

## 毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关测度

刘卫锋<sup>†</sup>, 何霞, 常娟

(郑州航空工业管理学院 理学院, 郑州 450015)

**摘要:** 毕达哥拉斯犹豫模糊集,既能描述隶属度与非隶属度之和超过1、而平方和不超过1的模糊现象,又能表达决策者在隶属度和非隶属度上的犹豫不决,因此它是表达不确定现象的一个强有力工具.考虑到相关测度在统计学和管理科学中发挥着重要的作用,在模糊集、直觉模糊集以及毕达哥拉斯模糊集等相关测度基础上,研究毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关测度.为此,定义毕达哥拉斯犹豫模糊集的信息能量、相关指标以及相关系数,证明相关系数的性质.由于决策中经常要考虑到属性权重,定义毕达哥拉斯犹豫模糊集的加权相关系数,并讨论其性质.最后,通过求出每个方案与正理想方案之间的加权相关系数,实现方案的排序择优,并通过算例表明其可行性与有效性.

**关键词:** 毕达哥拉斯犹豫模糊集; 相关测度; 相关系数; 毕达哥拉斯模糊集; 犹豫模糊集; 决策

中图分类号: O223; C934

文献标志码: A

### Correlation measures of Pythagorean hesitant fuzzy set

LIU Wei-feng<sup>†</sup>, HE Xia, CHANG Juan

(College of Science, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450015, China)

**Abstract:** Pythagorean hesitant fuzzy set, which can not only describe the fuzzy phenomenon that the sum of membership degree and nonmembership degree may be bigger than 1 but their square sum is equal to or less than 1, but also express hesitations in membership degree and nonmembership degree, can be considered as a powerful tool for expressing uncertain information in the process of decision making. Considering that correlation measures play important role in statistics and management science, in this paper, correlation measures of the Pythagorean hesitant fuzzy set is studied. On the basis of the definition of the informational energy of the Pythagorean hesitant fuzzy set, the correlation coefficients between Pythagorean hesitant fuzzy sets are defined, and their natures are discussed. Then, the weights of attributes are often taken into account, and the concept of the weighted correlation coefficient between Pythagorean hesitant fuzzy sets is also introduced, and the natures are studied. Finally, through the weighted correlation coefficients between each alternative and the positive ideal alternative, the ranking order of all alternatives can be determined and the best alternative can be identified. An example is given to illustrate the feasibility and applicability of the proposed method.

**Keywords:** Pythagorean hesitant fuzzy set; correlation measure; correlation coefficient; Pythagorean fuzzy set; hesitant fuzzy set; decision making

## 0 引言

作为模糊集<sup>[1]</sup>的一种推广,直觉模糊集<sup>[2]</sup>同时考虑了元素属于集合的隶属度和非隶属度,从而能够更加准确地描述客观世界的模糊本质.目前,关于直觉模糊集的研究已经取得了一系列的成果<sup>[3-9]</sup>.考虑到直觉模糊集局限于描述隶属度和非隶属度之和不超过1的不确定情况,Yager通过研究区间值模糊集<sup>[10]</sup>、直觉模糊集等集合的补运算,提出了毕达哥

拉斯模糊集<sup>[11-12]</sup>,使其能描述隶属度和非隶属度之和超过1,而其平方和不超过1的模糊现象,从而推广了直觉模糊集.最近毕达哥拉斯模糊集引起了许多学者的关注,其中Zhang等<sup>[13]</sup>研究了基于毕达哥拉斯模糊集的TOPSIS方法(Technique for order preference by similarity to ideal solution,逼近理想解法)及其应用;彭新东等<sup>[14]</sup>将毕达哥拉斯模糊集与软集<sup>[15]</sup>相结合,提出了毕达哥拉斯模糊软集,并探

收稿日期: 2017-11-19; 修回日期: 2018-04-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11501525); 河南省杰出青年基金项目(2018JQ0004); 航空科学基金项目(2016ZD55019); 河南省高等学校重点科研项目(18A110032).

作者简介: 刘卫锋(1976-),男,副教授,从事模糊数学、决策理论等研究;何霞(1976-),女,副教授,从事模糊数学等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: lwf0519@163.com.

讨了其决策应用;Gou等<sup>[16]</sup>研究了毕达哥拉斯模糊数的连续性及微分等内容;Peng等<sup>[17]</sup>研究了区间值毕达哥拉斯模糊集及其决策应用;刘卫锋等<sup>[18-19]</sup>研究了毕达哥拉斯模糊加权平均算子和加权几何算子以及交叉平均算子;Garg<sup>[20-21]</sup>提出了毕达哥拉斯模糊 Einstein 集成算子;Wu等<sup>[22]</sup>研究了毕达哥拉斯模糊 Hamacher 运算及其决策应用;何霞等<sup>[23]</sup>研究了毕达哥拉斯模糊幂平均算子;Peng等<sup>[24]</sup>研究了基于 MABAC 方法 (Multi- attributive border approximation area comparison, 每个属性的边界近似域比较) 的毕达哥拉斯模糊 Choquet 积分及其决策应用;李德清等<sup>[25]</sup>定义了毕达哥拉斯模糊集的距离测度;Garg<sup>[26]</sup>定义了毕达哥拉斯模糊集的相关测度;张超等<sup>[27]</sup>将毕达哥拉斯模糊集应用到粗糙集, 定义了毕达哥拉斯粗糙模糊集, 并研究了其决策应用;刘卫锋等<sup>[28]</sup>将毕达哥拉斯模糊集与犹豫模糊集<sup>[29]</sup>相结合, 定义了毕达哥拉斯犹豫模糊集, 并给出了毕达哥拉斯犹豫模糊数的加权算术和加权几何平均算子. 分析上述研究文献, 可以将毕达哥拉斯模糊集的研究大致分为3类: 1) 关于毕达哥拉斯模糊集的相关理论基础研究<sup>[11-12,16]</sup>; 2) 毕达哥拉斯模糊集在决策中的应用<sup>[13-14,17-26]</sup>; 3) 将毕达哥拉斯集与其他类型集合相结合, 得到各种复合毕达哥拉斯模糊集<sup>[14,27-28]</sup>.

由于第3类中的毕达哥拉斯犹豫模糊集, 既能反映出决策者的犹豫不决, 又能描述隶属度和非隶属的和超过1, 而它们的平方和不大于1的模糊现象, 该集合同时具有毕达哥拉斯模糊集和犹豫模糊集的优点, 可以预见它是描述现实中的不确定性和模糊现象的一个有力工具. 但是, 目前关于毕达哥拉斯犹豫模糊集的研究文献和成果较少<sup>[28]</sup>, 为此, 本文通过研究毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关系数, 拓展毕达哥拉斯犹豫模糊集在多属性决策中的应用. 根据研究目的, 首先定义毕达哥拉斯犹豫模糊集的信息能量、毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关指标以及相关系数等概念, 并证明它们的性质; 然后考虑到属性权重在多属性决策中起着重要作用, 又定义了毕达哥拉斯犹豫模糊集的加权相关系数, 并讨论其性质; 最后通过计算每个决策方案与正理想方案的相关系数, 提出一种利用相关系数实现方案排序的方法, 并通过实例表明其可行性.

### 1 相关概念

**定义1**<sup>[1]</sup> 设  $X$  为论域, 称  $A = \{\langle x, \mu_A(x) \rangle | 0 \leq \mu_A(x) \leq 1\}$  为  $X$  上的一个模糊集, 其中  $\mu_A(x)$  表示  $X$  中元素  $x$  属于  $A$  的隶属度.

**定义2**<sup>[2]</sup> 设  $X$  为论域, 称  $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X\}$  为  $X$  上的一个直觉模糊集, 其中  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1], \nu_A : X \rightarrow [0, 1]$  是  $X$  上的模糊集,  $\mu_A(x), \nu_A(x)$  分别表示  $X$  上元素  $x$  属于  $A$  的隶属度和非隶属度, 且  $\forall x \in X, \mu_A(x), \nu_A(x) \in [0, 1]$ , 有  $\mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ .

**定义3**<sup>[11-12]</sup> 设  $X$  为论域, 称  $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X\}$  为  $X$  上的一个毕达哥拉斯模糊集, 其中  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1], \nu_A : X \rightarrow [0, 1]$  是  $X$  上的模糊集,  $\mu_A(x), \nu_A(x)$  分别表示  $X$  上元素  $x$  属于  $A$  的隶属度和非隶属度, 且  $\forall x \in X, \mu_A(x), \nu_A(x) \in [0, 1]$ , 有  $\mu_A^2(x) + \nu_A^2(x) \leq 1$ .

**定义4**<sup>[29]</sup> 设  $X$  为论域, 称  $A = \{\langle x, h_A(x) \rangle | x \in X\}$  为  $X$  上的一个犹豫模糊集, 其中  $h_A(x)$  表示  $X$  上元素  $x$  属于  $A$  的所有可能隶属度组成的集合.

**定义5**<sup>[11-12]</sup> 设  $X$  为论域, 称  $A = \{\langle x, \Gamma_A(x), \Psi_A(x) \rangle | x \in X\}$  为  $X$  上的一个毕达哥拉斯犹豫模糊集, 其中  $\Gamma_A(x), \Psi_A(x)$  为  $[0, 1]$  的非空有限子集, 分别表示  $X$  上元素  $x$  属于  $A$  的可能隶属度和可能非隶属度, 且  $\forall x \in X, \forall \mu_A(x) \in \Gamma_A(x), \forall \nu_A(x) \in \Psi_A(x)$ , 使得  $\mu_A^2(x) + \nu_A^2(x) \leq 1$ .

称

$$\Pi_A(x) = \bigcup_{\mu_A(x) \in \Gamma_A(x), \nu_A(x) \in \Psi_A(x)} \{\sqrt{1 - \mu_A^2(x) - \nu_A^2(x)}\}$$

为犹豫度集合.

由于毕达哥拉斯犹豫模糊集由可能隶属度集合、可能非隶属度集合以及犹豫度集合3部分组成, 可将论域  $X$  上的毕达哥拉斯犹豫模糊集表示为  $A = \{\langle x, \Gamma_A(x), \Psi_A(x), \Pi_A(x) \rangle | x \in X\}$ .

称  $\langle \Gamma_A(x), \Psi_A(x), \Pi_A(x) \rangle$  为毕达哥拉斯犹豫模糊数, 为方便起见, 将毕达哥拉斯犹豫模糊数记作  $\alpha = \langle \Gamma_\alpha, \Psi_\alpha, \Pi_\alpha \rangle$ .

### 2 毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关测度

在文献[7-8, 26]研究成果的启发下, 首先定义毕达哥拉斯犹豫模糊集的信息能量和相关指标, 然后定义毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关系数.

**定义6** 设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  为论域,  $A = \{\langle x_i, \Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  为  $X$  上的毕达哥拉斯犹豫模糊集,  $A$  的信息能量定义为

$$E(A) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{A_{\sigma(s)}}^4(x_i) + \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{A_{\sigma(t)}}^4(x_i) + \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{A_{\sigma(p)}}^4(x_i) \right).$$

其中:  $k_i = |\Gamma_A(x_i)|, l_i = |\Psi_A(x_i)|, h_i = |\Pi_A(x_i)|$  分别表示集合  $\Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i)$  的基数,  $i = 1, 2,$

... , n;  $\mu_{A_{\sigma(s)}}(x_i) \in \Gamma_A(x_i), \nu_{A_{\sigma(t)}}(x_i) \in \Psi_A(x_i), \pi_{A_{\sigma(p)}}(x_i) \in \Pi_A(x_i)$  分别表示  $\Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i)$  中从小到大排列的第  $\sigma(s), \sigma(t), \sigma(p)$  个元素.

设  $A = \{\langle x_i, \Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}$ ,  $B = \{\langle x_i, \Gamma_B(x_i), \Psi_B(x_i), \Pi_B(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  为论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的毕达哥拉斯犹豫模糊集. 一般情况下,  $|\Gamma_A(x_i)| \neq |\Gamma_B(x_i)|, |\Psi_A(x_i)| \neq |\Psi_B(x_i)|, |\Pi_A(x_i)| \neq |\Pi_B(x_i)|$ , 为了使  $|\Gamma_A(x_i)| = |\Gamma_B(x_i)|, |\Psi_A(x_i)| = |\Psi_B(x_i)|, |\Pi_A(x_i)| = |\Pi_B(x_i)|$ , 可以采用如下两种方法: 1) 在基数较小的集合中添加多个最小元素(保守思想); 2) 在基数较小的集合中添加多个最大元素(激进思想).

为了统一起见, 如果未作说明, 文中均假设在基数较小的集合中添加元素时持保守思想, 即在基数较小的集合中添加多个最小元素. 另外, 在下面的定义和定理中, 不妨假设  $|\Gamma_A(x_i)| = |\Gamma_B(x_i)| = k_i, |\Psi_A(x_i)| = |\Psi_B(x_i)| = l_i, |\Pi_A(x_i)| = |\Pi_B(x_i)| = h_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

**定义7** 设  $A = \{\langle x_i, \Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}, B = \{\langle x_i, \Gamma_B(x_i), \Psi_B(x_i), \Pi_B(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  为论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的毕达哥拉斯犹豫模糊集,  $A$  与  $B$  的相关指标定义为

$$C(A, B) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_i) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_i) + \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_i) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_i) + \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_i) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_i) \right).$$

**定理1** 设  $A = \{\langle x_i, \Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}, B = \{\langle x_i, \Gamma_B(x_i), \Psi_B(x_i), \Pi_B(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  为论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的毕达哥拉斯犹豫模糊集, 则有:

- 1)  $C(A, B) = C(B, A)$ ;
- 2)  $C(A, A) = E(A)$ .

**定义8** 设  $A = \{\langle x_i, \Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}, B = \{\langle x_i, \Gamma_B(x_i), \Psi_B(x_i), \Pi_B(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  为论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的毕达哥拉斯犹豫模糊集,  $A$  与  $B$  的相关系数定义为

$$\rho(A, B) = \frac{C(A, B)}{\sqrt{E(A)}\sqrt{E(B)}}.$$

其中

$$C(A, B) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_i) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_i) + \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_i) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_i) + \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_i) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_i) \right).$$

$$E(A) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{A_{\sigma(s)}}^4(x_i) + \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{A_{\sigma(t)}}^4(x_i) + \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{A_{\sigma(p)}}^4(x_i) \right),$$

$$E(B) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{B_{\sigma(s)}}^4(x_i) + \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{B_{\sigma(t)}}^4(x_i) + \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{B_{\sigma(p)}}^4(x_i) \right).$$

显然, 如果毕达哥拉斯犹豫模糊集  $A$  与  $B$  退化为毕达哥拉斯模糊集时, 定义6~定义8中的信息能量、相关指标和相关系数就退化为文献[26]中相应的毕达哥拉斯模糊集的信息能量、相关指标和相关系数.

**定理2** 设  $A = \{\langle x_i, \Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}, B = \{\langle x_i, \Gamma_B(x_i), \Psi_B(x_i), \Pi_B(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  为论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的毕达哥拉斯犹豫模糊集, 则有:

- 1)  $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ ;
- 2)  $0 \leq \rho(A, B) \leq 1$ ;
- 3) 若  $A = B$ , 则  $\rho(A, B) = 1$ .

**证明** 1)和3)显然, 仅证明2).

由定义8可知  $0 \leq \rho(A, B)$ , 下面证  $\rho(A, B) \leq 1$ . 有

$$C(A, B) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_i) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_i) + \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_i) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_i) + \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_i) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_i) \right) =$$

$$\frac{1}{k_1} \sum_{s=1}^{k_1} \mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_1) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_1) + \frac{1}{k_2} \sum_{s=1}^{k_2} \mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_2) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_2) + \dots + \frac{1}{k_n} \sum_{s=1}^{k_n} \mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_n) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_n) +$$

$$\frac{1}{l_1} \sum_{t=1}^{l_1} \nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_1) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_1) + \frac{1}{l_2} \sum_{t=1}^{l_2} \nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_2) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_2) + \dots + \frac{1}{l_n} \sum_{t=1}^{l_n} \nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_n) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_n) +$$

$$\frac{1}{h_1} \sum_{p=1}^{h_1} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_1) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_1) + \frac{1}{h_2} \sum_{p=1}^{h_2} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_2) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_2) + \dots + \frac{1}{h_n} \sum_{p=1}^{h_n} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_n) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_n).$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1} \sum_{p=1}^{h_1} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_1) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_1) + \\ & \frac{1}{h_2} \sum_{p=1}^{h_2} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_2) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_2) + \cdots + \\ & \frac{1}{h_n} \sum_{p=1}^{h_n} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_n) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_n) = \\ & \sum_{s=1}^{k_1} \frac{\mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_1) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_1)}{\sqrt{k_1}} + \\ & \sum_{s=1}^{k_2} \frac{\mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_2) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_2)}{\sqrt{k_2}} + \cdots + \\ & \sum_{s=1}^{k_n} \frac{\mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_n) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_n)}{\sqrt{k_n}} + \\ & \sum_{t=1}^{l_1} \frac{\nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_1) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_1)}{\sqrt{l_1}} + \\ & \sum_{t=1}^{l_2} \frac{\nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_2) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_2)}{\sqrt{l_2}} + \cdots + \\ & \sum_{t=1}^{l_n} \frac{\nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_n) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_n)}{\sqrt{l_n}} + \\ & \sum_{p=1}^{h_1} \frac{\pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_1) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_1)}{\sqrt{h_1}} + \\ & \sum_{p=1}^{h_2} \frac{\pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_2) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_2)}{\sqrt{h_2}} + \cdots + \\ & \sum_{p=1}^{h_n} \frac{\pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_n) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_n)}{\sqrt{h_n}}. \end{aligned}$$

由柯西-施瓦兹不等式可知

$$\begin{aligned} (C(A, B))^2 \leq & \left[ \frac{1}{k_1} \sum_{s=1}^{k_1} \mu_{A_{\sigma(s)}}^4(x_1) + \frac{1}{k_2} \sum_{s=1}^{k_2} \mu_{A_{\sigma(s)}}^4(x_2) + \cdots + \right. \\ & \frac{1}{k_n} \sum_{s=1}^{k_n} \mu_{A_{\sigma(s)}}^4(x_n) + \frac{1}{l_1} \sum_{t=1}^{l_1} \nu_{A_{\sigma(t)}}^4(x_1) + \\ & \frac{1}{l_2} \sum_{t=1}^{l_2} \nu_{A_{\sigma(t)}}^4(x_2) + \cdots + \frac{1}{l_n} \sum_{t=1}^{l_n} \nu_{A_{\sigma(t)}}^4(x_n) + \\ & \frac{1}{h_1} \sum_{p=1}^{h_1} \pi_{A_{\sigma(p)}}^4(x_1) + \frac{1}{h_2} \sum_{p=1}^{h_2} \pi_{A_{\sigma(p)}}^4(x_2) + \cdots + \\ & \left. \frac{1}{h_n} \sum_{p=1}^{h_n} \pi_{A_{\sigma(p)}}^4(x_n) \right] \left[ \frac{1}{k_1} \sum_{s=1}^{k_1} \mu_{B_{\sigma(s)}}^4(x_1) + \right. \\ & \frac{1}{k_2} \sum_{s=1}^{k_2} \mu_{B_{\sigma(s)}}^4(x_2) + \cdots + \frac{1}{k_n} \sum_{s=1}^{k_n} \mu_{B_{\sigma(s)}}^4(x_n) + \\ & \left. \frac{1}{l_1} \sum_{t=1}^{l_1} \nu_{B_{\sigma(t)}}^4(x_1) + \frac{1}{l_2} \sum_{t=1}^{l_2} \nu_{B_{\sigma(t)}}^4(x_2) + \cdots + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{1}{l_n} \sum_{t=1}^{l_n} \nu_{B_{\sigma(t)}}^4(x_n) + \frac{1}{h_1} \sum_{p=1}^{h_1} \pi_{B_{\sigma(p)}}^4(x_1) + \right. \\ & \left. \frac{1}{h_2} \sum_{p=1}^{h_2} \pi_{B_{\sigma(p)}}^4(x_2) + \cdots + \frac{1}{h_n} \sum_{p=1}^{h_n} \pi_{B_{\sigma(p)}}^4(x_n) \right] = \\ & \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{A_{\sigma(s)}}^4(x_i) + \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{A_{\sigma(t)}}^4(x_i) + \right. \\ & \left. \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{A_{\sigma(p)}}^4(x_i) \right] \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{B_{\sigma(s)}}^4(x_i) + \right. \\ & \left. \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{B_{\sigma(t)}}^4(x_i) + \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{B_{\sigma(p)}}^4(x_i) \right] = E(A)E(B). \end{aligned}$$

于是有  $\rho(A, B) = \frac{C(A, B)}{\sqrt{E(A)}\sqrt{E(B)}} \leq 1$ .  $\square$

### 3 毕达哥拉斯犹豫模糊集的加权相关测度

由于  $x_i$  的权重在决策过程中发挥着极其重要的作用, 设  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的权重向量为  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T, w_i \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . 定义毕达哥拉斯犹豫模糊集的加权相关系数如下.

**定义9** 设  $A = \{ \langle x_i, \Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i) \rangle | x_i \in X \}, B = \{ \langle x_i, \Gamma_B(x_i), \Psi_B(x_i), \Pi_B(x_i) \rangle | x_i \in X \}$  为论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的毕达哥拉斯犹豫模糊集,  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的权重向量为  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T, w_i \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , 则  $A$  与  $B$  的加权相关系数定义为

$$\rho_w(A, B) = \frac{C_w(A, B)}{\sqrt{E_w(A)}\sqrt{E_w(B)}}.$$

其中

$$\begin{aligned} C_w(A, B) = & \sum_{i=1}^n w_i \left( \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{A_{\sigma(s)}}^2(x_i) \mu_{B_{\sigma(s)}}^2(x_i) + \right. \\ & \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{A_{\sigma(t)}}^2(x_i) \nu_{B_{\sigma(t)}}^2(x_i) + \\ & \left. \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{A_{\sigma(p)}}^2(x_i) \pi_{B_{\sigma(p)}}^2(x_i) \right), \\ E_w(A) = & \sum_{i=1}^n w_i \left( \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{A_{\sigma(s)}}^4(x_i) + \right. \\ & \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{A_{\sigma(t)}}^4(x_i) + \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{A_{\sigma(p)}}^4(x_i) \left. \right), \\ E_w(B) = & \sum_{i=1}^n w_i \left( \frac{1}{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} \mu_{B_{\sigma(s)}}^4(x_i) + \right. \\ & \frac{1}{l_i} \sum_{t=1}^{l_i} \nu_{B_{\sigma(t)}}^4(x_i) + \frac{1}{h_i} \sum_{p=1}^{h_i} \pi_{B_{\sigma(p)}}^4(x_i) \left. \right). \end{aligned}$$

显然, 当  $w_i = 1/n$  时,  $\rho_w(A, B) = \rho(A, B)$ .

**定理3** 设  $A = \{\langle x_i, \Gamma_A(x_i), \Psi_A(x_i), \Pi_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}$ ,  $B = \{\langle x_i, \Gamma_B(x_i), \Psi_B(x_i), \Pi_B(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  为论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的毕达哥拉斯犹豫模糊集, 则有:

- 1)  $\rho_w(A, B) = \rho_w(B, A)$ ;
- 2)  $0 \leq \rho_w(A, B) \leq 1$ ;
- 3) 若  $A = B$ , 则  $\rho_w(A, B) = 1$ .

证明过程类似于定理2, 此略.

### 4 决策应用

在毕达哥拉斯模糊多属性决策中, 决策者给出方案  $A_i$  在属性  $c_j$  下的属性值为毕达哥拉斯模糊数  $\alpha_{ij} = \langle \mu_{\alpha_{ij}}, \nu_{\alpha_{ij}} \rangle$ , 由于条件  $\mu_{\alpha_{ij}}^2 + \nu_{\alpha_{ij}}^2 \leq 1$  描述空间较  $\mu_{\alpha_{ij}} + \nu_{\alpha_{ij}} \leq 1$  大, 从而毕达哥拉斯模糊数比直觉模糊数在描述模糊现象时更加有力, 但是毕达哥拉斯模糊数并没有体现出决策过程中决策者犹豫不决的情况, 而毕达哥拉斯犹豫模糊数既能反映决策者的犹豫不决, 又能描述隶属度和非隶属的和超过1而平方和不超过1的现象, 故毕达哥拉斯犹豫模糊数具有毕达哥拉斯模糊数与犹豫模糊数的优点. 研究关于毕达哥拉斯犹豫模糊信息的多属性决策方法, 对于发展毕达哥拉斯模糊决策理论具有重要的意义. 下面结合毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关测度, 给出一种基于毕达哥拉斯犹豫模糊信息的决策方法.

设  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  为方案集,  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  为属性集,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  为属性权重向量, 其中  $w_i \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . 决策者给出的方案  $A_i$  在属性  $c_j$  下的属性值为  $\alpha_{ij}$ , 其中  $\alpha_{ij} = \langle \Gamma_{\alpha_{ij}}, \Psi_{\alpha_{ij}}, \Pi_{\alpha_{ij}} \rangle (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$  为毕达哥拉斯犹豫模糊数, 从而得到毕达哥拉斯犹豫模糊数决策矩阵  $M = (\alpha_{ij})_{mn}$ .

显然, 方案  $A_i$  可以表示为  $A_i = \{\langle c_j, \alpha_{ij} \rangle | j = 1, 2, \dots, n\} = \{\langle c_j, \Gamma_{\alpha_{ij}}, \Psi_{\alpha_{ij}}, \Pi_{\alpha_{ij}} \rangle | j = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . 由于  $|\Gamma_{\alpha_{ij}}| (i = 1, 2, \dots, m)$  可能不等, 可以在  $\Gamma_{\alpha_{ij}} (i = 1, 2, \dots, m)$  中添加最小元素, 使得  $|\Gamma_{\alpha_{ij}}| = \max_i |\Gamma_{\alpha_{ij}}|$ . 同理, 也可分别在  $\Psi_{\alpha_{ij}}, \Pi_{\alpha_{ij}} (i = 1, 2, \dots, m)$  添加最小元素, 使得  $|\Psi_{\alpha_{ij}}| = \max_i |\Psi_{\alpha_{ij}}|, |\Pi_{\alpha_{ij}}| = \max_i |\Pi_{\alpha_{ij}}|$ . 为方便起见, 令  $k_j = \max_i |\Gamma_{\alpha_{ij}}|, l_j = \max_i |\Psi_{\alpha_{ij}}|, h_j = \max_i |\Pi_{\alpha_{ij}}|$ .

取正理想点为  $A^* = \{\langle c_j, \{1, 1, \dots, 1\}, \{0, 0, \dots, 0\}, \{0, 0, \dots, 0\} \rangle | j = 1, 2, \dots, n\}$ , 其中  $k_j = |\{1, 1, \dots, 1\}|, l_j = |\{0, 0, \dots, 0\}|, h_j = |\{0, 0, \dots, 0\}|$ , 则可得到

$$E_w(A^*) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{1}{k_j} \sum_{s=1}^{k_j} \mu_{A_{i\sigma(s)}}^4(x_j) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{l_j} \sum_{t=1}^{l_j} \nu_{A_{i\sigma(t)}}^4(x_j) + \frac{1}{h_j} \sum_{p=1}^{h_j} \pi_{A_{i\sigma(p)}}^4(x_j) \right) = \sum_{j=1}^n w_j = 1,$$

$$E_w(A_i) =$$

$$\sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{1}{k_j} \sum_{s=1}^{k_j} \mu_{A_{i\sigma(s)}}^4(x_j) + \frac{1}{l_j} \sum_{t=1}^{l_j} \nu_{A_{i\sigma(t)}}^4(x_j) + \frac{1}{h_j} \sum_{p=1}^{h_j} \pi_{A_{i\sigma(p)}}^4(x_j) \right),$$

$$C_w(A^*, A_i) =$$

$$\sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{1}{k_j} \sum_{s=1}^{k_j} \mu_{A_{i\sigma(s)}}^2(x_j) \mu_{A_{i\sigma(s)}}^2(x_j) + \frac{1}{l_j} \sum_{t=1}^{l_j} \nu_{A_{i\sigma(t)}}^2(x_j) \nu_{A_{i\sigma(t)}}^2(x_j) + \frac{1}{h_j} \sum_{p=1}^{h_j} \pi_{A_{i\sigma(p)}}^2(x_j) \pi_{A_{i\sigma(p)}}^2(x_j) \right) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{1}{k_j} \sum_{s=1}^{k_j} \mu_{A_{i\sigma(s)}}^2(x_j) \right).$$

$$\text{于是有 } \rho_w(A^*, A_i) = \frac{C_w(A^*, A_i)}{\sqrt{E_w(A_i)}}.$$

为此, 提出一种基于毕达哥拉斯犹豫模糊集相关系数的决策方法, 具体步骤如下.

**Step 1:** 根据实际情况, 建立毕达哥拉斯犹豫模糊决策矩阵.

**Step 2:** 计算每个方案  $A_i$  与正理想点  $A^*$  的加权相关系数  $\rho_w(A^*, A_i)$ .

**Step 3:** 根据加权相关系数  $\rho_w(A^*, A_i)$  的大小, 实现方案排序择优.

**例1** [28] 某国有大型有色金属集团公司准备进行海外投资, 成立了由1位执行经理和2位专家组成的决策小组进行初期调查研究, 以确定合适的投资国. 经调查研究有  $A_1, A_2, A_3, A_4$  四个国家成为考察对象, 决策小组主要从4个方面进行评估: 政治政策  $c_1$ , 基础设施  $c_2$ , 矿产资源  $c_3$ , 经济情况  $c_4$ , 其权重向量为  $w = (0.15, 0.15, 0.375, 0.325)^T$ . 为使决策更加合理, 每位决策者匿名给出评价结果, 其中满意度和非满意度若有重复, 则仅取1次. 得到决策小组针对方案  $A_i$  在属性  $c_j$  下的毕达哥拉斯犹豫模糊数评价价值  $\alpha_{ij} = \langle \Gamma_{\alpha_{ij}}, \Psi_{\alpha_{ij}} \rangle (i, j = 1, 2, 3, 4)$ , 即得到毕达哥拉斯犹豫模糊数决策矩阵  $M = (\alpha_{ij})_{44}$ . 试根据决策小组提供的决策矩阵, 为企业选择合适投资国提供参考.

**Step 1:** 建立毕达哥拉斯犹豫模糊决策矩阵, 如表1所示.

表1 毕达哥拉斯犹豫模糊决策矩阵

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$A_1$	$\langle\{0.3, 0.8\}, \{0.4\}\rangle$	$\langle\{0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}\rangle$	$\langle\{0.7, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}\rangle$	$\langle\{0.5, 0.7, 0.8\}, \{0.4\}\rangle$
$A_2$	$\langle\{0.7, 0.8\}, \{0.3, 0.4\}\rangle$	$\langle\{0.3, 0.4, 0.5\}, \{0.7\}\rangle$	$\langle\{0.3, 0.4\}, \{0.7, 0.8\}\rangle$	$\langle\{0.6, 0.7\}, \{0.3, 0.4\}\rangle$
$A_3$	$\langle\{0.4, 0.5\}, \{0.6\}\rangle$	$\langle\{0.4, 0.5, 0.6\}, \{0.5\}\rangle$	$\langle\{0.7, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}\rangle$	$\langle\{0.8, 0.9\}, \{0.3\}\rangle$
$A_4$	$\langle\{0.5, 0.6\}, \{0.2, 0.3\}\rangle$	$\langle\{0.7\}, \{0.4, 0.5\}\rangle$	$\langle\{0.5, 0.6, 0.7\}, \{0.6\}\rangle$	$\langle\{0.7, 0.8\}, \{0.2, 0.3\}\rangle$

Step 2: 计算加权相关系数  $\rho_w(A^*, A_i)$ .

综合考虑到方案  $A_1, A_2, A_3, A_4$  的可能隶属度集合、可能非隶属度集合以及犹豫度集合, 取正理想点为

$$A^* = \{\langle\{1, 1\}, \{0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\rangle, \langle\{1, 1, 1\}, \{0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\rangle, \langle\{1, 1, 1\}, \{0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\rangle\}.$$

首先计算  $\rho_w(A^*, A_1)$ , 有

$$A_1 = \{\langle\{0.3, 0.8\}, \{0.4\}\rangle, \langle\{0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}\rangle, \langle\{0.7, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}\rangle, \langle\{0.5, 0.7, 0.8\}, \{0.4\}\rangle\}.$$

求出犹豫度集合, 可以得到

$$A_1 = \{\langle\{0.3, 0.8\}, \{0.4\}, \{0.4472, 0.8660\}\rangle, \langle\{0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.3317, 0.4472, 0.6245, 0.6928\}\rangle, \langle\{0.7, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.3317, 0.4472, 0.5099, 0.5916\}\rangle, \langle\{0.5, 0.7, 0.8\}, \{0.4\}, \{0.4472, 0.5916, 0.7681\}\rangle\}.$$

考虑到方案  $A_2, A_3, A_4$  的可能隶属度集合、可能非隶属度集合和犹豫度集合, 通过分别添加最小元素, 得到

$$A_1 = \{\langle\{0.3, 0.8\}, \{0.4, 0.4\}, \{0.4472, 0.4472, 0.4472, 0.8660\}\rangle, \langle\{0.6, 0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.3317, 0.4472, 0.6245, 0.6928\}\rangle, \langle\{0.7, 0.7, 0.8\}, \{0.4, 0.5\}, \{0.3317, 0.4472, 0.5099, 0.5916\}\rangle, \langle\{0.5, 0.7, 0.8\}, \{0.4, 0.4\}, \{0.4472, 0.4472, 0.5916, 0.7681\}\rangle\}.$$

可算出  $E_w(A_1) = 0.3978, C_w(A^*, A_1) = 0.4748$ , 从而得到  $\rho_w(A^*, A_1) = \frac{0.4748}{\sqrt{0.3978}} = 0.7528$ .

类似地, 可以计算出

$$\rho_w(A^*, A_2) = 0.4390, \rho_w(A^*, A_3) = 0.7622, \rho_w(A^*, A_4) = 0.6809.$$

Step 3: 根据相关系数  $\rho_w(A^*, A_3) \geq \rho_w(A^*, A_1)$

$\geq \rho_w(A^*, A_4) \geq \rho_w(A^*, A_2)$  可知, 方案排序为  $A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$ , 即方案  $A_3$  是最优的.

文献[28]使用毕达哥拉斯犹豫模糊加权平均算子对方案进行集成, 并使用得分函数对方案的综合属性值进行排序, 得到方案排序为  $A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$ . 显然, 文中得到的方案排序与文献[28]完全一致. 在本例中, 尽管由这两种决策方法得到的方案排序是完全一样的, 但是, 与毕达哥拉斯犹豫模糊加权平均算子相比, 毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关系数具有两个明显的相对优势. 首先, 其具有明显的直观背景, 即若将毕达哥拉斯犹豫模糊集看作向量, 则相关系数类似于向量夹角的余弦; 其次, 考虑了方案的整体, 即相关系数是将方案看作一个整体考虑的, 并通过方案与正理想方案之间的相关程度体现各方案的优劣.

### 5 结论

本文研究了毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关测度及其决策应用, 定义了毕达哥拉斯犹豫模糊集的信息能量、相关指标和相关系数, 并讨论了它们的性质. 由于决策过程中经常需要考虑到属性权重, 为此定义了毕达哥拉斯犹豫模糊集的加权相关系数, 并证明了其相关性质. 最后, 提出一种基于毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关系数的多属性决策方法, 并通过实例表明了所提方法的可行性. 然而, 文中毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关系数是假设属性间相互独立的, 但实际决策中属性间往往存在着相互作用, 为此建立反映属性间相互作用的毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关系数是下一步研究的重点. 同时, 考虑到毕达哥拉斯犹豫模糊集本身具有的优点, 将继续研究毕达哥拉斯犹豫模糊集在多属性决策、聚类分析、模式识别等实际领域中的应用.

### 参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and control, 1965, 8(3): 338-353.  
 [2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

- [3] Atanasov K. Intuitionistic fuzzy sets: Theory and applications[M]. New York: Physica-Verlag, 1999: 1-138.
- [4] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179-1187.
- [5] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.
- [6] Gerstenkorn T, Manko J. Correlation of intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 44(1): 39-43.
- [7] Zeng W Y, Li H X. Correlation coefficient of intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of Industrial Engineering, 2007, 3(5): 33-40.
- [8] Xu Z S, Chen J, Wu J. Clustering algorithm for intuitionistic fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2008, 178(19): 3775-3790.
- [9] Xu Z S. Choquet integrals of weighted intuitionistic fuzzy information[J]. Information Sciences, 2010, 180(5): 726-736.
- [10] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. Information and Control, 1975, 8(3): 199-249.
- [11] Yager R R, Abbasov A M. Pythagorean membership grades, complex numbers and decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436-452.
- [12] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.
- [13] Zhang X L, Xu Z S. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2014, 29(12): 1061-1078.
- [14] 彭新东, 杨勇, 宋娟萍, 等. 毕达哥拉斯模糊软集及其应用[J]. 计算机工程, 2015, 41(7): 224-229. (Peng X D, Yang Y, Song J P, et al. Pythagorean fuzzy soft set and its application[J]. Computer Engineering, 2015, 41(7): 224-229.)
- [15] Molodtsov D. Soft set theory — First results[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(4/5): 19-31.
- [16] Gou X J, Xu Z S, Ren P J. The properties of continuous Pythagorean fuzzy information[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(5): 401-424.
- [17] Peng X, Yang Y. Fundamental properties of interval-valued Pythagorean fuzzy aggregation operators[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(5): 444-487.
- [18] 刘卫锋, 常娟, 何霞. 广义毕达哥拉斯模糊集成算子及其决策应用[J]. 控制与决策, 2016, 31(12): 2280-2286. (Liu W F, Chang J, He X. Generalized Pythagorean fuzzy aggregation operators and applications in decision making[J]. Control and Decision, 2016, 31(12): 2280-2286.)
- [19] 刘卫锋, 杜迎雪, 常娟. 毕达哥拉斯模糊交叉影响集成算子及其决策应用[J]. 控制与决策, 2017, 32(6): 1033-1040. (Liu W F, Du Y X, Chang J. Pythagorean fuzzy interaction aggregation operators and applications in decision making[J]. Control and Decision, 2017, 32(6): 1033-1040.)
- [20] Garg H. A new generalized Pythagorean fuzzy information aggregation using Einstein operations and its application to decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(9): 886-920.
- [21] Garg H. Generalized Pythagorean fuzzy geometric aggregation operators using Einstein  $t$ -norm and  $t$ -conorm for multicriteria decision-making process[J]. Int J of Intelligent Systems, 2017, 32(6): 597-630.
- [22] Wu S J, Wei G W. Pythagorean fuzzy Hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 97(3): 24-39.
- [23] 何霞, 杜迎雪, 刘卫锋. 毕达哥拉斯模糊幂平均算子[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(6): 116-124. (He X, Du Y X, Liu W F. Pythagorean fuzzy power average operators[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30(6): 116-124.)
- [24] Peng X, Yang Y. Pythagorean fuzzy Choquet integral based MABAC method for multiple attribute group decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(10): 989-1020.
- [25] 李德清, 曾文艺, 尹乾. 勾股模糊集的距离测度及其在多属性决策中的应用[J]. 控制与决策, 2017, 32(10): 1817-1823. (Li D Q, Zeng W Y, Yin Q. Distance measures of Pythagorean fuzzy sets and their applications in multiattribute decision making[J]. Control and Decision, 2017, 32(10): 1817-1823.)
- [26] Garg H. A novel correlation coefficients between pythagorean fuzzy sets and its applications to decision-making processes[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(12): 1234-1252.
- [27] 张超, 李德玉. 勾股模糊粗糙集及其在多属性决策中的应用[J]. 小型微型计算机系统, 2016, 37(7): 1531-1535. (Zhang C, Li D Y. Pythagorean fuzzy rough sets and its applications in multi-attribute decision making[J]. J of Chinese Computer Systems, 2016, 37(7): 1531-1535.)
- [28] 刘卫锋, 何霞. 毕达哥拉斯犹豫模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(4): 107-115. (Liu W F, He X. Pythagorean hesitant fuzzy set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30(4): 107-115.)
- [29] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

(责任编辑: 郑晓蕾)