

一阶不确定系统的固定时间收敛扰动观测器

杨峰, 韦常柱[†], 吴荣, 崔乃刚

(哈尔滨工业大学 航天工程系, 哈尔滨 150001)

摘要: 针对一阶不确定系统中集总扰动的快速估计问题, 基于误差放大策略和双极限齐次估计理论设计非递归形式的固定时间收敛扰动观测器, 并提出利用幂次函数非线性特性削弱输入信号噪声影响的改进方案. 误差放大策略是一种特殊的高增益方法, 能够实现修正项中幂次函数支配范围的扩张, 进一步提升观测器的收敛速度, 并简化参数调试过程; 合理选择误差放大系数并忽略修正项中的低阶幂次项, 能够简化扰动观测器结构并增强对测量噪声的抑制能力. 另外, 以广义超螺旋算法为基础, 构建固定时间收敛鲁棒扰动观测器. 最后, 在理论证明分析的基础上, 针对是否存在测量噪声的两种情况, 对所介绍的3种扰动观测器和一种扩张状态观测器进行对比仿真分析, 并总结各类扰动观测器的特点和适用性.

关键词: 非线性; 不确定性; 加权齐次性; 固定时间收敛; 扰动观测器; 测量噪声

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Fixed-time convergent disturbance observer for first-order uncertain system

YANG Feng, WEI Chang-zhu[†], WU Rong, CUI Nai-gang

(Department of Astronautics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: In this paper, non-recursive fixed-time convergent disturbance observers are proposed to deal with the total disturbance fast observation problem for a first-order uncertain system. The primary disturbance observer is designed based on the observer error amplification strategy and bi-limit homogeneous approximation theory. Due to nonlinearity of power functions, a variant of the proposed disturbance observer is presented to obtain the noise tolerance ability. The observer error amplification strategy is actually a special high gain approach, based on which the domination scope of the power functions in the correction terms is extended. At the same time, the convergence rate of the observer is accelerated, and the parameters tuning process is simplified. By choosing a reasonable amplifier and removing the low-order power functions in the correction terms, the structure of the disturbance observer is simplified, and the noise tolerance ability is enhanced. In addition, a fixed-time convergent robust disturbance observer is designed based on generalized super-twisting algorithm as well. Except the detailed theoretical derivation, numerical simulations, with or without measurement noise, are carried out to verify the feasibilities of the proposed three types of the disturbance observers. And, an typical extended state observer is employed for comparison. Finally, the characteristics and applicability of the disturbance observers are discussed.

Keywords: nonlinearity; uncertainty; weighted homogeneity; fixed-time convergence; disturbance observer; measurement noise

0 引言

基于扰动观测器的复合控制是克服不确定扰动影响, 提升控制精度的一种有效途径^[1-3]. 然而, 在实际应用时获取的输出信号中必然会存在测量噪声, 且控制采样频率往往也是有限的, 这就要求实时扰动观

测器的设计中必须考虑收敛速度、收敛精度和观测器鲁棒性之间的平衡^[4-5]. 另外, 扰动观测器需要具备良好的动态特性, 从而尽可能降低观测器的调节过程对被控系统动态品质的影响, 例如线性扩张观测器收敛过程中的峰值效应——观测器输出的大幅度超调

收稿日期: 2017-10-25; 修回日期: 2018-03-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61403100); 微小航天器技术国防重点实验室开放基金项目(HIT.KLOF.MST.201704); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(HIT.NSRIF.2015.037).

责任编辑: 张庆灵.

作者简介: 杨峰(1987—), 男, 博士生, 从事飞行器制导与控制、观测器设计与复合控制的研究; 韦常柱(1982—), 男, 副教授, 博士, 从事飞行器先进控制方法、先进制导算法设计、飞行器弹道设计与优化等研究.

[†]通讯作者. E-mail: weichangzhu@hit.edu.cn.

变化,会对系统的稳定性和动态品质带来较为不利的影响.因此,针对一阶不确定系统中集总扰动的快速平滑估计问题,本文设计具备固定时间收敛特性的扰动观测器.

固定时间收敛(Fixed-time convergence, FxTC)特性^[6]是指系统状态从任意初始条件出发,都将在有限时间内收敛到平衡点,且收敛时间一致有界. FxTC特性是Andrieu等^[6]在研究双极限加权齐次系统稳定性的过程中发现的, Polyakov^[7]对其进行了系统的总结,并提出了相关的判定定理.目前,对FxTC特性的研究主要集中在控制器设计^[8-10]、微分器设计^[4-5,11]和状态观测器设计^[7,12]等方面,在扰动观测器设计方面的研究较少.但是基于扩张状态^[3]等思想,微分器可以非常便捷地改造成扰动观测器,如Ni等^[13]基于切换型FxTC微分器^[10]所设计的扰动观测器.

通过在修正项中引入高阶幂次函数, Cruz-Zavala等^[4]提出了第一种具备FxTC特性的精确鲁棒微分器,较原始精确鲁棒微分器^[14]在收敛速度方面有较大提升,但是其参数设计过程需要明确获知不确定扰动的边界.基于高阶加权齐次微分器和高阶精确鲁棒微分器^[15]的切换,Angulo等^[11]设计了一种组合FxTC微分器,但是由于高阶加权齐次微分器的作用时间有限,整个微分器并不具备收敛速度方面的优势,而且参数调试方法复杂. Basin等在文献[5]中提出了一种类似双幂次趋近律的非递归FxTC微分器,同时将高阶精确鲁棒微分器^[15]改造成了含有高阶修正项的递归FxTC微分器,但是两种微分器连续修正项的参数整定都是以Hurwitz矩阵为基础构建增益递增数列,整个过程较为复杂.上述微分器有两个明显的不足:一是高阶幂次项的作用范围有限,仍然依赖提高增益来提升收敛速度,这容易与观测器收敛精度、测量噪声抑制能力等产生冲突;二是在观测误差幅值较大时容易产生更剧烈的峰值效应,上述研究中并未给出解决方案.

Guo等^[16]在对扩张状态观测器(Extended state observer, ESO)的设计中引入了误差放大策略——“时间尺度”概念^[10]的具体应用,一种特殊的高增益方法.使用放大因子能够实现对幂次函数支配范围的改变,即当观测误差的模值大于(小于)放大因子时,低阶幂次函数对观测误差有减幅(增幅)作用,高阶幂次函数与之相反.与线性ESO^[16-18]相比,非线性ESO^[13]在参数整定方面与之类似,即通过求解简单的Hurwitz多项式确定外部增益,再选择合适的放大因子即可.但是,非线性ESO可极大地削弱收敛过程

中的峰值效应,降低观测器动态过程对被控系统动态品质的影响.为了进一步增强上述非线性ESO对测量噪声的抑制能力,Zhao等在文献[19]中使用韩京清构造的fal函数^[3],即通过在平衡点附近增加线性段削弱了低阶幂次函数对噪声的放大作用,并给出了完整的数学证明.

在介绍FxTC的概念和判定引理、双极限齐次估计的概念和相关引理的基础上,本文以双幂次微分器^[5]、高阶幂次微分器^[10]和FxTC精确鲁棒微分器^[4]为参考,针对一阶不确定系统设计了双幂次扰动观测器、高阶幂次扰动观测器和广义超螺旋扰动观测器.在双幂次扰动观测器和高阶幂次扰动观测器的设计中引入误差放大策略,并对其进行完整的理论证明,引入误差放大策略不仅充分利用了幂次修正项的非线性特性,提高扰动观测器的收敛速度,而且简化了扰动观测器的参数整定方法.超螺旋扰动观测器继承了对应微分器的参数设计方法,并证明了其与对应微分器拥有相同的误差动力学.最后,通过仿真分析,对所得扰动观测器的收敛速度、收敛精度及使用方法进行了分析和讨论.

1 问题描述及预备知识

1.1 问题描述

考虑如下一阶SISO不确定系统:

$$\dot{\sigma}(t) = f(t) + d(t) + u(t), \sigma(t_0) = \sigma_0. \quad (1)$$

其中: $\sigma(t) \in R$ 是系统状态; $u(t) \in R$ 是控制输入; $f(t) \in R$ 是已知模型函数; $d(t) \in R$ 是分段连续一阶可微集总不确定扰动,并满足

$$|d(t)| \leq D, |\dot{d}(t)| \leq L, \quad (2)$$

$D, L > 0$ 是已知常数; t_0 是初始时刻; σ_0 是系统的初始状态.式(1)可用于描述一阶鲁棒镇定问题或跟踪控制问题,如制导律设计中以 $\sigma = V_\lambda - c_0\sqrt{r}$ 表示所得动力学模型^[20];式(1)也可用于描述滑模控制中滑模变量的动力学方程,如撞击角度约束制导律设计中以 σ 表示终端滑模面^[21]所得动力学模型.

本文的核心问题为:基于输出信息 σ 、已知模型函数 f 和控制量 u ,构建FxTC扰动观测器,实现对系统(1)中的不确定扰动量 d 的快速平滑观测;当测量信息受到噪声影响,即

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma(t) + n_1(t), \tilde{u}(t) = u(t) + n_2(t) \quad (3)$$

时,基于测量值 $\tilde{\sigma}$ 和 \tilde{u} ,以及 f 构建FxTC扰动观测器,实现对不确定扰动量 d 尽可能精确的快速平滑观测.其中: $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 为测量噪声.另外,针对噪声信号作如下假设.

假设1 如式(3)所示,假设在系统输出和实际控制量的测量过程中,噪声信号为小幅度离散信号,即噪声信号不可微,且满足 $|n_1| \leq \omega_1$ 和 $|n_2| \leq \omega_2$.

1.2 预备知识

首先介绍固定时间收敛特性的相关概念^[6,9].

定义1 考虑如下非线性系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (4)$$

其中: $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R^m$. 如果 $\forall \mathbf{x}_0 \in R^n$,存在 $T(\mathbf{x}_0) > 0$ 使得 $\mathbf{x}(t) = 0$ 成立, $\forall t > T(\mathbf{x}_0)$,则原点是系统(4)的全局有限时间收敛平衡点;若存在 $T_{\max} > 0$ 使得 $T(\mathbf{x}_0) \leq T_{\max}$,则原点是系统(4)的固定时间收敛平衡点.

定义2 针对系统(4),若在原点的周围存在邻域 $S \subset R^n$,如果 $\forall \mathbf{x}_0 \in R^n$,存在 $T(\mathbf{x}_0) > 0$,使得 $\mathbf{x}(t) \in S$ 成立, $\forall t > T(\mathbf{x}_0)$,则称系统(4)全局有限时间收敛到原点的邻域内;若存在 $T_{\max} > 0$,使得 $T(\mathbf{x}_0) \leq T_{\max}$,则称系统(4)在固定时间内收敛到原点的邻域内.

引理1 若连续的径向无界函数 $V(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R_+ \cup \{0\}$ 满足以下条件:1) $V(\mathbf{0}) = 0$,原点是全局有限时间收敛平衡点. 2) 存在 $0 < \mu < 1, \nu > 0, r_\mu > 0, r_\nu > 0$,使

$$\dot{V} = \begin{cases} -r_\mu V^{1-\mu}, & V \leq 1; \\ -r_\nu V^{1+\nu}, & V \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

成立. 则原点是全局固定时间收敛平衡点,且最大收敛时间 T_{\max} 满足

$$T(\mathbf{x}_0) \leq T_{\max} \leq \frac{1}{\mu r_\mu} + \frac{1}{\nu r_\nu}. \quad (6)$$

加权齐次性和双极限齐次估计的相关概念与引理^[7]如下.

定义3 $\forall r_i > 0, i = 1, 2, \dots, n, \lambda > 0$,令矩阵 $A_r(\lambda) = \text{diag}\{\lambda^{r_i}\}_{i=1}^n$,权值向量 $\mathbf{r} = \{r_i\}_{i=1}^n$. 如果 $\forall \lambda > 0$ 和 $\forall \mathbf{x} \in R^n$,函数 $V(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R$ 满足

$$V(A_r(\lambda)\mathbf{x}) = \lambda^d V(\mathbf{x}), \quad (7)$$

其中 $d \in R$,则称 $V(\mathbf{x})$ 具有 \mathbf{r} 加权齐次性,其相对于权值 \mathbf{r} 的齐次度为 d .

$\forall \lambda > 0$ 和 $\forall \mathbf{x} \in R^n$,如果向量场函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R^n$ 中的任一分量 $f_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, n$,满足

$$f_i(A_r(\lambda)\mathbf{x}) = \lambda^{d+r_i} f_i(\mathbf{x}), \quad (8)$$

其中 $d \in R$,则称 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 具有 \mathbf{r} 加权齐次性,其相对于权值 \mathbf{r} 的齐次度为 d .

定义4 如果对于任一紧子集 $C \subset R^n / \{\mathbf{0}\}, \forall \delta_0 > 0$,存在 $\lambda_0 > 0$,从而使得

$$\max_{\mathbf{x} \in C} |\lambda^{-d_0} V(A_{r_0}(\lambda)\mathbf{x}) - V_0(\mathbf{x})| \leq \delta, \forall \lambda \in (0, \lambda_0]$$

或

$$\max_{\mathbf{x} \in C} \|\lambda^{-d_0} A_{r_0}^{-1}(\lambda) \mathbf{f}(A_{r_0}(\lambda)\mathbf{x}) - \mathbf{f}_0(\mathbf{x})\| \leq \delta,$$

$$\forall \lambda \in (0, \lambda_0]$$

成立,则称函数 $V(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R$ (或向量场函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R^n$)相对于三元组 (\mathbf{r}_0, d_0, V_0) 或三元组 $(\mathbf{r}_0, d_0, \mathbf{f}_0)$ 具有零极限齐次性. 其中估计函数 $V_0(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R$ (或估计向量场函数 $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R^n$)相对权值 \mathbf{r}_0 的齐次度为 d_0 .

定义5 如果对于任一紧子集 $C \subset R^n / \{\mathbf{0}\}, \forall \delta_\infty > 0$,存在 $\lambda_\infty > 0$,从而使得

$$\max_{\mathbf{x} \in C} |\lambda^{-d_\infty} V(A_{r_\infty}(\lambda)\mathbf{x}) - V_\infty(\mathbf{x})| \leq \delta, \forall \lambda \in [\lambda_\infty, 0)$$

或

$$\max_{\mathbf{x} \in C} \|\lambda^{-d_\infty} A_{r_\infty}^{-1}(\lambda) \mathbf{f}(A_{r_\infty}(\lambda)\mathbf{x}) - \mathbf{f}_0(\mathbf{x})\| \leq \delta,$$

$$\forall \lambda \in [\lambda_\infty, 0)$$

成立,则称函数 $V(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R$ (或向量场函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R^n$)相对于三元组 $(\mathbf{r}_\infty, d_\infty, V_\infty)$ 或三元组 $(\mathbf{r}_\infty, d_\infty, \mathbf{f}_\infty)$ 具有零极限齐次性. 其中估计函数 $V_\infty(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R$ (或估计向量场函数 $\mathbf{f}_\infty(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R^n$)相对权值 \mathbf{r}_∞ 的齐次度为 d_∞ .

定义6 如果函数 $V(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R$ (或向量场函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R^n$)相对 (\mathbf{r}_0, d_0, V_0) 或 $(\mathbf{r}_0, d_0, \mathbf{f}_0)$ 具有零极限齐次性,相对 $(\mathbf{r}_\infty, d_\infty, V_\infty)$ (或 $(\mathbf{r}_\infty, d_\infty, \mathbf{f}_\infty)$)具有无穷极限齐次性,则称 $V(\mathbf{x})$ (或 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$)具有双极限齐次性.

引理2 函数 $\phi(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R$ 和 $\varsigma(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R_+$ 均为双极限齐次函数,其针对相同的权重 \mathbf{r}_0 和 \mathbf{r}_∞ ,分别具有齐次度 $d_{\phi,0}, d_{\phi,\infty}$ 和 $d_{\varsigma,0}, d_{\varsigma,\infty}$,齐次估计函数 ϕ_0, ϕ_∞ 和 $\varsigma_0, \varsigma_\infty$. 如果两个函数的齐次度满足 $d_{\phi,0} \geq d_{\varsigma,0}, d_{\phi,\infty} \leq d_{\varsigma,\infty}$,且 $\varsigma, \varsigma_0, \varsigma_\infty$ 均为正定函数,则必然存在一个 $\exists c > 0$ 使得

$$\phi(\mathbf{x}) \leq c\varsigma(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in R^n \quad (9)$$

成立.

2 固定时间收敛扰动观测器

2.1 双幂次扰动观测器

参考文献[9]和[16],考虑如下扰动观测器:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= k_1 \phi_1 \left(\frac{\sigma - z_1}{\varepsilon} \right) + z_2 + f + u, \\ \dot{z}_2 &= \frac{k_2}{\varepsilon} \phi_2 \left(\frac{\sigma - z_1}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

其中修正项的具体形式为

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= [x]^\alpha + [x]^\beta, \\ \phi_2(x) &= [x]^{2\alpha-1} + [x]^{2\beta-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

$[x]^\alpha = |x|^\alpha \text{sign}(x)$, $\text{sign}(x)$ 为符号函数,输出与 x 的符号相同且取值为 $\{1, 0, -1\}$;增益需满足 $k_1, k_2 > 0$,且 $k_1 \geq 2\sqrt{k_2}$;幂次取值符合 $\alpha \in (0.5, 1), \beta \in (1, 1.5)$;放大因子 $\varepsilon \in (0, 1)$.

定理1 针对式(1)所示SISO系统,假设 σ 和 u 均为已知量,不确定扰动满足边界条件 $|\dot{d}| \leq L$,则根据式(10)和(11)所示扰动观测器, z_1 和 z_2 对 σ 和 d 的观测误差将在固定时间内收敛到原点的邻域内.

证明 令 $e_1 = \sigma - z_1, e_2 = d - z_2$,结合式(1)可得

$$\dot{e}_1 = -k_1\phi_1\left(\frac{e_1}{\varepsilon}\right) + e_2, \dot{e}_2 = -\frac{k_2}{\varepsilon}\phi_2\left(\frac{e_1}{\varepsilon}\right) + \dot{d}, \tag{12}$$

其中 ϕ_1 和 ϕ_2 如式(11)所示. 令 $\eta_i \triangleq e_i(\varepsilon t)/\varepsilon^{2-i}, i = 1, 2$,结合式(11)和(12)可得

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -k_1([\eta_1]^\alpha + [\eta_1]^\beta) + \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= -k_2([\eta_1]^{2\alpha-1} + [\eta_1]^{2\beta-1}) + \varepsilon\dot{d}. \end{aligned} \tag{13}$$

记 $\boldsymbol{\eta} \triangleq [\eta_1, \eta_2]^T, \dot{\boldsymbol{\eta}} \triangleq \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}), \Delta = \varepsilon\dot{d}$,则 $|\Delta| \leq \varepsilon L$.

后续证明将分成3步:前两步中令 $\Delta = 0$,即原系统(1)中扰动量为常值或为零时,分析系统 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0}$ 的参数取值和稳定性;第3步讨论 $\Delta \neq 0$ 时,即扰动量为时变量时,系统 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ 的稳态误差界.

Step 1:观察式(13)所示扰动观测器的误差动力学,根据幂次函数的支配范围差异, $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0}$ 可以化简为如下形式:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0} = \mathbf{g}_\gamma(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} -k_1(1+c)[\eta_1]^\gamma + \eta_2 \\ -k_2(1+c^2)[\eta_1]^{2\gamma-1} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

其中:当 $\boldsymbol{\eta} \in R^2/\{\mathbf{0}\}$ 且 $|\eta_1| \leq 1$ 时,低阶幂次项处于支配地位,令式(14)中 $\gamma = \alpha$,则 $c = |\eta_1|^{\beta-\alpha}$;当 $\boldsymbol{\eta} \in R^2/\{\mathbf{0}\}$ 且 $|\eta_1| \geq 1$ 时,高阶幂次项处于支配地位,令式(14)中 $\gamma = \beta$,则 $c = |\eta_1|^{\alpha-\beta}$. 两种情况下,随 η_1 变化的系数 $c \in (0, 1]$. 根据定义4~定义6,不妨取系统 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0}$ 的零极限齐次估计为

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{g}_0(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} -k_1[\eta_1]^\alpha + \eta_2 \\ -k_2[\eta_1]^{2\alpha-1} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

由定义3可知, $\mathbf{g}_0(\boldsymbol{\eta})$ 相对权值 $\mathbf{r}_0 = [1, \alpha]^T$ 的齐次度 d_0 为 $\alpha - 1$. 无穷极限齐次估计为

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{g}_\infty(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} -k_1[\eta_1]^\beta + \eta_2 \\ -k_2[\eta_1]^{2\beta-1} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

由定义3可知, $\mathbf{g}_\infty(\boldsymbol{\eta})$ 相对权值 $\mathbf{r}_\infty = [1, \beta]^T$ 的齐次度 d_∞ 为 $\beta - 1$. 以 $\mathbf{g}_0(\boldsymbol{\eta})$ 为例,由于

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\lambda^{-d_0} \mathbf{A}_{\mathbf{r}_0}^{-1}(\lambda) \mathbf{g}(\mathbf{A}_{\mathbf{r}_0}(\lambda)\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0} - \mathbf{g}_0(\boldsymbol{\eta})\| &= \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|[-k_1\lambda^{\beta-\alpha}[\eta_1]^\beta, -k_2\lambda^{2(\beta-\alpha)}[\eta_1]^{2\beta-1}]^T\| &= 0, \end{aligned}$$

必然存在紧子集 $\mathbf{C} \subset R^n/\{\mathbf{0}\}$,常数 λ_0 和 δ 使得 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0}$ 和 $\mathbf{g}_0(\boldsymbol{\eta})$ 满足定义4给定的条件.

文献[5]和文献[22]已经通过系统的加权齐次特性和向量空间内系统连续性证明:当 $\alpha \in (1/2, 1), \beta \in (1, 3/2)$,且 $s^2 + k_1s + k_2$ 是Hurwitz多项式时,原点是系统(15)和(16)的全局线性渐近收敛平衡点. 结合文献[7]的命题2.18,原点也是 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0}$ 的全局线性渐近收敛平衡点.

为了简化参数选取,使得 $s^2 + k_1s + k_2$ 对应的极点均在负实轴上,则 k_1, k_2 只需足够大,并满足

$$\{k_1 \in R_+, k_2 \in R_+ | k_1 \geq 2\sqrt{k_2}\} \tag{17}$$

即可. 针对式(14)所示系统,当系数 c 为 $(0, 1]$ 之间任一值时,其对应线性系统($\gamma = 1$)的特征多项式为

$$s^2 + k_1(1+c)s + k_2(1+c^2). \tag{18}$$

如果 k_1, k_2 的取值满足式(17)所示条件,则易于验证,当参数 c 在 $(0, 1]$ 变化时,式(18)亦为Hurwitz多项式. 那么,结合上文对文献[5]和文献[22]的介绍分析可知,按照式(17)所示条件选择增益 k_1, k_2 ,即能保证 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0}$ 的稳定性.

Step 2:因为原点是系统 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0}, \mathbf{g}_0(\boldsymbol{\eta})$ 和 $\mathbf{g}_\infty(\boldsymbol{\eta})$ 的全局线性渐近收敛平衡点,令实数 d_{V_0} 和 d_{V_∞} 满足

$$\begin{aligned} d_{V_0} &= 2\alpha \geq \max\{1, \alpha\}, \\ d_{V_\infty} &= 2\beta \geq \max\{1, \beta\}, \end{aligned}$$

则由文献[7]的定理2.20可知,针对 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0}$ 存在一阶连续可微、正定且径向无界的李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{\eta}) : R^2 \rightarrow R_+$,且相对于 $(\mathbf{r}_0, d_{V_0}, V_0(\boldsymbol{\eta}))$ 和 $(\mathbf{r}_\infty, d_{V_\infty}, V_\infty(\boldsymbol{\eta}))$ 具有双极限齐次性. 其中, $V_0(\boldsymbol{\eta})$ 和 $V_\infty(\boldsymbol{\eta})$ 分别为系统 $\mathbf{g}_0(\boldsymbol{\eta})$ 和 $\mathbf{g}_\infty(\boldsymbol{\eta})$ 对应的李雅普诺夫函数,其相对于权值 \mathbf{r}_0 和 \mathbf{r}_∞ 的齐次度分别为 d_{V_0} 和 d_{V_∞} ,而 $V_0(\boldsymbol{\eta})$ 和 $V_\infty(\boldsymbol{\eta})$ 的存在性可由文献[23]中的定理2判定. 另外, $\dot{V}(\boldsymbol{\eta})$ 的全导数负定且相对于 $(\mathbf{r}_0, d_{V_0} + d_0, \dot{V}_0(\boldsymbol{\eta}))$ 和 $(\mathbf{r}_\infty, d_{V_\infty} + d_\infty, \dot{V}_\infty(\boldsymbol{\eta}))$ 具有双极限齐次性.

定义如下函数:

$$\begin{cases} \phi(\boldsymbol{\eta}) \triangleq V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_0}+d_0}{d_{V_0}}} + V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_\infty}+d_\infty}{d_{V_\infty}}}, \\ \varsigma(\boldsymbol{\eta}) \triangleq -\dot{V}(\boldsymbol{\eta}) = -\frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})|_{\Delta=0}. \end{cases} \tag{19}$$

$\phi(\boldsymbol{\eta})$ 和 $\varsigma(\boldsymbol{\eta})$ 均为双极限齐次函数,相对于 \mathbf{r}_0 和 \mathbf{r}_∞ 的齐次度分别为 d_0 和 d_∞ ,且 $\phi(\boldsymbol{\eta})$ 的零极限和无穷极限齐次估计分别为 $\phi_0(\boldsymbol{\eta}) = V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_0}+d_0}{d_{V_0}}}$ 和 $\phi_\infty(\boldsymbol{\eta}) = V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_\infty}+d_\infty}{d_{V_\infty}}}$. 那么,由引理2可知,存在常数 $c > 0$ 使得

$$\phi(\boldsymbol{\eta}) \leq \frac{1}{c}\varsigma(\boldsymbol{\eta}). \tag{20}$$

将式(19)代入上式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \Big|_{\Delta=0} \leq & \\ & -c(V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_0}+d_0}{d_{V_0}}} + V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_\infty}+d_\infty}{d_{V_\infty}}}). \end{aligned} \quad (21)$$

由于 $\alpha \in (1/2, 1)$, $\beta \in (1, 3/2)$, 则 $d_\infty = \beta - 1 > 0$, $d_0 = \alpha - 1 < 0$, 且

$$\frac{d_{V_\infty} + d_\infty}{d_{V_\infty}} > 1, \quad \frac{d_{V_0} + d_0}{d_{V_0}} < 1,$$

那么, 根据幂次函数的支配性, 式(21)可化简为

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \Big|_{\Delta=0} \leq \begin{cases} -cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_\infty}+d_\infty}{d_{V_\infty}}}, & V(\boldsymbol{\eta}) \geq 1; \\ -cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_0}+d_0}{d_{V_0}}}, & V(\boldsymbol{\eta}) \leq 1. \end{cases} \quad (22)$$

由定义1和引理1可知, 系统(13)在 $\Delta = 0$ 时将在固定时间内收敛到原点, 其最大收敛时间为

$$T \leq \frac{1}{c} \left(\frac{d_{V_0}}{|d_0|} + \frac{d_{V_\infty}}{|d_\infty|} \right). \quad (23)$$

结合 d_{V_0} 、 d_{V_∞} 、 d_0 和 d_∞ 的取值, 由式(23)可得

$$T \leq \frac{1}{c} \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha} + \frac{2\beta}{\beta-1} \right). \quad (24)$$

综上, $\Delta = 0$ 时系统(13)的FxTC稳定性由此得证.

Step 3: $\Delta \neq 0$ 时, 文献[7]的推论2.21已经给出了在扰动条件下双极限齐次系统的输入-状态稳定性分析, 但是其函数构造较为复杂. 将 \dot{V} 沿式(13)展开可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\eta}) &= \frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \\ & \frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \Big|_{\Delta=0} + \frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2} \Delta. \end{aligned} \quad (25)$$

由文献[7]的定理2.20可知, $\frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2}$ 相对于 $(\mathbf{r}_0, d_{V_0} - r_{0,2}, \frac{\partial V_0(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2})$ 和 $(\mathbf{r}_\infty, d_{V_\infty} - r_{\infty,2}, \frac{\partial V_\infty(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2})$ 具有双极限齐次性. 定义如下函数:

$$\begin{cases} \phi_\Delta(\boldsymbol{\eta}) = \left| \frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2} \right|, \\ \varsigma_\Delta(\boldsymbol{\eta}) = V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_0}-r_{0,2}}{d_{V_0}}} + V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_\infty}-r_{\infty,2}}{d_{V_\infty}}}. \end{cases} \quad (26)$$

易知, $\phi_\Delta(\boldsymbol{\eta})$ 相对 $(\mathbf{r}_0, d_{V_0} - r_{0,2}, \left| \frac{\partial V_0(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2} \right|)$ 和 $(\mathbf{r}_\infty, d_{V_\infty} - r_{\infty,2}, \left| \frac{\partial V_\infty(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2} \right|)$ 具有双极限齐次性; $\varsigma_\Delta(\boldsymbol{\eta})$ 相对 $(\mathbf{r}_0, d_{V_0} - r_{0,2}, V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_0}-r_{0,2}}{d_{V_0}}})$ 和 $(\mathbf{r}_\infty, d_{V_\infty} - r_{\infty,2}, V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_\infty}-r_{\infty,2}}{d_{V_\infty}}})$ 具有双极限齐次性. 那么, 由引理2可知, 存在常数 c_Δ 使得

$$\left| \frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2} \right| \leq c_\Delta (V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_0}-r_{0,2}}{d_{V_0}}} + V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{d_{V_\infty}-r_{\infty,2}}{d_{V_\infty}}}). \quad (27)$$

将 d_{V_0} 、 d_{V_∞} 、 $r_{0,2}$ 和 $r_{\infty,2}$ 代入式(27)可得

$$\left| \frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2} \right| \leq 2c_\Delta V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

结合式(21)和(28), 由式(25)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\eta}) &= \\ & \frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \Big|_{\Delta=0} + \frac{\partial V(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2} \Delta \leq \\ & -c(V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\alpha-1}{2\alpha}} + V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}) + 2c_\Delta V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{1}{2}} \Delta. \end{aligned} \quad (29)$$

式(29)可进一步写成以下两种形式:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\eta}) &\leq \\ & -cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\beta-1}{2\beta}} - (cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\alpha-1}{2\alpha}} - 2c_\Delta V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{1}{2}} \Delta), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\eta}) &\leq \\ & -cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\alpha-1}{2\alpha}} - (cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\beta-1}{2\beta}} - 2c_\Delta V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{1}{2}} \Delta). \end{aligned} \quad (31)$$

由于 $\alpha < 1 < \beta$, 易于判断

$$\frac{3\beta-1}{2\beta} > 1 > \frac{3\alpha-1}{2\alpha} > 0,$$

则式(30)和(31)分别代表了高阶项和低阶项处于支配地位时的李雅普诺夫不等式. 分别令

$$cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\alpha-1}{2\alpha}} - 2c_\Delta V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{1}{2}} \Delta \geq 0,$$

$$cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\beta-1}{2\beta}} - 2c_\Delta V(\boldsymbol{\eta})^{\frac{1}{2}} \Delta \geq 0,$$

可解得

$$V(\boldsymbol{\eta}) \geq \left(\frac{2c_\Delta \Delta}{c} \right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}} \triangleq V_1, \quad (32)$$

$$V(\boldsymbol{\eta}) \geq \left(\frac{2c_\Delta \Delta}{c} \right)^{\frac{2\beta}{2\beta-1}} \triangleq V_2. \quad (33)$$

当 $2c_\Delta \Delta / c \geq 1$ 时, 由式(30)可知

$$\dot{V}(\boldsymbol{\eta}) \leq -cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}. \quad (34)$$

那么, $V(\boldsymbol{\eta})$ 由 $V_0 \triangleq V(\boldsymbol{\eta}(t_0))$ 收敛到 V_1 所需的时间 T_1 为

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \frac{1}{c} \cdot \frac{2\beta}{\beta-1} (V_1^{-\frac{\beta-1}{2\beta}} - V_0^{-\frac{\beta-1}{2\beta}}) \leq \\ & \frac{1}{c} \cdot \frac{2\beta}{\beta-1} V_1^{-\frac{\beta-1}{2\beta}} = T_{\max,1}, \end{aligned} \quad (35)$$

即 $\boldsymbol{\eta}$ 将在有限时间 T_1 内收敛到原点的邻域 \mathbf{E}_1 内

$$\mathbf{E}_1 = \{\boldsymbol{\eta} \in R^2 | V(\boldsymbol{\eta}) \leq V_1\}, \quad (36)$$

且收敛时间不大于 $T_{\max,1}$.

当 $2c_\Delta \Delta / c \leq 1$ 时, 结合式(31), 式(29)可化简为

$$\dot{V}(\boldsymbol{\eta}) \leq \begin{cases} -cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}, & V(\boldsymbol{\eta}) \geq 1; \\ -cV(\boldsymbol{\eta})^{\frac{3\alpha-1}{2\alpha}}, & 1 \geq V(\boldsymbol{\eta}) \geq V_2. \end{cases} \quad (37)$$

结合引理1可知, $V(\boldsymbol{\eta})$ 由 V_0 收敛到 V_2 的时间 T_2 为

$$T_2 \leq \frac{1}{c} \cdot \frac{2\beta}{\beta-1} (1 - V_0^{-\frac{\beta-1}{2\beta}}) + \frac{1}{c} \cdot \frac{2\alpha}{1-\alpha} (1 - V_2^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}) \leq \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha} + \frac{2\beta}{\beta-1} \right) = T_{\max,2}, \quad (38)$$

即 η 将在有限时间 T_2 内收敛到原点的邻域 E_2 内

$$E_2 = \{\eta \in R^2 | V(\eta) \leq V_2\}, \quad (39)$$

且收敛时间不大于 $T_{\max,2}$.

综上,由定义2可知,在时变不确定扰动作用下,误差量 η 将在固定时间内收敛到原点的某个邻域内,收敛时间如式(35)和(38)所示,收敛域分别如 E_1 和 E_2 所示. 由于 $\eta_i = e_i(\varepsilon t)/\varepsilon^{2-i}, i = 1, 2$, 扰动观测器对 σ 和 d 的观测误差将在固定时间内收敛到原点的邻域内. □

注1 观察双幂次扰动观测器的误差动力学,与文献[9]对比,误差放大策略扩展了高阶幂次项的支配范围,从而使得修正项的能量大幅提升,提高了扰动观测器的收敛速度,实现了以观测误差驱动扰动观测器收敛,不依赖于高增益,从而简化了增益的整定过程.

注2 如式(32)和(33)所示,在给定 c_0, c_∞, c_Δ 和 D 后,当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $V_1, V_2 \rightarrow 0$, 即当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,可以在理论上实现扰动观测器的精确收敛.

2.2 高阶幂次扰动观测器

测量噪声的主要影响是会降低扰动观测器的稳态输出精度. 对于双幂次扰动观测器,当其观测误差收敛到原点附近时,无论测量噪声的边界是否大于放大因子,修正项中的高阶幂次函数或低阶幂次函数其中之一总会形成对噪声信号的放大作用. 然而,注意到高阶幂次函数对模值大于 ε (小于 ε) 的误差信号有放大(缩小)的作用,可以考虑如下修正项设计:

$$\phi_1(x) = [x]^\beta, \phi_2(x) = [x]^{2\beta-1}, \quad (40)$$

即通过选择合适的放大因子,利用高阶幂次函数的非线性特性,实现对噪声的抑制.

定理2 针对式(1)所示SISO系统,对 σ 和 u 的测量过程中存在符合假设1的测量噪声,实际不确定扰动满足边界条件 $|d| \leq L$, 则根据式(10)和(40)所示扰动观测器, z_1 和 z_2 对 σ 和 d 的观测误差将在固定时间内收敛到原点的邻域内.

证明 令 $\tilde{e}_1 = \tilde{\sigma} - z_1, \tilde{e}_2 = d - z_2$, 结合式(1)、(10)和(40)以及假设1可得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}_1 = -k_1 \left[\frac{\tilde{e}_1}{\varepsilon} \right]^\beta + \tilde{e}_2 + n_2, \\ \dot{\tilde{e}}_2 = -\frac{k_2}{\varepsilon} \left[\frac{\tilde{e}_1}{\varepsilon} \right]^{2\beta-1} + \dot{d}. \end{cases} \quad (41)$$

令 $\tilde{\eta}_i \triangleq \tilde{e}_i(\varepsilon t)/\varepsilon^{2-i}, i = 1, 2$, 上式可转化为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\eta}}_1 = -k_1 [\tilde{\eta}_1]^\beta + \tilde{\eta}_2 + n_2, \\ \dot{\tilde{\eta}}_2 = -k_2 [\tilde{\eta}_1]^{2\beta-1} + \varepsilon \dot{d}. \end{cases} \quad (42)$$

记 $\tilde{\eta} \triangleq [\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2]^T, \dot{\tilde{\eta}} \triangleq \tilde{g}(\tilde{\eta}), \Delta \triangleq \varepsilon \dot{d}, \Delta \leq \varepsilon L$. 由定理1的证明过程可知,当 $n_2 = 0$ 且 $\Delta = 0$ 时, $\tilde{g}(\tilde{\eta})$ 与 $g_\infty(\eta)$ 具有相同的加权齐次性,即 $\tilde{g}(\tilde{\eta})|_{n_2=\Delta=0}$ 相对于权值 $r = [1, \beta]^T$ 的齐次度为 $d = \beta - 1$.

定义新的状态向量

$$\xi \triangleq [\xi_1, \xi_2]^T \triangleq [[\tilde{\eta}_1]^\beta, [\tilde{\eta}_2]]^T, \quad (43)$$

ξ 的一阶导数为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \beta |\tilde{\eta}_1|^{\beta-1} \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2/\beta & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} \beta |\tilde{\eta}_1|^{\beta-1} n_2 \\ \Delta \end{bmatrix} \triangleq \\ &\beta |\tilde{\eta}_1|^{\beta-1} \mathbf{A} \xi + \mathbf{C}, \end{aligned} \quad (44)$$

其中矩阵 \mathbf{A} 为 Hurwitz 矩阵. 那么,存在正定对称矩阵 \mathbf{P} 使得矩阵

$$\mathbf{Q} \triangleq -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})$$

为正定对称矩阵,如文献[24]所示.

考虑如下李雅普诺夫函数:

$$V(\tilde{\eta}) = \xi^T \mathbf{P} \xi. \quad (45)$$

$V(\tilde{\eta})$ 相对于权值 r 的齐次度 $d_V = 2\beta$, 且当 $\tilde{\eta} = 0$ 时, $V(\tilde{\eta}) = 0$; 当 $\tilde{\eta} \rightarrow \infty$ 时, $V(\tilde{\eta}) \rightarrow \infty$. 对 $V(\tilde{\eta})$ 求一阶导数,并沿 $\tilde{g}(\tilde{\eta})|_{n_2=\Delta=0}$ 展开可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\eta})|_{n_2=\Delta=0} &= \beta |\tilde{\eta}_1|^{\beta-1} \xi^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \xi = \\ &= -\beta |\tilde{\eta}_1|^{\beta-1} \xi^T \mathbf{Q} \xi. \end{aligned} \quad (46)$$

因为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\lambda \tilde{\eta})|_{n_2=\Delta=0} &= -\lambda^{3\beta-1} \beta |\tilde{\eta}_1|^{\beta-1} \xi^T \mathbf{Q} \xi = \\ &= -\lambda^{3\beta-1} \dot{V}(\tilde{\eta})|_{n_2=\Delta=0}, \end{aligned}$$

则 $\dot{V}(\tilde{\eta})|_{n_2=\Delta=0}$ 相对于权值 r 的齐次度为 $3\beta - 1$. 由文献[25]的引理4.2可知,存在

$$\begin{aligned} m_1 &= -\min_{\{z: V(z)=1\}} \dot{V}(z)|_{n_2=\Delta=0}, \\ m_2 &= -\max_{\{z: V(z)=1\}} \dot{V}(z)|_{n_2=\Delta=0}, \end{aligned}$$

使得下式成立:

$$-m_1 V^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}(\tilde{\eta}) \leq \dot{V}(\tilde{\eta})|_{n_2=\Delta=0} \leq -m_2 V^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}(\tilde{\eta}). \quad (47)$$

对 $V(\tilde{\eta})$ 求一阶导数,并沿 $\tilde{g}(\tilde{\eta})$ 展开可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\eta}) &= \\ &= -\beta |\tilde{\eta}_1|^{\beta-1} \xi^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \xi + 2\mathbf{C}^T \mathbf{P} \xi = \\ &= -\beta |\tilde{\eta}_1|^{\beta-1} \xi^T \mathbf{Q} \xi + 2\mathbf{C}^T \mathbf{P} \xi. \end{aligned} \quad (48)$$

对比式(48)与(46),结合式(47)可得

$$\dot{V}(\tilde{\eta}) \leq -m_2 V^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}(\tilde{\eta}) + 2C^T P \xi. \quad (49)$$

鉴于二次型函数存在如下不等式:

$$\lambda_{\min}\{P\} \|\xi\|_2^2 \leq \xi^T P \xi \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\xi\|_2^2, \quad (50)$$

其中: $\lambda_{\min}\{P\}$ 和 $\lambda_{\max}\{P\}$ 分别为正定对称矩阵最小和最大特征值;

$$\|\xi\|_2^2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = |\tilde{\eta}_1|^{2\beta} + |\tilde{\eta}_2|^2$$

为 ξ 欧几里得范数的平方. 那么,选择常数 $\kappa \in [0, 1]$ 可以将式(49)进一步化简为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\eta}) \leq & -m_2 V^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}(\tilde{\eta}) + 2\sqrt{2}c_{\max} \frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} V^{\frac{1}{2}}(\tilde{\eta}) \leq \\ & -\kappa m_2 V^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}(\tilde{\eta}) - (1-\kappa)m_2 V^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}(\tilde{\eta}) + \\ & 2\sqrt{2}c_{\max} \frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} V^{\frac{1}{2}}(\tilde{\eta}), \end{aligned} \quad (51)$$

其中 $c_{\max} = \max\{|\beta|\tilde{\eta}_1|^{\beta-1}n_2, |\Delta|\}$. 令

$$\begin{aligned} & -(1-\kappa)m_2 V^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}(\tilde{\eta}) + \\ & 2\sqrt{2}c_{\max} \frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} V^{\frac{1}{2}}(\tilde{\eta}) \leq 0, \end{aligned}$$

可解得

$$V(\tilde{\eta}) \geq \left(\frac{2\sqrt{2}c_{\max}\lambda_{\max}\{P\}}{(1-\kappa)m_2\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} \right)^{\frac{2\beta-1}{\beta}} \triangleq \theta, \quad (52)$$

则式(51)可化简为

$$\dot{V}(\tilde{\eta}) \leq -\kappa m_2 V^{\frac{3\beta-1}{2\beta}}(\tilde{\eta}), \quad \forall V(\tilde{\eta}) \geq \theta. \quad (53)$$

对上式积分,可以求解出 $V(\tilde{\eta})$ 由初始状态 $V(\tilde{\eta}_0)$ 收敛到 θ 的时间为

$$\begin{aligned} t \leq & \frac{2\beta}{\kappa m_2(\beta-1)} \left(\frac{1}{\theta^{\frac{\beta-1}{2\beta}}} - \frac{1}{V(\tilde{\eta}_0)^{\frac{\beta-1}{2\beta}}} \right) \leq \\ & \frac{2\beta}{\kappa m_2(\beta-1)} \frac{1}{\theta^{\frac{\beta-1}{2\beta}}} = T_{\max}. \end{aligned} \quad (54)$$

当 $V(\tilde{\eta})$ 收敛到 θ 时,结合式(50)和(52)可求得

$$|\tilde{\eta}_1|^{2\beta} \leq \|\xi\|_2^2 \leq \frac{\theta}{\lambda_{\min}\{P\}},$$

即

$$|\tilde{\eta}_1| \leq \frac{1}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2\beta}}\{P\}} \left(\frac{2\sqrt{2}c_{\max}\lambda_{\max}\{P\}}{(1-\kappa)m_2\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} \triangleq \vartheta_1. \quad (55)$$

同理可得

$$|\tilde{\eta}_2| \leq \frac{1}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} \left(\frac{2\sqrt{2}c_{\max}\lambda_{\max}\{P\}}{(1-\kappa)m_2\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} \right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \triangleq \vartheta_2. \quad (56)$$

鉴于 $\tilde{\eta}_i \triangleq \tilde{e}_i(\varepsilon t)/\varepsilon^{2-i}, i = 1, 2$, 以及假设1,扰动观测

器的观测误差将在固定时间 T_{\max} 前收敛到原点的邻域内,即

$$|\sigma - z_1| \leq \varepsilon \vartheta_1 + \omega_1, \quad (57)$$

$$|d - z_2| \leq \vartheta_2. \quad (58)$$

综上,定理2得证. \square

注3 定理2所示扰动观测器仅适用小幅值测量噪声的情况,因为在参数设计过程中,期望 $\varepsilon > \omega_1 \geq |n_1|$, 从而利用高阶幂次函数对小幅值误差的削弱作用,减小测量噪声对观测结果的影响. 当测量噪声不满足假设1时,可以考虑文献[19]中提出的扩张状态观测器

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = k_1 \text{fal}\left(\frac{\tilde{\sigma} - z_1}{\varepsilon}, \alpha, \delta\right) + z_2 + f + u, \\ \dot{z}_2 = \frac{k_2}{\varepsilon} \text{fal}\left(\frac{\tilde{\sigma} - z_1}{\varepsilon}, \alpha, \delta\right). \end{cases} \quad (59)$$

其中

$$\text{fal}(x, r, \delta) = \begin{cases} \frac{x}{\delta^{1-r}}, & |x| \leq \delta; \\ |x|^r \text{sign}(x), & |x| > \delta. \end{cases} \quad (60)$$

即引入线性函数削弱测量噪声的影响.

2.3 广义超螺旋扰动观测器

为了与上述两种扰动观测器进行对比分析,以固定时间收敛精确鲁棒微分器^[4]为基础,设计如下扰动观测器.

定理3 针对式(1)所示SISO系统,假设 σ, f 和 u 均为已知量,不确定扰动满足边界条件 $|\dot{d}| \leq L$, 考虑如下扰动观测器:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = k_1 \phi_1(\sigma - z_1) + z_2 + f + u, \\ \dot{z}_2 = k_2 \phi_2(\sigma - z_1). \end{cases} \quad (61)$$

其中

$$\begin{cases} \phi_1(x) = [x]^{\frac{1}{2}} + \mu[x]^{\frac{3}{2}}, \\ \phi_2(x) = \frac{1}{2}[x]^0 + 2\mu[x] + \frac{3}{2}\mu^2[x]^2, \end{cases} \quad (62)$$

$\mu > 0$; z_1 和 z_2 将在固定时间内收敛到 σ 和 d ; k_1, k_2 的取值满足

$$\left\{ k_1 \in R, k_2 \in R \mid 0 < k_1 \leq 2\sqrt{L}, k_2 > \frac{k_1^2}{4} + \frac{4L^2}{k_1^2} \right\} \cup \left\{ k_1 \in R, k_2 \in R \mid k_1 > 2\sqrt{L}, k_2 > 2L \right\}. \quad (63)$$

证明 令 $e_1 = \sigma - z_1, e_2 = d - z_2$, 结合式(1)可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 \phi_1(e_1) + e_2, \\ \dot{e}_2 = -k_2 \phi_2(e_1) + \dot{d}. \end{cases} \quad (64)$$

由于不确定扰动的一阶导数满足边界条件 $|\dot{d}| \leq L$, 增益系数 k_1, k_2 的取值在边界条件 L 定义的集合内取值. 对比式(64)和文献[4]中的式(3),由文献[4]中

的定理2可知, e_1 、 e_2 将在固定时间内收敛到零, 即 z_1 和 z_2 将在固定时间内收敛到 σ 和 d . \square

注4 由于式(61)所示扰动观测器与精确鲁棒微分器^[4]具有相同的误差动力学, 扰动观测器的收敛精度与微分器的收敛精度相同.

3 数学仿真与适用性分析

3.1 算例

考虑如下一阶不确定系统:

$$\dot{\sigma}(t) = f(t) + d(t) + u(t), \sigma_0 = 5.0. \quad (65)$$

其中

$$f(t) = 2.5 \sin(0.5t) - 0.5\pi \cos(\pi t);$$

$$d(t) = \begin{cases} 5.0 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right), & t \leq 6.0; \\ -5.0 + 2.5(t - 6.0), & 6.0 < t \leq 10.0; \\ -5.0 \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}(t - 10.0)\right)\right), & 10.0 < t \leq 16.0; \\ 0, & t > 16.0; \end{cases}$$

$$ut = -k[x]^{1/2} - f(t).$$

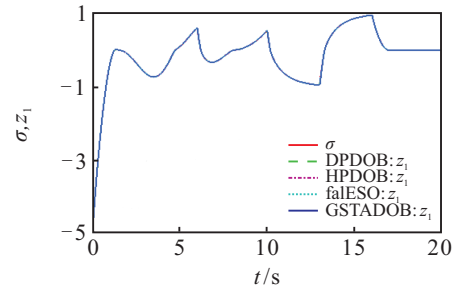
与第1节提出的问题对应, 后文将以上述模型为基础, 对本文涉及到的几种扰动观测器的性能进行对比分析.

3.2 仿真分析

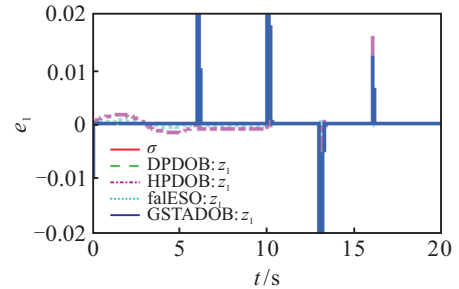
对定理1~定理3和注3所示扰动观测器分别在无测量噪声和有测量噪声条件下进行仿真分析, 并将双幂次扰动观测器、高阶幂次扰动观测器、广义超螺旋扰动观测器和基于fal函数的ESO分别记为DPDOB、HPDOB、GSTADOB和falESO. 仿真共进行20s, 以欧拉法进行积分运算, 积分步长为0.001s. 扰动观测器参数设置如下: $k_1 = 2.0, k_2 = 1.5, \varepsilon = 0.02, \alpha = 0.8, \beta = 1.2$; falESO中, $\delta = 1$; GSTADOB中, $k_1 = 3.0\sqrt{L}, k_2 = 2.2L, L = 6.0, \mu = 1.0$. 扰动观测器的初值均设置为 $z_1(0) = \sigma_0, z_2(0) = 0.0$. 控制器中参数设置为 $k = 2.0, p = 0.5$.

无测量噪声和有测量噪声的仿真结果分别如图1~图4所示. 图1(b)和图3(b)为各扰动观测器输出 z_1 对系统输出信号 σ 的跟踪观测误差, 图2(b)和图4(b)为各扰动观测器输出 z_2 对系统中集总扰动 d 的跟踪观测误差. 总体而言, 4种扰动观测器均可以实现对信号和扰动的快速跟踪观测, 而且以 $z_1(0) = \sigma_0, z_2(0) = 0$ 为观测器的初始值, 能够实现观测结果的平滑收敛.

观察理想采样条件下的仿真结果(图1和图2)可见: GSTADOB虽然理论上具备精确收敛特性, 但

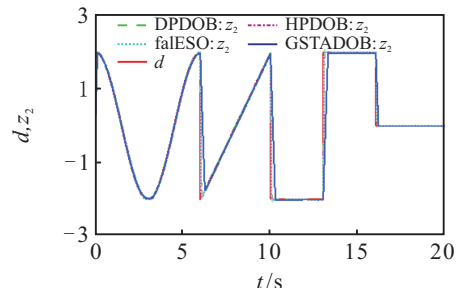


(a) 观测结果

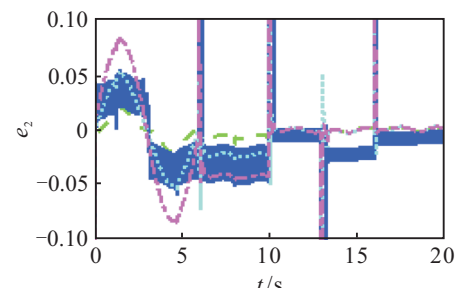


(b) 观测误差

图1 无测量噪声时扰动观测器对系统输出 σ 的跟踪观测结果



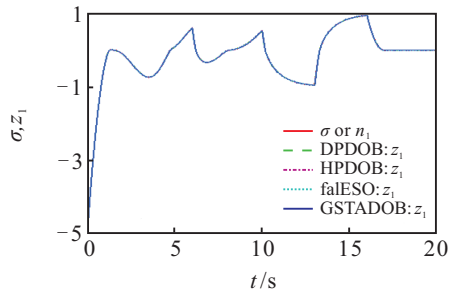
(a) 观测结果



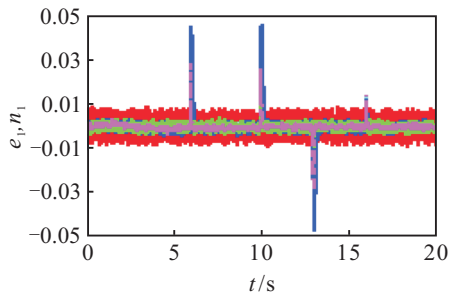
(b) 观测误差

图2 无测量噪声时扰动观测器对不确定扰动 d 的观测结果

是在有限采样频率下, 不连续控制项的高频切换造成了稳态扰动观测结果小幅值高频振荡, 降低了观测结果的品质; 其他3种扰动观测器的收敛速度较GSTADOB稍快, 能够将观测误差控制在一个较小的邻域内. 基于误差放大策略的3种扰动观测器对时变不确定扰动的观测误差较大, 且DPDOB、falESO和HPDOB的误差带依次增大(如图2(b)), 这是扰动观测器中修正项的非线性效应的直接例证, 当 $|e_1| < \varepsilon$ 时(如图1(b)), 低阶幂次函数、线性函数、高阶幂次函数的修正能力依次减弱.

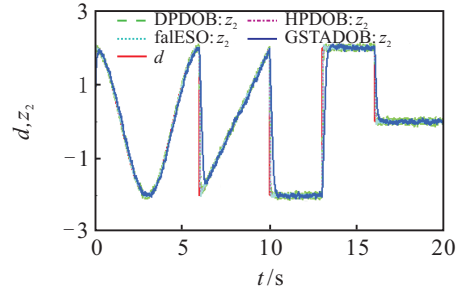


(a) 观测结果

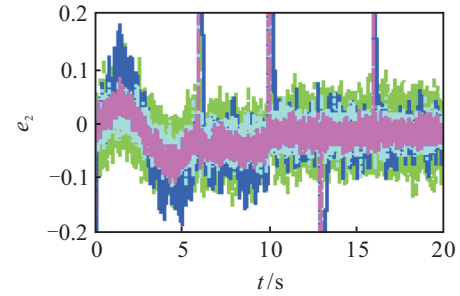


(b) 观测误差

图3 有测量噪声时扰动观测器对系统输出 σ 的跟踪观测结果



(a) 观测结果



(b) 观测误差

图4 有测量噪声时扰动观测器对不确定扰动 d 的观测结果

观察采样噪声条件下的仿真结果(图3和图4)可见,对 σ 的测量噪声 n_1 如图3(b)所示,其幅值小于参数 ε 的取值, n_2 的输出与 n_1 类同.在情景2下,如图3(b)和图4(b)中的 e_1 和 e_2 曲线所示,理想采样条件下收敛精度较低的HPDOB噪声抑制能力变得相对更好,falESO和DPDOB的噪声抑制能力依次减弱,GSTADOB的噪声抑制能力表现最差,波动非常明显.

针对时变不确定扰动,HPDOB的表现比较平均,误差带基本处在 $(-0.1, 0.1)$ 之间.

3.3 扰动观测器的特性与实用方案

扰动观测器的选择需要根据系统的可用信息,对收敛速度、精确性的要求以及系统运行过程中的采样频率等进行综合的选择,本文所示4种扰动观测器的特性如表1所示.

表1 4种适用于一阶不确定系统的扰动观测器性能对比分析

观测器形式	是否需要扰动边界值	设计参数	是否存在抖振现象	收敛速度与收敛精度	测量噪声抑制能力
DPDOB	否	$k_1, k_2, \varepsilon, \alpha, \beta$	否	依赖于 ε 的取值,当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,	依赖于 ε (和 δ)的取值,当噪声幅值
HPDOB	否	$k_1, k_2, \varepsilon, \beta$	否	观测器的收敛速度与观测误	小于 ε 时,高阶幂次扰动观测器相
falESO	否	$k_1, k_2, \varepsilon, \alpha, \delta$	否	差将趋于无穷小	对最优;反之,falESO相对最优
GSTADOB	是	k_1, k_2, μ, L	是	依赖于 L 取值或采样频率	依赖于 L 取值或采样频率

由表1可见:GSTADOB的参数选取和收敛速度均依赖于对集总不确定扰动边界值的确定,其理论上的精确收敛特性在实际应用中容易产生抖震现象;其他3类扰动观测器并不需要集总扰动的边界值,在参数设计中, k_1, k_2, α, β 等均可以按照简单的Hurtwiz多项式或者给定区间进行选择,只有 ε 需要根据采样频率、期望收敛精度等进行调试.特别强调,在仿真中已经验证,根据跟踪信号的输入设置二阶扰动观测器的初值为 $z_1(0) = \sigma_0, z_2(0) = 0$,能够有效避免观测器输出结果的剧烈波动,获得平滑的观测结果. $z_1(0)$ 的初始化方法同样适用于高阶观测器,以削弱峰值效应影响.

4 结论

本文基于时间尺度范式和系统的齐次性理论设计了两种固定时间收敛扰动观测器,通过完整的理论分析讨论了两种扰动观测器的稳定性;提出了超螺旋扰动观测器,通过与超螺旋微分器的对比分析简单讨论了其稳定性;完成了不同仿真条件下,多种扰动形式下对扰动观测器性能的仿真测试,并得出以下结论:

1) 固定时间收敛扰动观测器具有较高的收敛速度,其本质在于对不同阶幂次函数的合理应用,而误差放大策略可以扩展幂次函数支配范围,从而进一步提升观测器收敛速度,并简化参数整定过程;

2) 在小幅值高频测量噪声影响下,利用幂次函数的非线性特性,高阶幂次扰动观测器较双幂次扰动观测器和广义超螺旋扰动观测器具有更好的噪声抑制能力;

3) 仿真中总结的二阶扰动观测器初值选取方法能够使扰动观测器实现观测结果的平滑收敛,能够有效地避免扰动观测器收敛过程对被控系统动态品质的影响.

参考文献(References)

- [1] Chen W H, Yang J, Guo L, et al. Disturbance observer based control and related methods-an overview[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2016, 63(2): 1083-1095.
- [2] Shtessel, Y. Edwards C. Fridman L. et al. Sliding modes control and observation [M]. New York: Springer, 2014: 251-320.
- [3] 韩京清. 自抗扰控制技术——估计补偿不确定因素的控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 183-287. (Han J Q. Active disturbance rejection control technique — the technique for estimating and compensating the uncertainties[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008: 183-287.)
- [4] Cruz-Zavala E, Moreno J A, Fridman L M. Uniform robust exact differentiator[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(11): 2727-2733.
- [5] Basin M, Yu P, Shtessel Y. Finite- and fixed-time differentiators utilizing higher-order sliding mode techniques[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(8): 1144-1152.
- [6] Andrieu V, Praly L, Astolfi A. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2008, 47(4): 1814-1850.
- [7] Polyakov A, Fridman L. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems[J]. J of the Franklin Institute, 2014, 351(4): 1831-1865.
- [8] 李慧洁, 蔡远利. 基于双幂次趋近律的滑模控制方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 498-502. (Li H J, Cai Y L. Sliding mode control with double power reaching law[J]. Control and Decision, 2016, 31(3): 498-502.)
- [9] Basin M, Panathula C B, Shtessel Y. Adaptive uniform finite-/fixed-time convergent second-order sliding-mode control[J]. Int J of Control, 2016, 89(9): 1777-1787.
- [10] Cruz-Zavala E, Moreno J A. A new class of fast finite-time discontinuous controllers[C]. The 13th Int Workshop on Variable Structure Systems. IEEE, 2014: 1-6.
- [11] Angulo M T, Moreno J A, Fridman L. Robust exact uniformly convergent arbitrary order differentiator[J]. Automatica, 2013, 49(8): 2489-2495.
- [12] Lopez-Ramirez F, Polyakov A, Efimov D, et al. Finite-time and fixed-time observers design via implicit Lyapunov function[C]. 2016 European Control Conf. Aalborg: IEEE, 2016: 289-294.
- [13] Ni J, Liu L, Chen M, et al. Fixed-time disturbance observer design for brunovsky system[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2017, 65(3): 341-345.
- [14] Levant A. Robust exact differentiation via sliding mode technique[J]. Automatica, 1998, 34(3): 379-384.
- [15] Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control[J]. Int J of Control, 2003, 76(9/10): 924-941.
- [16] Guo B Z, Zhao Z. On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(6): 420-430.
- [17] Gao Z. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning[C]. Proc of the American Control Conference. Denver: IEEE, 2006: 4989-4996.
- [18] Zheng Q, Gao Z. Active disturbance rejection control: Between the formulation in time and the understanding in frequency[J]. Control Theory and Technology, 2016, 14(3): 250-259.
- [19] Zhao Z L, Guo B Z. A nonlinear extended state observer based on fractional power functions[J]. Automatica, 2017, 81: 286-296.
- [20] Zhu Z, Xu D, Liu J, et al. Missile guidance law based on extended state observer[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2013, 60(12): 5882-5891.
- [21] Kumar S R, Rao S, Ghose D. Nonsingular terminal sliding mode guidance with impact angle constraints[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(4): 1114-1130.
- [22] Perruquetti W, Floquet T, Moulay E. Finite-time observers: Application to secure communication[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(1): 356-360.
- [23] Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field[J]. Systems & Control Letters, 1992, 19(6): 467-473.
- [24] Yang F, Wei C, Cui N, et al. Adaptive generalized super-twisting algorithm based guidance law design[C]. The 14th Int Workshop on Variable Structure Systems. Nanjing: IEEE, 2016: 47-52.
- [25] Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 2005, 17(2): 101-127.

(责任编辑: 齐 霖)