

基于TODIM的直觉模糊双边公平满意匹配方法

张 笛[†], 孙 涛, 耿成轩, 万良琪, 陈洪转

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106)

摘 要: 针对直觉模糊偏好信息下的双边匹配问题, 考虑匹配主体参照依赖和损失规避的心理行为, 提出一种基于TODIM(TOMada de decisão interativa multicritério)的双边公平满意匹配方法. 首先, 对直觉模糊偏好信息下的双边匹配问题进行描述; 然后, 依据前景理论将双边主体的直觉模糊偏好信息转化为相对于参照点的收益或损失, 在此基础上, 依据TODIM法计算每个主体的总体优势度, 构建满意度计算规则, 建立双边公平满意匹配优化模型, 求解模型并获得双边匹配解; 最后, 通过一个算例验证所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 双边匹配; 直觉模糊偏好; 公平匹配; 满意匹配; TODIM法

中图分类号: C934

文献标志码: A

Method for intuitionistic fuzzy two-sided fair and satisfied matching based on TODIM

ZHANG Di[†], SUN Tao, GENG Cheng-xuan, WAN Liang-qi, CHEN Hong-zhuan

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

Abstract: With respect to the two-sided matching problems with intuitionistic fuzzy preference information, in which the reference dependence and loss aversion psychological behavior of the agents are considered, a two-sided fair and satisfied matching method is proposed based on TODIM (TOMada de decisão interativa multicritério). Firstly, the description of two-sided matching problems with intuitionistic fuzzy preference information is given. Then, the intuitionistic fuzzy preference information of the agents on both sides are transformed in to the gains or losses relative to the reference point based on the prospect theory. Furthermore, the total dominance degree of each agent is calculated based on the TODIM method, and the calculating rules of satisfaction degree is confirmed. An optimization two-sided fair and satisfied matching model is constructed, and the two-sided matching result can be obtained by solving the model. Finally, an example is given to prove the feasibility and validity of the proposed method.

Keywords: two-sided matching; intuitionistic fuzzy preference; fair matching; satisfied matching; TODIM method

0 引 言

双边匹配是指对不可分的离散资源进行交换和分配的一种市场机制, 具有广泛的实际应用背景. Gale等^[1]研究了“高校录取和稳定婚姻匹配问题”, 奠定了双边匹配的理论基石. Roth^[2]将双边匹配理论引入实践, 开启了市场机制设计的研究先河. 随着社会经济不断发展, 双边匹配理论被广泛应用于青年男女婚姻匹配问题^[3-4]、学生与学校匹配问题^[5]、求职人员与企业岗位匹配问题^[6]、风险投资匹配问题^[7]、电子商务中的买卖交易匹配问题^[8]以及知识服务^[9]、外包服务^[10]和复杂制造服务供需匹配问题^[11]等.

序值偏好信息下的双边匹配方法及其扩展研究是当前双边匹配领域的热点问题, 学者们基于匹配

的满意性、稳定性和心理行为等视角开展了大量的研究, 并取得了一系列的成果^[12-18]. 在满意匹配研究上^[12-13]: 樊治平等^[12]考虑最高可接受偏好序的双边匹配问题, 建立了基于最低可接受满意度的匹配优化模型; 梁海明等^[13]研究强、弱、无差异和未知偏好序下的双边匹配问题, 构建了多满意稳定导向的匹配优化模型. 在稳定匹配研究上^[14-16]: 姜艳萍等^[14]考虑抗操作和抗自亏的双边匹配问题, 提出了一种改进的Gale-Shapley算法; Erdil等^[15]建立了无差异偏好序下具有帕累托有效的稳定匹配模型; 姜艳萍等^[16]针对序区间偏好信息下的双边匹配问题, 构建了基于可能度的弱稳定、 α -稳定、强稳定和超稳定的匹配优化模型. 在行为匹配研究上^[17-18]: 乐琦等^[17]考虑匹配主体

收稿日期: 2017-11-25; 修回日期: 2018-07-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71573115); 国家社会科学基金项目(15BGL056).

责任编辑: 李国齐.

[†]通讯作者. E-mail: bengbuzhangdi@163.com.

损失规避的心理行为,构建了基于累积前景理论的匹配优化模型;Fan等^[18]提出了一种序区间偏好信息下基于失望理论的双边匹配方法。

近年来,模糊偏好信息下的双边匹配问题引起了学者们的关注^[19-23]。林杨等^[19]针对基于直觉模糊偏好关系的双边匹配问题,依据最小对数二乘法,构建了稳定匹配优化模型;乐琦^[20]提出了一种直觉模糊偏好信息下的双边匹配方法;乐琦^[21-22]考虑双边主体的匹配意愿,构建直觉模糊偏好信息下基于得分函数的匹配满意度,建立了双边满意匹配优化模型;Yue等^[23]将文献[21-22]的方法拓展至区间直觉模糊偏好的情形。

上述文献为解决双边匹配问题提供了理论基础和方法支撑。但需要指出的是:1)已有研究都是从匹配的满意性、稳定性和心理行为等视角构建双边匹配模型,获得的双边匹配结果可能会出现一方主体的满意度较高,而另一方主体的满意度较低的不公平匹配现象,兼具满意性和公平性的双边匹配方法的研究较少;2)经典双边匹配理论假设匹配主体是完全理性的,然而,在实际匹配过程中,匹配主体大多表现出有限理性的行为特征^[17-18],考虑匹配主体心理行为的直觉模糊双边匹配方法的研究尚未见到报道。

TODIM法^[24]是一种基于前景理论^[25]的考虑决策者心理行为的多属性决策方法。该方法的思路是:通过对方案进行两两比较,构建优势度函数,计算每个方案相对于所有方案的总体优势度,并依据总体优势度的大小对方案进行排序。与前景理论相比,TODIM法无需事先确定参照点,且具有涉及参数少、计算简单等特点。鉴于此,本文针对直觉模糊偏好信息下的双边匹配问题,考虑匹配主体参照依赖和损失规避心理行为以及双边匹配的公平性,提出一种基于TODIM的双边公平满意匹配方法。

1 预备知识和问题描述

1.1 预备知识

首先给出本文需要的基础知识。

定义1^[26] 设 E 是一个非空集合,则 E 上的一个直觉模糊集 F 定义为

$$F = \{ \langle x, \mu_F(x), \nu_F(x) \rangle | x \in E \}.$$

其中: $\mu_F(x) : E \rightarrow [0, 1], \nu_F(x) : E \rightarrow [0, 1]$, 满足 $0 \leq \mu_F(x) + \nu_F(x) \leq 1, x \in E$, $\mu_F(x)$ 、 $\nu_F(x)$ 分别为 E 中元素 x 属于 F 的隶属度和非隶属度; $\pi_F(x) = 1 - \mu_F(x) - \nu_F(x)$ 是 E 中元素 x 属于 F 的不确定程度。特别地,当 $|F| = 1$ 时,称 F 为直觉模糊数,记为 $F = \langle \mu, \nu \rangle$ 。

定义2^[27] 设 $a = \langle \mu, \nu \rangle$ 是一直觉模糊数,称 $S(a) = (3\mu - \nu - 1)/2$ 为 a 的得分函数。

设 $a_1 = \langle \mu_1, \nu_1 \rangle, a_2 = \langle \mu_2, \nu_2 \rangle$ 是两任意的直觉模糊数,则:

- 1) $S(a_1) > S(a_2)$ 时,称 a_1 大于 a_2 ,记为 $a_1 > a_2$;
- 2) $S(a_1) = S(a_2)$ 时,称 a_1 等于 a_2 ,记为 $a_1 = a_2$;
- 3) $S(a_1) < S(a_2)$ 时,称 a_1 小于 a_2 ,记为 $a_1 < a_2$ 。

设 $d(a_1, a_2)$ 是直觉模糊数 a_1 与 a_2 间的距离测度^[28],则

$$d(a_1, a_2) = \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\nu_1 - \nu_2)^2 + (\pi_1 - \pi_2)^2} / \sqrt{2}.$$

注1 在定义2中,得分函数 $S(a)$ 和距离测度 $d(a_1, a_2)$ 考虑了直觉模糊数中犹豫度的影响。

在双边匹配问题中,设 X 方主体集为 $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$,其中 X_i 表示 X 方中的第 i 个匹配主体, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}, m \geq 2$; Y 方主体集为 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$,其中 Y_j 表示 Y 方中的第 j 个匹配主体, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 2$ 。

定义3 (一对一双边匹配^[2,12,14]) 设 $\mu : X \cup Y \rightarrow X \cup Y$ 上的一一映射,且对于 $\forall X_i \in X, Y_j \in Y$,满足条件:1) $\mu(X_i) \in Y \cup \{X_i\}$;2) $\mu(Y_j) \in X \cup \{Y_j\}$;3) 若 $\mu(X_i) = Y_j$,则 $\mu(Y_j) = X_i$;4) 若 $\mu(Y_j) = X_i$,则 $\mu(X_i) = Y_j$;5) 若对于 $\forall j, j' \in J, j \neq j', \mu(X_i) = Y_j$,则 $\mu(X_i) \neq Y_{j'}$;6) 若对于 $\forall i, i' \in I, i \neq i', \mu(Y_j) = X_i$,则 $\mu(Y_j) \neq X_{i'}$ 。其中, $\mu(X_i) = Y_j$ 或 $\mu(Y_j) = X_i$,表示 X_i 与 Y_j 在 μ 中匹配,记为 (X_i, Y_j) 。称 (X_i, Y_j) 为双边匹配 μ 中的匹配对。特别地,在双边匹配 μ 中, $\mu(X_i) = X_i$ 表示 X_i 在 μ 中未匹配,类似地, $\mu(Y_j) = Y_j$ 表示 Y_j 在 μ 中未匹配。

注2 在定义3中,双边匹配 μ 可表示为 $\mu = \{(X_i, Y_{\gamma(i)}) | i \in I, \gamma(i) \in J\}$ 。为了便于下文的讨论,不妨设 $n \geq m$,由定义3知,至多存在 $h = n!/(n-m)!$ 种可能的双边匹配。称由可行的双边匹配构成的集合为双边匹配方案集,记为 $B = \{\mu_\tau | \tau = 1, 2, \dots, t\}$,其中 $2 \leq t \leq h$ 。

1.2 问题描述

本文考虑直觉模糊偏好信息下的一对一双边匹配问题。下面给出双边匹配的基本设置。

设 $R_{ij} = \langle \mu_{ij}, \nu_{ij} \rangle (i \in I, j \in J)$ 是 X 方主体 X_i 给出的关于 Y 方主体 Y_j 的直觉模糊偏好信息,其中 μ_{ij} 表示主体 X_i 对主体 Y_j 的满意程度, ν_{ij} 表示主体 X_i 对主体 Y_j 的不满意程度,且 $0 \leq \mu_{ij} + \nu_{ij} \leq 1$; $L_{ij} = \langle \mu'_{ij}, \nu'_{ij} \rangle (i \in I, j \in J)$ 是 Y 方主体 Y_j 给出的关于 X 方主体 X_i 的直觉模糊偏好信息,其中 μ'_{ij} 表示主体 Y_j 对主体 X_i 的满意程度, ν'_{ij} 表示主体 Y_j 对主体 X_i 的不满意程度,且 $0 \leq \mu'_{ij} + \nu'_{ij} \leq 1$ 。

本文需要解决的问题是:依据双边主体的直觉模糊偏好信息 R_{ij} 和 L_{ij} ($i \in I, j \in J$), 在考虑匹配主体参照依赖和损失规避心理行为以及双边匹配的满意性和公平性的情形下, 建立双边匹配模型, 获得双边匹配方案。

2 双边匹配方法

为了解决上述双边匹配问题, 本文将 TODIM 法引入双边匹配. 通过一方主体将另一方中的主体进行两两比较, 计算每个主体的总体优势度, 构建匹配满意度计算规则, 建立双边公平满意匹配优化模型, 通过求解模型获得双边匹配方案。

2.1 匹配满意度

首先, 通过一方中的每个主体将另一方主体进行两两比较, 计算每个主体的总体优势度。

当主体 X_i 将 Y 方中的主体 Y_j 与主体 Y_k 进行比较时, 设 $H(R_{ij}, R_{ik})$ 是直觉模糊偏好信息 R_{ij} 相对于 R_{ik} 的损益值, 其计算公式为

$$H(R_{ij}, R_{ik}) = \begin{cases} d(R_{ij}, R_{ik}), & R_{ij} \geq R_{ik}; \\ -d(R_{ij}, R_{ik}), & R_{ij} < R_{ik}; \end{cases} \quad i \in I, j, k \in J. \quad (1)$$

其中 $d(R_{ij}, R_{ik})$ 是直觉模糊数 R_{ij} 与 R_{ik} 的距离测度. 当 $R_{ij} \geq R_{ik}$ 时, $H(R_{ij}, R_{ik})$ 表示收益; 当 $R_{ij} < R_{ik}$ 时, $H(R_{ij}, R_{ik})$ 表示损失。

设 $\varphi_i(Y_j, Y_k)$ 是主体 Y_j 相对于主体 Y_k 的优势度, 其计算公式为

$$\varphi_i(Y_j, Y_k) = \begin{cases} \sqrt{H(R_{ij}, R_{ik})}, & R_{ij} \geq R_{ik}; \\ -\frac{1}{\theta_i} \sqrt{-H(R_{ij}, R_{ik})}, & R_{ij} < R_{ik}; \end{cases} \quad i \in I, j, k \in J. \quad (2)$$

其中 θ_i ($\theta_i > 0$) 是损失衰减系数, 表示主体 X_i 的损失规避程度, θ_i 越小, 表明主体 X_i 的损失规避程度越大。

设 φ_{ij} 是主体 Y_j 相对于 Y 方主体的总体优势度, 其计算公式为

$$\xi_{ij} = \sum_{k=1}^n \varphi_i(Y_j, Y_k), \quad i \in I, j \in J, \quad (3)$$

其中 ξ_{ij} 是主体 Y_j 相对于 Y 方中所有主体的正负优势度的总和, ξ_{ij} 越大, 表明主体 Y_j 越优。

类似地, 当主体 Y_j 将 X 方中的主体 X_i 与主体 X_l 进行比较时, 设 $H'(L_{ij}, L_{lj})$ 是直觉模糊偏好信息 L_{ij} 相对于 L_{lj} 的损益值, 其计算公式为

$$H'(L_{ij}, L_{lj}) = \begin{cases} d(L_{ij}, L_{lj}), & L_{ij} \geq L_{lj}; \\ -d(L_{ij}, L_{lj}), & L_{ij} < L_{lj}; \end{cases}$$

$$i, l \in I, j \in J. \quad (4)$$

其中 $d(L_{ij}, L_{lj})$ 是直觉模糊数 L_{ij} 与 L_{lj} 的距离测度. 当 $L_{ij} \geq L_{lj}$ 时, $H'(L_{ij}, L_{lj})$ 表示收益; 当 $L_{ij} < L_{lj}$ 时, $H'(L_{ij}, L_{lj})$ 表示损失。

设 $\varphi'_j(X_i, X_l)$ 是主体 X_i 相对于主体 X_l 的优势度, 其计算公式为

$$\varphi'_j(X_i, X_l) = \begin{cases} \sqrt{H'(L_{ij}, L_{lj})}, & L_{ij} \geq L_{lj}; \\ -\frac{1}{\theta'_j} \sqrt{-H'(L_{ij}, L_{lj})}, & L_{ij} < L_{lj}; \end{cases} \quad i, l \in I, j \in J. \quad (5)$$

其中 θ'_j ($\theta'_j > 0$) 是损失衰减系数, 表示主体 Y_j 的损失规避程度, 且 θ'_j 越小, 表明主体 Y_j 的损失规避程度越大。

设 ξ'_i 是主体 X_i 相对于 X 方主体的总体优势度, 其计算公式为

$$\xi'_i = \sum_{l=1}^m \phi'_j(X_i, X_l), \quad i \in I, j \in J, \quad (6)$$

其中 ξ'_i 是主体 X_i 相对于 X 方中所有主体的正负优势度的总和, 且 ξ'_i 越大, 表明主体 X_i 越优。

设 α_{ij} 是 X 方主体 X_i 对 Y 方主体 Y_j 的匹配满意度, 其计算公式为

$$\alpha_{ij} = \frac{\xi_{ij} - \min_{i \in I, j \in J} \{\xi_{ij}\}}{\max_{i \in I, j \in J} \{\xi_{ij}\} - \min_{i \in I, j \in J} \{\xi_{ij}\}}, \quad i \in I, j \in J, \quad (7)$$

其中 $\alpha_{ij} \in [0, 1]$, 且 α_{ij} 越大, 表明主体 X_i 对主体 Y_j 的满意度越大。

设 β_{ij} 是 Y 方主体 Y_j 对 X 方主体 X_i 的匹配满意度, 其计算公式为

$$\beta_{ij} = \frac{\xi'_{ij} - \min_{i \in I, j \in J} \{\xi'_{ij}\}}{\max_{i \in I, j \in J} \{\xi'_{ij}\} - \min_{i \in I, j \in J} \{\xi'_{ij}\}}, \quad i \in I, j \in J, \quad (8)$$

其中 $\beta_{ij} \in [0, 1]$, 且 β_{ij} 越大, 表明主体 Y_j 对主体 X_i 的满意度越大。

2.2 公平满意匹配

社会交换理论表明, 双边匹配实质上是一种资源的交换行为, 匹配的满意性和公平性是衡量双边匹配方案优劣的重要依据. 双边主体能否形成匹配对, 一方面取决于匹配双方彼此间满意度的大小, 双方满意度越大, 双边主体越容易匹配; 另一方面取决于双边匹配的公平性, 双方满意度差异越小, 双边主体越容易形成匹配对. 下面给出满意匹配和公平匹配的定义。

设 x_{ij} ($i \in I, j \in J$) 是 0-1 变量, 其中: $x_{ij} = 0$, 表示主体 X_i 与主体 Y_j 不匹配; $x_{ij} = 1$, 表示主体 X_i 与主体 Y_j 匹配。

定义4 设 B 是双边匹配方案集,若 $\mu \in B$,满足 $f(\mu) = \max\{f(\mu_\tau) | \tau = 1, 2, \dots, t\}$,则:

- 1) 当 $f(\mu_\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij}$ 时,称 μ 是 X 方满意的匹配方案,此时记 $f_X(\mu_\tau) \triangleq f(\mu_\tau)$;
- 2) 当 $f(\mu_\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_{ij}$ 时,称 μ 是 Y 方满意的匹配方案,此时记 $f_Y(\mu_\tau) \triangleq f(\mu_\tau)$;
- 3) 当 $f(\mu_\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) x_{ij}$ 时,称 μ 是双边满意的匹配方案,此时记 $f_{X+Y}(\mu_\tau) \triangleq f(\mu_\tau)$.

注3 定义4中:1)和2)是单边满意匹配,其含义是在可行的双边匹配方案中,使得单边主体满意度之和最大的匹配方案,称 $f_X(\mu_\tau)$ 和 $f_Y(\mu_\tau)$ 为单边匹配满意度;3)是双边满意匹配,其含义是在可行的双边匹配方案中,使得双边主体满意度之和最大的匹配方案,称 $f_{X+Y}(\mu_\tau)$ 为双边匹配满意度.由定义4知,单边满意匹配和双边满意匹配是存在的.

定义5 设 B 是双边匹配方案集,若 $\mu \in B$,满足 $g(\mu) = \min\{g(\mu_\tau) | \tau = 1, 2, \dots, t\}$,其中 $g(\mu_\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij} - \beta_{ij}| x_{ij}$,则称 μ 是双边公平匹配方案,称 $g(\mu_\tau)$ 为双边匹配公平度.

注4 定义5中,双边公平匹配的含义是在可行的双边匹配方案中,使得双边主体满意度的差异之和最小的匹配方案.由定义5知,双边公平匹配是存在的.

为了便于理解单边满意匹配、双边满意匹配和双边公平匹配,下面给出一个例子.

例1 考虑男女婚姻问题,设女士集合为 $\{X_1, X_2, X_3\}$,男士集合为 $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$,双边主体的满意度矩阵如下:

$$[\alpha_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7 & 0.9 \\ 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ 0.5 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}, [\beta_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.9 & 0.6 \\ 1.0 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

其中: α_{ij} 是 X_i 对 Y_j 的满意度; β_{ij} 是 Y_j 对 X_i 的满意度; $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$.

获得3个可行的双边匹配方案 μ_1 、 μ_2 和 μ_3 ,具体如下:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)\}; \\ \mu_2 &= \{(X_1, Y_3), (X_2, Y_2), (X_3, Y_1)\}; \\ \mu_3 &= \{(X_1, Y_3), (X_2, Y_1), (X_3, Y_2)\}. \end{aligned}$$

依据定义4和定义5计算得到

$$\begin{aligned} f_X(\mu_1) &= 2.7, f_Y(\mu_1) = 2.2, \\ f_{X+Y}(\mu_1) &= 4.9, g(\mu_1) = 0.5; \\ f_X(\mu_2) &= 2.3, f_Y(\mu_2) = 2.7, \end{aligned}$$

$$f_{X+Y}(\mu_2) = 5.0, g(\mu_2) = 0.6;$$

$$f_X(\mu_3) = 2.2, f_Y(\mu_3) = 2.1,$$

$$f_{X+Y}(\mu_3) = 4.3, g(\mu_3) = 0.1.$$

由定义4和定义5知, μ_1 是 X 方满意的匹配方案, μ_2 是 Y 方满意的匹配方案, μ_2 是双边满意的匹配方案, μ_3 是双边公平匹配方案.

由例1可以看出,若仅考虑匹配的满意度,则获得的双边匹配方案的公平性可能较差(μ_1, μ_2);若仅考虑匹配的公平性,则获得的双边匹配方案的满意度可能较差(μ_3).因此,寻求兼具满意性和公平性的双边匹配方案具有重要的理论意义和现实意义.

2.3 双边匹配模型

考虑双边匹配的满意性和公平性,建立双边匹配多目标优化模型如下:

$$\max Z_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij}; \quad (9)$$

$$\max Z_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_{ij}; \quad (10)$$

$$\min Z_3 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij} - \beta_{ij}| x_{ij}. \quad (11)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, i = 1, 2, \dots, m; \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n; \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \min\{m, n\}, x_{ij} \in \{0, 1\};$$

$$i \in I, j \in J. \quad (14)$$

在上述模型中,式(9)表示最大化 X 方主体的匹配满意度;式(10)表示最大化 Y 方主体的匹配满意度;式(11)表示双边匹配的公平性;式(12)表示每个 X 方主体至多与 Y 方中的一个主体匹配;式(13)表示每个 Y 方主体至多与 X 方中一个主体匹配;式(14)表示双边匹配数量约束.

2.4 模型求解

在模型(9)~模型(14)中,目标函数的量纲量级均相同,使用线性加权和法将其转化为单目标规划模型,即

$$\max Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\omega_1 \alpha_{ij} + \omega_2 \beta_{ij} - \omega_3 |\alpha_{ij} - \beta_{ij}|) x_{ij}. \quad (15)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, i = 1, 2, \dots, m; \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n; \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \min\{m, n\}, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (18)$$

$$i \in I, j \in J.$$

其中: ω_1 、 ω_2 、 ω_3 分别是目标函数 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 的权系数, 且满足 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1, 0 \leq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \leq 1$.

模型(15)~模型(18)是单目标线性规划模型, 可以使用LINGO、MATLAB等软件求解.

综上所述, 基于TODIM的直觉模糊双边公平满意匹配方法的计算步骤如下.

Step 1: 利用式(1)~(3)计算主体 Y_j 的总体优势度 ξ_{ij} , 构建矩阵 $[\xi_{ij}]_{m \times n}$;

Step 2: 利用式(4)~(6)计算主体 X_i 的总体优势度 ξ'_{ij} , 构建矩阵 $[\xi'_{ij}]_{m \times n}$;

Step 3: 利用式(7)和(8)计算双边主体的匹配满意度 α_{ij} 和 β_{ij} , 构建矩阵 $[\alpha_{ij}]_{m \times n}$ 和 $[\beta_{ij}]_{m \times n}$;

Step 4: 建立双边匹配优化模型(9)~(14), 求解模型, 获得双边匹配方案.

3 算例分析

考虑风险投资匹配问题, TR是一家专门从事为风险投资公司和风险企业提供投融资信息和撮合服务的第3方非营利性平台. 2017年3月份TR收到4家风险投资公司 $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ 的投资信息和6家风险企业 $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$ 的融资信息. 风险投资公司的投资决策委员会依据技术与产品、风险投资环境和企业家素质等对风险企业进行综合评价, 采用投票方式和统计分析方法给出6家风险企业的直觉模糊偏好信息, 如表1所示. 风险企业的融资决策委员会依据投资额、投资方式和管理能力等对风险投

表1 风险投资公司给出的关于风险企业的直觉模糊偏好信息

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
X_1	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1 \rangle$
X_2	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.9, 0.0 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$
X_3	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.1 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2 \rangle$
X_4	$\langle 1.0, 0.0 \rangle$	$\langle 0.8, 0.0 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$

表2 风险企业给出的关于风险投资公司的直觉模糊偏好信息

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
X_1	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.0 \rangle$
X_2	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1 \rangle$	$\langle 0.9, 0.0 \rangle$	$\langle 0.6, 0.1 \rangle$
X_3	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$
X_4	$\langle 0.9, 0.1 \rangle$	$\langle 0.9, 0.0 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$

资公司进行综合评价, 采用投票方式和统计分析方法给出4家风险投资公司的直觉模糊偏好信息, 如表2所示. TR依据双边主体给出的偏好信息进行优化匹配.

3.1 计算过程

为了解决上述双边匹配问题, 下面给出采用本文方法的计算过程和结果.

根据文献[25]的实验结果, 取 $\theta_i = \theta'_j = 2.25, i = 1 \sim 4, j = 1 \sim 6$. 首先利用式(1)~(3)和式(4)~(6)分别计算主体 Y_j 和 X_i 的总体优势度, 获得双边主体的总体优势度矩阵分别为

$$[\xi_{ij}]_{4 \times 6} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.355 & -0.378 & 0.167 & -0.893 & 0.709 & 2.208 \\ 0.153 & -0.908 & 1.355 & 2.242 & 0.723 & -0.378 \\ -0.938 & 0.665 & 2.242 & 0.266 & -0.350 & 1.522 \\ 2.240 & 1.197 & 0.307 & -0.262 & 0.307 & -0.835 \end{bmatrix},$$

$$[\xi'_{ij}]_{4 \times 6} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.009 & 0.592 & -0.009 & -0.009 & -0.554 & 1.280 \\ 0.534 & -0.554 & 0.534 & 1.378 & 1.278 & -0.054 \\ -0.554 & -0.023 & 1.378 & -0.554 & 0.592 & 0.547 \\ 1.378 & 1.278 & -0.554 & 0.534 & -0.023 & -0.480 \end{bmatrix}.$$

利用式(7)和(8)计算双边主体的匹配满意度, 则双边主体的满意度矩阵分别为

$$[\alpha_{ij}]_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 0.721 & 0.176 & 0.348 & 0.014 & 0.518 & 0.989 \\ 0.343 & 0.009 & 0.721 & 1.000 & 0.522 & 0.176 \\ 0.000 & 0.504 & 1.000 & 0.379 & 0.185 & 0.774 \\ 0.999 & 0.671 & 0.392 & 0.213 & 0.392 & 0.032 \end{bmatrix},$$

$$[\beta_{ij}]_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 0.282 & 0.593 & 0.282 & 0.282 & 0.000 & 0.949 \\ 0.563 & 0.000 & 0.563 & 1.000 & 0.948 & 0.259 \\ 0.000 & 0.275 & 1.000 & 0.000 & 0.593 & 0.570 \\ 1.000 & 0.948 & 0.000 & 0.563 & 0.275 & 0.038 \end{bmatrix}.$$

建立双边匹配多目标优化模型(9)~(14), 使用线性加权和法将其转化为模型(15)~(18). 为了便于下文作对比, 取 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/3$, 并使用软件LINGO11.0求解, 可得 $x_{16} = x_{24} = x_{33} = x_{41} = 1$, 其余 $x_{ij} = 0$. 即风险投资公司 X_1 投资于风险企业 Y_6 ; 风险投资公司 X_2 投资于风险企业 Y_4 ; 风险投资公司 X_3 投资于风险企业 Y_3 ; 风险投资公司 X_4 投资于风险企业 Y_1 ; 风险企业 Y_2 和 Y_5 未获得风险投资公司的投资.

3.2 结果分析

为了说明本文所提出的双边匹配方法的合理性和有效性, 下面使用文献[21-22]的方法对上述的双

边匹配问题进行求解,表3给出了不同方法的计算结果.由表3可以看出:文献[21-22]的双边匹配结果相同,而本文方法与文献[21-22]的方法获得的双边匹配方案不完全一致,且在单边匹配满意度、双边匹配满意度和双边匹配公平度上均优于文献[21-22]的结果.造成这种差异的主要原因在于,文献[21-22]所构建的基于直觉模糊得分函数的匹配满意度忽略了直觉模糊偏好中的犹豫度信息.例如,在双边偏好列表中 $R_{16} = \langle 0.9, 0.1 \rangle$, $L_{16} = \langle 0.8, 0.0 \rangle$ 分别表示 X_1 对 Y_6 和 Y_6 对 X_1 的直觉模糊偏好.依据文献[21-22]的方法, X_1 对 Y_6 以及 Y_6 对 X_1 的匹配满意度分别为

$\alpha_{16} = 0.8, \beta_{16} = 0.8$,即 R_{16} 与 L_{16} 的含义不同,但它们对应的匹配满意度相同.

本文通过两两比较,计算每个主体的总体优势度,构建基于优势度函数的匹配满意度,基于直觉模糊得分函数和距离测度,挖掘和利用了直觉模糊偏好中的犹豫度信息.结合算例分析的计算结果, R_{16} 和 L_{16} 对应的匹配满意度分别为 $\alpha_{16} = 0.989, \beta_{16} = 0.949$.

综上分析表明了本文双边匹配方法的有效性和合理性.

表3 不同双边匹配方法对应的匹配结果

方法	双边匹配方案 μ	$f_X(\mu)$	$f_Y(\mu)$	$f_{X+Y}(\mu)$	$g(\mu)$
文献[21]	$\{(X_1, Y_6), (X_2, Y_4), (X_3, Y_3), (X_4, Y_2)\}$	3.300	3.300	6.600	0.200
文献[22]	$\{(X_1, Y_6), (X_2, Y_4), (X_3, Y_3), (X_4, Y_2)\}$	3.300	3.300	6.600	0.200
本文	$\{(X_1, Y_6), (X_2, Y_4), (X_3, Y_3), (X_4, Y_1)\}$	3.988	3.949	7.937	0.041

为了增加不同双边匹配方法间的可比性,减少随机因素对结果的干扰,本文使用文献[21-22]的方法(线性加权和法)求解双边匹配多目标优化模型.常用的双边匹配多目标优化模型求解方法还有极大极小法^[10]、理想点法^[16]和隶属函数加权和法^[9]等.下面分别使用极大极小法、理想点法以及隶属函数加权和法求解多目标优化模型(9)~(14),并设定各目标函数的重要性相同.表4给出了不同方法的计算结果.由表4可以看出,不同方法获得的匹配解皆相同,且这些方法各有优势和特点.因此,在实际匹配问题中应根据具体情况选择适合的求解方法.

表4 匹配优化模型不同求解方法对应的匹配解

方法	双边匹配方案 μ
线性加权和法	$\{(X_1, Y_6), (X_2, Y_4), (X_3, Y_3), (X_4, Y_1)\}$
极大极小法	$\{(X_1, Y_6), (X_2, Y_4), (X_3, Y_3), (X_4, Y_1)\}$
理想点法	$\{(X_1, Y_6), (X_2, Y_4), (X_3, Y_3), (X_4, Y_1)\}$
隶属函数加权和法	$\{(X_1, Y_6), (X_2, Y_4), (X_3, Y_3), (X_4, Y_1)\}$

4 结 论

本文针对直觉模糊偏好信息下的双边匹配问题,考虑匹配主体参照依赖和损失规避的心理行为,依据TODIM法计算每个主体的总体优势度,建立了双边公平满意匹配优化模型.与已有方法相比,本文方法考虑了匹配主体的有限理性以及匹配的满意性和公平性.本文为解决直觉模糊偏好信息下的双边匹配问题,提供了一种新的思路和途径.进一步的工作是研究考虑匹配主体后悔规避心理行为的直觉模糊双边匹配问题.

参考文献(References)

[1] Gale D, Shapley L S. College admissions and the stability of marriage[J]. The American Mathematical Monthly, 1962, 69(1): 9-15.

[2] Roth A E. The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory[J]. J of Political Economy, 1984, 92(6): 991-1016.

[3] Huang C C, Kavitha T. Improved approximation algorithms for two variants of the stable marriage problem with ties[J]. Mathematical Programming, 2015, 154(2): 353-380.

[4] Deijfen M, Holroyd A E, Martin J B. Friendly frogs, stable marriage and the magic of invariance[J]. American Monthly, 2017, 124(5): 387-402.

[5] Pais J. Random matching in the college admissions problem[J]. Economic Theory, 2008, 35(1): 99-116.

[6] Azevedo E M. Imperfect competition in two-sided matching markets[J]. Games & Economic Behavior, 2014, 83(1): 207-223.

[7] Sørensen M. How smart is smart money? A two-sided matching model of venture capital[J]. The J of Finance, 2007, 62(6): 2725-2762.

[8] Jiang Z Z, Fan Z P, Ip W H, et al. Fuzzy multi-objective modeling and optimization for one-shot multi-attribute exchanges with indivisible demand[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2016, 24(3): 708-723.

[9] Chen X, Li Z, Fan Z P, et al. Matching demanders and suppliers in knowledge service: A method based on fuzzy axiomatic design[J]. Information Sciences, 2016, 346(6): 130-145.

[10] Lin Y, Wang Y M, Chen S Q. Hesitant fuzzy multi-attribute matching decision making based on regret theory with uncertain weights[J]. Int J of Fuzzy Systems, 2017,

- 19(4): 955-966.
- [11] 张笛, 孙涛, 高明美, 等. 多重偏好序下的复杂产品主制造商-供应商多阶段双边匹配方法[J]. 计算机集成制造系统, 2018, 24(3): 804-812.
(Zhang D, Sun T, Gao M M, et al. Multi-stage two-sided matching method for main manufacturer and suppliers of complex products with multi-form preference ordinal[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2018, 24(3): 804-812.)
- [12] 樊治平, 乐琦. 基于完全偏好序信息的严格双边匹配方法[J]. 管理科学学报, 2014, 17(1): 21-34.
(Fan Z P, Yue Q. Strict two-sided matching method based on complete preference ordinal information[J]. J of Management Sciences in China, 2014, 17(1): 21-34.)
- [13] 梁海明, 姜艳萍, 孔德财. 考虑偏好序的多满意稳定导向双边匹配决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(6): 1535-1546.
(Liang H M, Jiang Y P, Kong D C. Decision-making method on multiple targets of satisfied and stable two-sided matching considering the preference ordering[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2015, 35(6): 1535-1546.)
- [14] 姜艳萍, 梁海明. 基于偏好序的抗操作和抗自亏双边匹配方法[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(2): 473-483.
(Jiang Y P, Liang H M. Strategy proof and self-deprecating proof two-sided matching method based on preference ordering[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2016, 36(2): 473-483.)
- [15] Erdil A, Ergin H. Two-sided matching with indifference[J]. J of Economic Theory, 2017, 171: 268-292.
- [16] 姜艳萍, 孔德才, 袁铎宁. 基于序区间偏好信息的双边稳定匹配研究[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(8): 2152-2161.
(Jiang Y P, Kong D C, Yuan D N. Two-sided stable matching decision-making method with ordinal interval preference[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2017, 37(8): 2152-2161.)
- [17] 乐琦, 樊治平. 基于累积前景理论的双边匹配决策方法[J]. 系统工程学报, 2013, 28(1): 38-46.
(Yue Q, Fan Z P. Decision method for two-sided matching based on cumulative prospect theory[J]. J of Systems Engineering, 2013, 28(1): 38-46.)
- [18] Fan Z P, Li M Y, Zhang X. Satisfied two-sided matching: A method considering elation and disappointment of agents[J]. Soft Computing, 2017, 15(1): 1-15.
- [19] 林杨, 王应明. 考虑直觉模糊偏好关系的双边稳定匹配及应用[J]. 控制与决策, 2015, 30(12): 2212-2218.
(Lin Y, Wang Y M. Bilateral stable matching considering intuitionistic fuzzy preference relations and their application[J]. Control & Decision, 2015, 30(12): 2212-2218.)
- [20] 乐琦. 基于直觉模糊集信息的双边匹配决策[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(6): 109-115.
(Yue Q. Two-sided matching decision based on intuitionistic fuzzy set information[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30(6): 109-115.)
- [21] 乐琦. 考虑匹配意愿的直觉模糊双边匹配决策[J]. 运筹与管理, 2017, 26(6): 24-28.
(Yue Q. Intuitive fuzzy two-sided matching decision considering matching aspiration[J]. Operations Research and Management Science, 2017, 26(6): 24-28.)
- [22] 乐琦. 直觉模糊环境下考虑匹配意愿的双边匹配决策[J]. 中国管理科学, 2017, 25(6): 161-168.
(Yue Q. Two-sided matching decision considering matching aspiration under the intuitionistic fuzzy circumstance[J]. Chinese J of Management Science, 2017, 25(6): 161-168.)
- [23] Yue Q, Zhang L, Peng Y, et al. Decision method for two-sided matching with interval-valued intuitionistic fuzzy sets considering matching aspirations[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2016, 31(6): 2903-2910.
- [24] Gomes L F A M, Lima M M P P. TODIM: Basics and application to multi-criteria ranking of projects with environmental impacts[J]. Foundations of Computing and Decision Sciences, 1992, 16(4): 113-127.
- [25] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-291.
- [26] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [27] Wang J, Zhang J, Liu S Y. A new score function for fuzzy MCDM based on vague set theory[J]. Int J of Computational Cognition, 2006, 1(4): 44-48.
- [28] Szmidt E, Kacprzyk J. Distances between intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2000, 114(3): 505-518.

作者简介

张笛(1987—), 男, 博士生, 从事管理决策分析的研究, E-mail: bengbuzhangdi@163.com;

孙涛(1959—), 男, 教授, 博士生导师, 从事能源经济与环境管理等研究, E-mail: stao@163.com;

耿成轩(1965—), 女, 教授, 博士生导师, 从事财务管理与资本运营等研究, E-mail: gcxuan@nuaa.edu.cn;

万良琪(1991—), 男, 博士生, 从事质量稳健优化与设计的研究, E-mail: wanliangqi@nuaa.edu.cn;

陈洪转(1977—), 女, 教授, 博士生导师, 从事供应链管理研究, E-mail: chz-hhu@163.com.

(责任编辑: 李君玲)