laplacian矩阵定义为 $L = D - A$,其中 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$, $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{i,j}$ 称为节点 i 的出度.当加入虚拟领导者时,若令虚拟领导者为智能体0,则包含虚拟领导者在内的所有多智能体之间的信息关系用新图 $\bar{\zeta} = \{0 \cup v, \bar{\varepsilon}, \bar{A}\}$ 来表示, \bar{A} 和 $\bar{\varepsilon}$ 为新的邻接矩阵和边界.此时用 s_i 表示智能体 i 与虚拟领导者之间的联系, $s_i > 0$ 表示智能体 i 与虚拟领导者有直接联系, $s_i = 0$ 表示智能体 i 与虚拟领导者没有联系.

根据上述分析,为了在系统参数时变的情况下,

使各个智能体的输出都能跟踪上期望轨迹, 本文设计如下迭代学习控制律:

$$u_{j,k+1}(t) = u_{j,k}(t) + \Gamma(t) \left[\sum_{i \in N_j} a_{j,i} (e_{j,k}(t+1) - e_{i,k}(t+1)) + s_j e_{j,k}(t+1) \right]. \quad (2)$$

其中: $e_{j,k}(t) = y_d(t) - y_{j,k}(t)$ 为第 j 个智能体的跟踪误差, $e_{i,k}(t) = y_d(t) - y_{i,k}(t)$ 为第 i 个智能体的跟踪误差, $\Gamma(t)$ 为开环学习增益矩阵.

为便于收敛性分析, 定义以下列堆栈向量:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= [x_{1,k}^T(t), x_{2,k}^T(t), \dots, x_{N,k}^T(t)]^T, \\ u_k(t) &= [u_{1,k}^T(t), u_{2,k}^T(t), \dots, u_{N,k}^T(t)]^T, \\ y_k(t) &= [y_{1,k}^T(t), y_{2,k}^T(t), \dots, y_{N,k}^T(t)]^T, \\ e_k(t) &= [e_{1,k}^T(t), e_{2,k}^T(t), \dots, e_{N,k}^T(t)]^T. \end{aligned} \quad (3)$$

因此, 式(1)可改写成以下紧凑形式:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = (I \otimes A(t))x_k(t) + (I \otimes B(t))u_k(t), \\ y_k(t) = (I \otimes C(t))x_k(t). \end{cases} \quad (4)$$

其中: I 为相应维数的单位矩阵, \otimes 表示 Kronecker 积. 式(2)可改写为下面的紧凑形式:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + ((L + S) \otimes \Gamma(t))e_k(t+1), \quad (5)$$

其中 $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_N)$.

现在的控制任务是, 利用式(5)来控制式(4), 在学习增益矩阵 $\Gamma(t)$ 满足什么条件时, 使得每个智能体的输出随迭代次数的增加都能在有限时间区间内完全跟踪期望轨迹, 即实现多智能体系统的一致性跟踪.

注1 每个智能体只能从各自邻居智能体和虚拟领导者那里得到信息, 而虚拟领导者不能得到智能体的信息.

注2 本文假设对于具有分布式结构的多智能体系统, 并不是每个智能体都能直接获得由虚拟领导者产生的期望轨迹信息, 只有与虚拟领导者有通讯联系的智能体才能获得期望轨迹信息.

2 收敛性分析

为便于收敛性证明, 首先引入以下定义.

定义1^[24] 离散时间向量函数 $h: \{0, 1, \dots, T\} \rightarrow R^n$ 的 λ 范数定义为

$$\|h(t)\|_\lambda = \sup_{t \in [0, T]} \{\lambda^t \|h(t)\|\}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

根据上述分析, 下面给出本文的主要结果.

定理1 将迭代学习控制律(5)应用于满足假设

1和假设2的多智能体系统(4), 若学习增益 $\Gamma(t)$ 满足

$$\|I - (L + S) \otimes (C(t+1)B(t)\Gamma(t))\| = \rho < 1, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

则对于可达期望轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T+1])$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 多智能体系统输出 $y_k(t)$ 一致收敛于期望轨迹 $y_d(t)$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) (t \in [0, T+1])$.

证明 考察第 $k+1$ 次迭代时的跟踪误差

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t+1) &= y_d(t+1) - y_{k+1}(t+1) = \\ &= e_k(t+1) + y_k(t+1) - y_{k+1}(t+1). \end{aligned} \quad (7)$$

进一步, 根据式(4)将(7)写为

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t+1) &= \\ &= e_k(t+1) - (I \otimes C(t+1))(x_{k+1}(t+1) - x_k(t+1)). \end{aligned} \quad (8)$$

对式(4)应用归纳法, 可得

$$\begin{aligned} x_k(t) &= (I \otimes \Phi(t, 0))x_k(0) + \\ &+ \sum_{\tau=0}^{t-1} (I \otimes (\Phi(t, \tau+1)B(\tau)))u_k(\tau). \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\Phi(t, \tau)$ 是由 $A(t)$ 确定的状态转移矩阵. 将式(9)代入(8), 并结合式(5)和假设1, 则有

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t+1) &= \\ &= e_k(t+1) - (I \otimes C(t+1)) \times \\ &\times \left[(I \otimes \Phi(t+1, 0))x_{k+1}(0) + \right. \\ &+ \sum_{\tau=0}^t (I \otimes (\Phi(t+1, \tau+1)B(\tau)))u_{k+1}(\tau) - \\ &\left. (I \otimes \Phi(t+1, 0))x_k(0) - \right. \\ &\left. \sum_{\tau=0}^t (I \otimes (\Phi(t+1, \tau+1)B(\tau)))u_k(\tau) \right] = \\ &= e_k(t+1) - (I \otimes C(t+1)) \times \\ &\times \sum_{\tau=0}^t (I \otimes (\Phi(t+1, \tau+1)B(\tau)))(u_{k+1}(\tau) - u_k(\tau)) = \\ &= e_k(t+1) - (I \otimes C(t+1)) \times \\ &\times \left\{ \sum_{\tau=0}^t [(I \otimes (\Phi(t+1, \tau+1)B(\tau))) \times \right. \\ &\left. ((L + S) \otimes \Gamma(\tau))e_k(\tau+1)] \right\} = \\ &= e_k(t+1) - \sum_{\tau=0}^t \{(L + S) \otimes \\ &\otimes [C(t+1)\Phi(t+1, \tau+1)B(\tau)\Gamma(\tau)]\}e_k(\tau+1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e_k(t+1) - \\
 & ((L+S) \otimes (C(t+1)B(t)\Gamma(t)))e_k(t+1) - \\
 & \sum_{\tau=0}^{t-1} \{(L+S) \otimes \\
 & [C(t+1)\Phi(t+1, \tau+1)B(\tau)\Gamma(\tau)]\}e_k(\tau+1) = \\
 & [I - (L+S) \otimes (C(t+1)B(t)\Gamma(t))]e_k(t+1) - \\
 & \sum_{\tau=0}^{t-1} \{(L+S) \otimes \\
 & [C(t+1)\Phi(t+1, \tau+1)B(\tau)\Gamma(\tau)]\}e_k(\tau+1). \quad (10)
 \end{aligned}$$

式(10)两端取范数,可得

$$\begin{aligned}
 & \|e_{k+1}(t+1)\| \leq \\
 & \|I - (L+S) \otimes (C(t+1)B(t)\Gamma(t))\| \|e_k(t+1)\| + \\
 & \sum_{\tau=0}^{t-1} \|(L+S) \otimes (C(t+1)\Phi(t+1, \tau+1) \times \\
 & B(\tau)\Gamma(\tau))\| \|e_k(\tau+1)\| \leq \\
 & \rho \|e_k(t+1)\| + b_1 \sum_{\tau=0}^{t-1} \|e_k(\tau+1)\|. \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \rho &= \|I - (L+S) \otimes (C(t+1)B(t)\Gamma(t))\|, \\
 b_1 &= \sup_{t \in [0, T], \tau \in [0, t]} \|(L+S) \otimes (C(t+1) \times \\
 & \Phi(t+1, \tau+1)B(\tau)\Gamma(\tau))\|.
 \end{aligned}$$

式(11)两端同乘 $\lambda^{t+1} (0 < \lambda < 1)$,可得

$$\begin{aligned}
 & \lambda^{t+1} \|e_{k+1}(t+1)\| \leq \\
 & \rho \lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\| + b_1 \sum_{\tau=0}^{t-1} \lambda^{t-\tau} \lambda^{\tau+1} \|e_k(\tau+1)\|. \quad (12)
 \end{aligned}$$

根据 λ 范数定义,由式(12),可得

$$\begin{aligned}
 & \|e_{k+1}(t+1)\|_\lambda \leq \\
 & \rho \|e_k(t+1)\|_\lambda + b_1 \frac{\lambda(1-\lambda^T)}{1-\lambda} \|e_k(t+1)\|_\lambda = \\
 & \left(\rho + b_1 \frac{\lambda(1-\lambda^T)}{1-\lambda} \right) \|e_k(t+1)\|_\lambda. \quad (13)
 \end{aligned}$$

由定理1的收敛条件可知 $0 < \rho < 1$,所以当 λ 足够小时,可使得

$$0 < \rho + b_1 \frac{\lambda(1-\lambda^T)}{1-\lambda} < 1. \quad (14)$$

因此,由式(13)和(14)可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t+1)\|_\lambda = 0$,也即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \{\lambda^{t+1} \|e_k(t+1)\|\} = 0$.至此,再利用假设1中的条件 $e_k(0) = 0$ 即可证得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T+1]} \{\lambda^t \|e_k(t)\|\} = 0$. \square

3 仿真分析

为了验证所提出算法的有效性,考虑由1个虚拟领导者和4个智能体组成的离散时变多智能体系统,多智能体之间的通信拓扑结构如图1所示,其中第 j 个智能体模型为

$$\begin{cases}
 x_{j,k}(t+1) = \begin{bmatrix} 0.2t & 0 \\ -0.25 & 0.15t \end{bmatrix} x_{j,k}(t) + \\
 \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix} u_{j,k}(t), \\
 y_{j,k}(t) = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix} x_{j,k}(t).
 \end{cases} \quad (15)$$

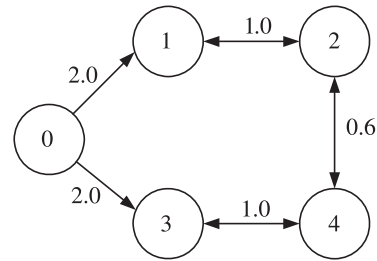


图1 多智能体之间的通信拓扑结构

图1中节点0代表虚拟领导者.由图1可知:智能体1和智能体3与虚拟领导者存在直接联系,可以直接获得期望轨迹信息;智能体2和智能体4不能直接获取期望轨迹信息,但可以分别与智能体1和智能体3互通信息.因此,由图论知识可知 $S = \text{diag}(2, 0, 2, 0)$,Laplacian矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1.6 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -0.6 & -1 & 1.6 \end{bmatrix}.$$

将迭代学习控制律(5)应用于系统(15),假设虚拟领导者给定的期望输出轨迹为 $y_d^1(t) = \sin(\pi t/0.1)$, $y_d^2(t) = \cos(\pi t/0.1)$,系统重复运行的时间 $t \in [0, 1]$,采样时间为0.01s,每个智能体的初始控制选为 $u_{j,0}(t) = [0, 0]^T$,每个智能体的初始状态都选取为 $x_{j,k}(0) = [0.9434, 0.1887]^T$,学习增益矩阵取为 $\Gamma(t) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 1.3 \end{bmatrix}$,此时 $\rho = 0.8844 < 1$,满足定理1的收敛条件.仿真结果如图2~图5所示.图中: y_d^1 和 y_d^2 分别表示领导者给定的两个期望轨迹; y_k^1 和 y_k^2 分别表示各个智能体的第1个实际输出和第2个实际输出.

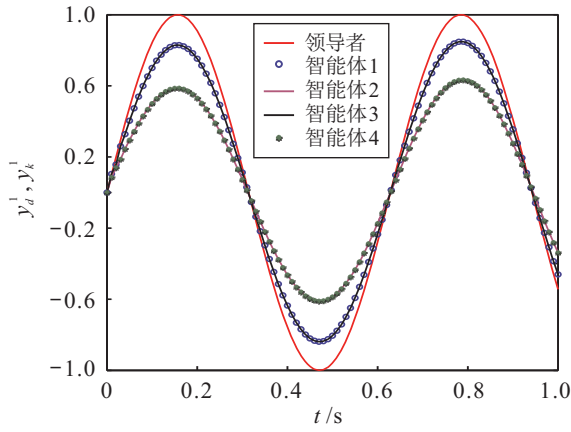


图2 迭代5次时各智能体的第1个输出曲线

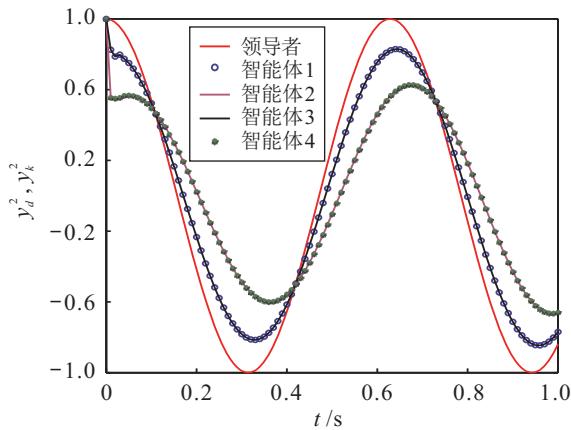


图3 迭代5次时各智能体的第2个输出曲线

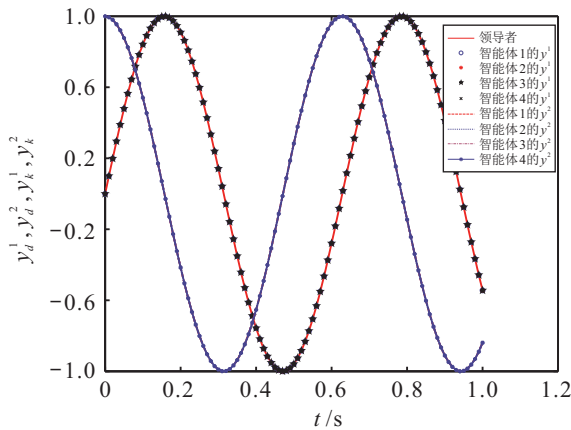


图4 迭代50次时各智能体的第1个和第2个输出

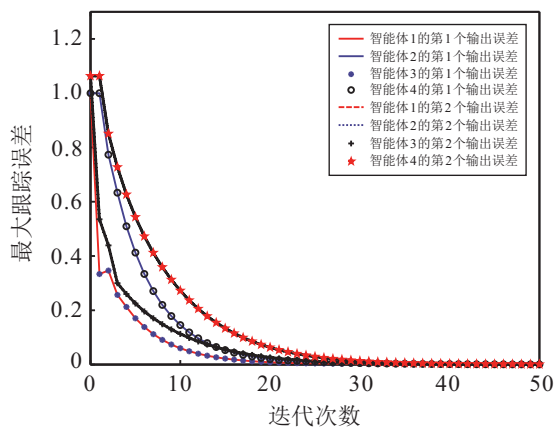


图5 各智能体第1个和第2个输出的最大跟踪误差

由仿真结果图2~图4可以看出,采用本文设计的算法(5)来控制离散时变多智能体系统(15)时,无论是与领导者有直接联系的智能体1和智能体3,还是与领导者没有直接联系的智能体2和智能体4,都能在有限时间区间内,随着迭代次数的增加逐渐收敛于领导者的期望轨迹.同时,由图1各智能体间的通信拓扑可知,智能体1与智能体3的信息权值相等,智能体2与智能体4的信息权值也相等.因此,图2~图4中的智能体1与智能体3的输出曲线重合,智能体2与智能体4的输出曲线也重合.此外,由图5也可以看出,各智能体输出的跟踪误差随迭代次数的增加也逐渐收敛于零.

4 结论

本文针对一组由同类离散时变智能体组成的多智能体系统,通过由引入的虚拟领导者产生期望轨迹的方法,在假设仅有部分智能体能够获得期望轨迹信息的条件下,将 N 个同类离散时变智能体和虚拟领导者组成一个固定的通信拓扑结构,在此拓扑结构基础上,利用上一次迭代时产生的跟踪误差来修正上一次的跟踪误差,从而得到当前的新控制律,如此不断重复,最终获得理想控制律.从理论上严格证明了所提出算法的收敛性,并给出了算法收敛的充分条件.理论分析和仿真实验结果表明,所提出算法能够使 N 个同类离散时变智能体在有限时间区间内完全跟踪上给定的期望轨迹,且离散形式的迭代学习控制算法更为直接,更便于工程实现.

在未来的研究工作中,结合相关研究成果,利用迭代学习控制方法解决多智能体系统的一致性问题,可从以下几个方面做进一步深入研究:1)变期望轨迹的多智能体系统一致性迭代学习控制;2)在有向图和切换拓扑通信结构下,研究多智能体系统的一致性迭代学习控制;3)多智能体系统存在数据丢失时的一致性迭代学习控制.

参考文献(References)

- [1] Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [2] Zhang Z Q, Hao F, Zhang L, et al. Consensus of linear multi-agent systems via event-triggered control[J]. Int J of Control, 2014, 87(6): 1243-1251.
- [3] Luo X Y, Li S B, Guan X P. Flocking algorithm with multi-target tracking for multi-agent systems[J]. Pattern Recognition Letters, 2010, 31(9): 800-805.
- [4] Lu X Q, Austin F, Chen S H. Flocking in multi-agent

- systems with active virtual leader and time-varying delays coupling[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(2): 1014-1026.
- [5] Liu Y F, Geng Z Y. Finite-time formation control for linear multi-agent systems: A motion planning approach[J]. *Systems and Control Letters*, 2015, 85(5): 54-60.
- [6] Meng D Y, Jia Y M, Du J P. High-precision formation control of nonlinear multi-agent systems with switching topologies: A learning approach[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(13): 1993-2018.
- [7] Yan J, Guan X P, Luo X Y, et al. Consensus and trajectory planning with input constraints for multi-agent systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(7): 1074-1082.
- [8] 李浩亮, 杨任农, 李秋妮, 等. 基于分布式PID控制的任意阶线性多智能体系统的一致性[J]. *控制与决策*, 2017, 32(5): 899-905.
(Li H L, Yang R N, Li Q N, et al. Consensus of multi-agent systems with general linear dynamics based on distributed PID control[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(5): 899-905.)
- [9] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. *Proc of the IEEE*, 2007, 95(1): 215-233.
- [10] Cao Y C, Ren W, Meng Z Y. Decentralized finite-time sliding mode estimators and their applications in decentralized finite-time formation tracking[J]. *Systems and Control Letters*, 2010, 59(9): 522-529.
- [11] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950-955.
- [12] Wang X L, Hong Y G. Distributed finite-time consensus algorithms for multi-agent systems with variable coupling topology[J]. *J of Systems Science and Complexity*, 2010, 23(2): 209-218.
- [13] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning[J]. *J of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123-140.
- [14] Bu X H, Hou Z S. Adaptive iterative learning control for linear systems with binary-valued observations[J]. *IEEE Trans on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(1): 232-237.
- [15] 陶洪峰, 刘艳, 杨慧中. 输出时滞双率采样系统的鲁棒迭代学习控制[J]. *控制与决策*, 2017, 32(9): 1707-1713.
(Tao H F, Liu Y, Yang H Z. Robust iterative learning control for a dual-rate sampling system with output delay[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(9): 1707-1713.)
- [16] Xiong W J, Yu X H, Patel R. Iterative learning control for discrete-time systems with event-triggered transmission strategy and quantization[J]. *Automatica*, 2016, 72(1): 84-91.
- [17] Meng D Y, Moore K L. Robust iterative learning control for nonrepetitive uncertain systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2017, 62(2): 907-913.
- [18] Meng D Y, Jia Y M. Formation control for multi-agent systems through an iterative learning design approach[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(2): 340-361.
- [19] Liu Y, Jia Y M. An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2012, 61(1): 148-154.
- [20] 李金沙, 李俊民. 寻找多智能体系统一致性的迭代学习方法[J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 1073-1077.
(Li J S, Li J M. Consensus seeking in multi-agent systems by the iterative learning control[J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1073-1077.)
- [21] 伍巧凤, 刘山. 初始误差修正的多智能体一致性迭代学习控制[J]. *计算机工程与应用*, 2014, 50(1): 29-35.
(Wu Q F, Liu S. Iterative learning control of multi-agent consensus with initial error correction[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2014, 50(1): 29-35.)
- [22] Meng D Y, Jia Y M. Finite-time consensus for multi-agent systems via terminal feedback iterative learning[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(18): 2098-2110.
- [23] Meng D Y, Jia Y M. Iterative learning approaches to design finite-time consensus protocols for multi-agent systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2012, 61(1): 187-194.
- [24] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999: 287.
(Sun M X, Huang B J. Iterative learning control[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1999: 287.)

(责任编辑: 李君玲)