

## 基于MGC法的非线性随机系统PDF控制

杨恒占<sup>1</sup>, 付月园<sup>1</sup>, 高 嵩<sup>1†</sup>, 钱富才<sup>1,2</sup>

(1. 西安工业大学 电子信息工程学院, 西安 710021; 2. 西安理工大学 自动化与信息工程学院, 西安 710048)

**摘 要:** 对于非线性随机系统,以均值、方差等低阶统计特征作为研究目标往往难以满足实际的控制要求,需要考虑更高阶的统计特征. 概率密度函数(Probability density function, PDF)包含了完全统计特征,因此 PDF 控制能够实现各阶矩的有效控制. 针对受高斯白噪声激励的非线性随机系统,将福克-普朗克-柯尔莫哥洛夫(Fokker-Planck-Kolmogrov, FPK)方程作为研究工具,提出一种基于多高斯闭合法(MGC)的 PDF 控制方法. 首先,根据目标 PDF 的形状构造一个由多个高斯型 PDF 相叠加的 PDF;然后,构造一个优化问题,使得该 PDF 逼近目标 PDF;进一步,通过求解 FPK 方程得到被控系统的状态方程;最后,结合原始状态方程求得控制函数,实现对目标 PDF 的追踪控制. 针对不同类型目标 PDF 进行的仿真结果表明了所提出方法的可行性和有效性.

**关键词:** 非线性随机系统; 统计特征; PDF 控制; 高斯白噪声; 福克-普朗克-柯尔莫哥洛夫方程; MGC 法  
**中图分类号:** TP13      **文献标志码:** A

## PDF control of nonlinear stochastic systems based on MGC method

YANG Heng-zhan<sup>1</sup>, FU Yue-yuan<sup>1</sup>, GAO Song<sup>1†</sup>, QIAN Fu-cai<sup>1,2</sup>

(1. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710021, China;  
2. School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** For nonlinear stochastic systems, it is difficult to meet the actual control requirements by taking the low-order statistical characteristics such as mean and variance as the research objects, and the higher order statistical characteristics need to be considered. The probability density function (PDF) contains complete statistical characteristics, therefore, PDF control can achieve effective control of all moments. In this paper, aiming at the nonlinear stochastic system excited by Gaussian white noise, the Fokker-Planck-Kolmogrov (FPK) equation is taken as the research tool, and a PDF control method based on the multi-Gaussian closure (MGC) method is proposed. Firstly, according to the shape of the target PDF, a PDF superimposed by multiple Gaussian PDFs is constructed. Then, an optimization problem is built to make the PDF approximate the target PDF. Furthermore, the state equation of the controlled system is obtained by solving the FPK equation. Finally, the control function is calculated according to the original state equation, and the tracking control of the target PDF is implemented. Simulation results of different target PDFs show the feasibility and the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** nonlinear stochastic systems; statistical characteristics; PDF control; Gaussian white noise; Fokker-Planck-Kolmogrov equation; MGC method

## 0 引 言

在航空航天、机械、船舶、建筑等各领域,普遍存在着受各种外界环境因素干扰以及系统内部元器件参数漂移影响的动力系统,这些干扰或影响基本上都具有一定的不确定性<sup>[1]</sup>. 实际的工业系统几乎都是非线性的,难以利用叠加原理进行系统分析,从而增加了研究的困难度和复杂度. 过去,人们常常将非线性系统简化为线性系统进行分析与控制. 但是,随着

工程系统日趋复杂,非线性特性的影响越来越不容忽视,同时,人们对于系统控制的要求也逐渐提高,采用近似线性化方法已经难以取得令人满意的效果. 因此,近年来非线性随机系统的控制问题吸引了学术界的普遍关注,具有非常重要的研究意义及实用价值.

随机性的存在影响了系统的演化,使系统的输出和控制呈现出不同程度的随机性. 幸运的是,很多情况下,这种随机性具备数学上的统计特征,可以利用

收稿日期: 2017-12-11; 修回日期: 2018-04-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773016); 国家重点研发计划资助项目(2016YFE0111900); 陕西省科技厅项目(2017SF-142); 陕西省复杂系统控制与智能信息处理重点实验室开放课题(2016CP02).

责任编辑: 解学军.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: gaos@xatu.edu.cn.

其统计特征进行控制. 基于此, 概率与统计成为研究随机控制的一个着眼点<sup>[2]</sup>.

传统的随机控制方法将随机变量的均值、方差等低阶矩作为控制目标, 这些方法通常应用于系统响应服从高斯分布的情况, 其中最典型的的就是线性二次型控制<sup>[3-6]</sup>. 然而, 采用传统方法进行非线性随机系统的控制往往不能满足要求, 这是因为许多复杂系统中存在大量非高斯变量<sup>[7]</sup>, 对高阶统计特征的影响不能忽视. 概率密度函数 (Probability density function, PDF) 描述了随机量完全统计特征的分布情况<sup>[8]</sup>, 对 PDF 的控制意味着能够对各阶矩都进行有效控制<sup>[9]</sup>. 例如磨矿工艺, 传统方法大多以矿石粒度的百分比含量为控制指标, 但这一指标只能表示粒度大概的分布情况, 其控制效果必然不好. 如果将粒度的整体分布作为控制目标, 无疑会降低能源损耗和有用矿物的损失, 提高系统控制精度<sup>[10]</sup>. 与传统随机控制方法相比较, PDF 控制不会局限于具有高斯随机性的系统, 且它的控制目标是输出变量的整体分布, 能够实现较高的控制精度.

文献 [11] 利用 FPK 方程推导出 PDF 的解析表达式, 设计了分段线性控制律, 并用共轭梯度法计算其参数, 从而控制 PDF 的形状. 但是, 对于非线性程度较高的系统, 要想取得较好的控制精度则需设置尽可能多的分段点, 这就会大大增加求解难度与控制器的复杂度. 同时, 分段点选择困难的问题也约束了该方法的实际应用. 文献 [8] 首先确定了 PDF 指数部分的 Taylor 展开项系数与控制增益间的关系, 将 PDF 控制转化为一个跟踪优化问题, 通过解决该优化问题得到控制律. 但是, 对于 PDF 能够展开为指数多项式形式的情况, 无论系统非线性程度强弱, 都具有良好的控制效果. 若 PDF 难以展开为指数多项式, 则其控制精度得不到保证, 即使提高控制器阶数, 其控制精度改善也不明显. 文献 [12] 采用非线性最小二乘法获得 FPK 方程的近似解, 进而得到具体的控制函数. 该方法对于弱非线性系统具有良好的控制效果, 但对于强非线性系统而言, 控制器的结构仍然过于复杂. 本文所提出的 PDF 控制法对于强非线性系统同样有效, 而且相比于上述各方法, 更适合于 PDF 形状较为分散时的情况.

本文针对高斯白噪声激励下的非线性随机系统, 提出一种基于多高斯闭合法 (MGC) 的 PDF 控制方法. 首先, 确定近似 PDF 的解析形式, 利用智能优化算法求得该近似 PDF, 使其逼近期望的目标 PDF; 然后, 通过 MGC 法求解 FPK 方程得到被控系统的状态方

程; 最后, 将被控状态方程结合原状态方程, 求得控制函数, 实现对目标 PDF 的追踪控制.

## 1 问题描述

随机激励影响下的非线性系统具有如下动力学方程:

$$dx = f(x)dt + \varepsilon(t)dt, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

施加控制后, 有

$$dx = [f(x) + u(x)]dt + \varepsilon(t)dt, \quad x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

其中:  $x(t) \in R$  为状态响应,  $f(x)$  为非线性原始状态方程,  $u(x)$  为控制函数,  $\varepsilon(t)$  为随机激励,  $x_0$  为初始状态.

本文的研究目的是在随机激励  $\varepsilon(t)$  的影响下, 针对一维非线性随机系统, 确定出反馈控制  $u(x)$ , 使得状态响应  $x(t)$  到达稳态时的 PDF 能够追踪期望的目标 PDF.

令

$$\varphi(x) = f(x) + u(x), \quad (3)$$

由于多项式形式的函数为比较常见的非线性函数, 本文假设  $\varphi(x)$  具有如下多项式形式:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_w x^w. \quad (4)$$

其中:  $a_0, a_1, \dots, a_w$  为待求解参数, 总个数为  $w + 1$ .

从式 (3) 可以看出, 只要求得控制后的状态方程  $\varphi(x)$ , 并从中减去原始状态方程  $f(x)$ , 就可以得到反馈控制函数  $u(x)$ . 因此, 本文最主要的研究内容是被控状态方程  $\varphi(x)$  的求取.

## 2 基于 MGC 的 PDF 控制方法

**定理 1** 非线性随机系统 PDF 的追踪控制问题最终可转化为对下列方程组的求解:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N E_i [a_0 + a_1x + \cdots + a_{2N-1}x^{2N-1}] &= 0, \\ \sum_{i=1}^N E_i [a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_{2N-1}x^{2N}] + N &= 0, \\ \sum_{i=1}^N E_i [a_0x^2 + a_1x^3 + \cdots + \\ a_{2N-1}x^{2N+1}] + 2 \sum_{i=1}^N E_i [x] &= 0, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N E_i [a_0x^{2N-1} + a_1x^{2N} + \cdots + a_{2N-1}x^{4N-2}] + \\ (2N-1) \sum_{i=1}^N E_i [x^{2N-2}] &= 0. \end{aligned}$$

**证明** 根据上节所述, 方程(2)可以写成如下伊藤随机微分方程形式:

$$\frac{d}{dt}x = \varphi(x) + \varepsilon(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (5)$$

其中:  $x(t) \in R$  为状态响应,  $\varphi(x)$  为被控状态方程,  $x_0$  为初始状态. 将随机激励  $\varepsilon(t)$  设为零均值的高斯白噪声, 以便于理论研究及数学处理, 有

$$\begin{cases} E[\varepsilon(t)] = 0, \\ E[\varepsilon(t)\varepsilon(t + \tau)] = 2\pi S_0 \delta(\tau). \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $\delta(\cdot)$  为 Dirac 函数,  $S_0$  为谱密度.

当随机激励为高斯白噪声时, 任何一个非线性随机系统的运动方程都可以转变为伊藤随机微分方程. 此时, 系统的状态响应  $x(t)$  是扩散的 Markov 过程, 该过程可以用转移 PDF 完全描述, 且转移 PDF 被称作 FPK 方程的非线性偏微分方程所控制<sup>[13]</sup>. 动态系统(5)所对应的 FPK 方程<sup>[14]</sup>为

$$\frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial[\varphi(x)p]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2[2\pi S_0 p]}{\partial x^2}, \quad (7)$$

其中  $p(x, t|x_0, t_0)$  为状态响应  $x(t)$  的转移 PDF. FPK 方程的初始条件为

$$p(x, t_0|x_0, t_0) = \delta(x - x_0). \quad (8)$$

转移 PDF  $p(x, t|x_0, t_0)$  表示系统从初始状态  $x_0$  转移到状态  $x$  的概率密度. 若系统初始状态是已知的, 则转移 PDF  $p(x, t|x_0, t_0)$  仅是关于状态  $x$  的 PDF. 此外, 对于 FPK 方程, 一般求其稳态解. 因此, 方程(7)中的转移 PDF  $p(x, t|x_0, t_0)$  与初始条件  $\delta(x - x_0)$  和时间  $t$  都无关, 即存在  $p(x, t|x_0, t_0) = p(x)$  和  $\frac{\partial p(x)}{\partial t} = 0$ . 简化后的 FPK 方程为

$$\frac{\partial[\varphi(x)p(x)]}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2[2\pi S_0 p(x)]}{\partial x^2} = 0. \quad (9)$$

从方程(9)可以看出, 在控制器  $u(x)$  的作用下, 若要使得系统稳态响应的 PDF  $p(x)$  能够完全追踪目标 PDF  $p_d(x)$ , 则只需将事先给定的目标 PDF  $p_d(x)$  代入到方程(9)中求得被控状态方程  $\varphi(x)$ , 再用  $\varphi(x)$  减去原始状态方程  $f(x)$  即可. 此时, 所获得的控制器为最佳控制器. 但是, 在非线性的随机系统中, 方程(9)的求解过程比较复杂, 且只有在极少数特殊情况下才能得到 FPK 方程的精确平稳解. 因此, 一般情况下避免对方程(9)直接求解. 本文采用 MGC 法来求解 FPK 方程, 具体的求解过程如下所述.

假设存在一个与目标 PDF  $p_d(x)$  非常接近的 PDF  $p'(x)$ , 且该近似 PDF  $p'(x)$  为高斯型 PDF 相叠加的形式

$$p'(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i(x), \quad N \geq 1, \quad (10)$$

其中  $p_i(x)$  为遵循高斯分布的基础函数. 各个基础函数的权重相同, 且各权重之和等于 1, 有

$$\begin{cases} \alpha_i = 1/N, \\ p_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\sigma_i|} \exp\left(-\frac{(x - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right). \end{cases} \quad (11)$$

将式(11)代入到(10)中, 近似的 PDF 可表示为

$$p'(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N\sqrt{2\pi}|\sigma_i|} \exp\left(-\frac{(x - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad N \geq 1. \quad (12)$$

其中:  $m_i$  和  $\sigma_i$  均是未知的, 总个数为  $2N$  个.

将式(12)代入到(9)中会产生一定的误差, 导致式(9)不成立, 这是因为  $p'(x)$  只是目标 PDF  $p_d(x)$  的一个近似解. 产生的误差函数为

$$\begin{aligned} \delta(x) = & \frac{\partial[\varphi(x)p'(x)]}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2[2\pi S_0 p'(x)]}{\partial x^2} = \\ & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial[\varphi(x)p_i(x)]}{\partial x} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2[\pi S_0 p_i(x)]}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

由式(13)可知, 近似 PDF  $p'(x)$  越逼近期望的目标 PDF  $p_d(x)$ , 所产生的误差  $\delta(x)$  越小, 控制器的控制效果越好. 当近似 PDF  $p'(x)$  与目标 PDF  $p_d(x)$  完全相同时, 误差  $\delta(x)$  为零, 式(13)等价于(9). 此时, 引入一个独立函数  $h_k(x) = x^k (k = 1, 2, \dots, w + 1 = 2N)$ , 函数空间为  $R^k$ , 该函数能够使式(13)在空间  $R^k$  上的投影消失<sup>[15]</sup>:

$$\int_R \delta(x) h_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, w + 1 = 2N. \quad (14)$$

这表明, 近似 PDF  $p'(x)$  在弱积分情况下满足化简后的 FPK 方程(11). 该过程弱化了积分的求解, 但并不影响最终的计算结果. 考虑  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0$ , 可得投影的 FPK 方程为

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i \left[ \varphi(x) \frac{\partial h_k(x)}{\partial x} \right] + \frac{\pi S_0}{N} \sum_{i=1}^N E_i \left[ \frac{\partial^2 h_k(x)}{\partial x^2} \right] = 0, \\ k = 1, 2, \dots, w + 1 = 2N; \end{aligned} \quad (15)$$

或

$$\begin{aligned} \frac{k}{N} \sum_{i=1}^N E_i [(a_0 + a_1 x + \dots + a_w x^w) x^{k-1}] + \\ \frac{k(k-1)\pi S_0}{N} \sum_{i=1}^N E_i [x^{k-2}] = 0, \\ k = 1, 2, \dots, w + 1 = 2N. \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$E_i[\cdot] = \int_R \cdot p_i(x) dx. \quad (17)$$

由于  $p_i(x)$  具有高斯分布的形式, 很容易求得

$E_i[\cdot]$  的值,求解式(16)即可得到被控状态方程. 为了便于数学计算,取  $S_0 = \frac{1}{\pi}$  ( $S_0$  也可取其他值). 将式(16)展开得到方程组

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N E_i[a_0 + a_1x + \dots + a_{2N-1}x^{2N-1}] &= 0, \\ \sum_{i=1}^N E_i[a_0x + a_1x^2 + \dots + a_{2N-1}x^{2N}] + N &= 0, \\ \sum_{i=1}^N E_i[a_0x^2 + a_1x^3 + \dots \\ + a_{2N-1}x^{2N+1}] + 2 \sum_{i=1}^N E_i[x] &= 0, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N E_i[a_0x^{2N-1} + a_1x^{2N} + \dots + a_{2N-1}x^{4N-2}] + \\ (2N-1) \sum_{i=1}^N E_i[x^{2N-2}] &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

证明完毕.  $\square$

通过方程组(18),能够求出式(4)中  $\varphi(x)$  的系数  $a_0, a_1, \dots, a_w$ . 但是,由于近似PDF  $p'(x)$  是未知的,导致方程组(18)无法求解. 为求得  $p'(x)$ , 本文构造下述优化问题,以得到最佳的近似PDF

$$\min e = \int_{-\infty}^{\infty} [p'(x) - p_d(x)]^2 dx. \quad (19)$$

解决该优化问题的算法多种多样,因此在此不作过多介绍. 得到了  $p'(x)$ , 就可以通过式(17)得到  $E_i[\cdot]$ , 进而可解方程组(18)得到  $\varphi(x)$ , 最终通过式(3)得到  $u(x)$ .

根据以上分析可以看出,若目标PDF具备多个高斯型函数线性叠加的形式,则只需将其代入FPK方程中求解即可获得被控状态方程,进而计算出控制函数;否则,就需要通过优化问题(19)得到近似的高斯型函数线性叠加形式,然后再利用MGC法求解控制函数. 此时,PDF控制误差取决于线性叠加高斯函数对于目标PDF的逼近误差.

### 3 实例分析

**例1** 考虑如下非线性随机系统:

$$\dot{x} = x + 3x^2 - 7x^3 + \varepsilon(t). \quad (20)$$

其中: 高斯白噪声  $\varepsilon(t)$  的均值为零, 谱密度  $S_0 = \frac{1}{\pi}$ . 给该系统施加控制后,有

$$\dot{x} = x + 3x^2 - 7x^3 + u(x) + \varepsilon(t). \quad (21)$$

令  $\varphi(x) = x + 3x^2 - 7x^3 + u(x)$ , 则方程(21)可表示为  $\dot{x} = \varphi(x) + \varepsilon(t)$ .

首先,考虑待追踪的目标PDF为单峰时的情况:

$$p_d(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|0.5|} \exp\left[-\frac{(x-2)^2}{2 \times 0.5^2}\right]. \quad (22)$$

由于此时的目标PDF为高斯形式,可利用其直接求取控制函数,且  $N = 1$ . 根据  $2N = w + 1$ , 可知  $w = 1$ ,  $\varphi(x) = a_0 + a_1x$ . 由式(16)可得

$$\begin{aligned} E[(a_0 + a_1x)x^{k-1}] + (k-1)E[x^{k-2}] &= 0, \\ k &= 1, 2. \end{aligned} \quad (23)$$

将式(23)展开成方程组形式

$$\begin{cases} E[a_0 + a_1x] = 0, \\ E[a_0x + a_1x^2] + 1 = 0. \end{cases} \quad (24)$$

此时,  $p_i(x) = p_d(x)$ , 且  $i = 1$ . 根据式(17),求解上述方程组可得

$$\begin{aligned} a_0 &= 8, a_1 = -4, \\ \varphi(x) &= 8 - 4x. \end{aligned}$$

由式(20)可知,原状态方程为

$$f(x) = x + 3x^2 - 7x^3.$$

由上述被控状态方程  $\varphi(x)$  和式(3)可得

$$u(x) = 8 - 5x - 3x^2 + 7x^3.$$

图1为单峰目标PDF、指数多项式控制法得到的PDF和本文方法所得到的PDF之间的比较. 从图1可以看出,当目标PDF为单峰时,本文所提出的方法和指数多项式PDF控制法均能够实现对目标PDF的完全控制.

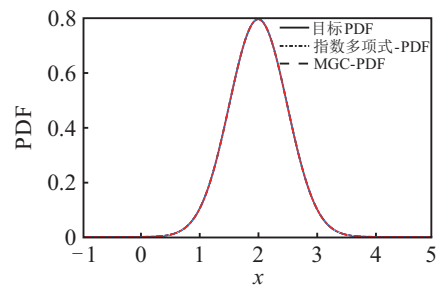


图1 单峰目标PDF与被控PDF( $N = 1$ )

例1中的目标PDF为单峰,那么当目标PDF有多个峰值时,将会呈现出怎样的控制效果?

#### 例2

$$\begin{aligned} p_d(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}|0.8|} \exp\left[-\frac{(x+4)^2}{2 \times 0.8^2}\right] + \\ &\frac{1}{2\sqrt{2\pi}|1|} \exp\left[-\frac{(x-4)^2}{2 \times 1^2}\right]. \end{aligned} \quad (25)$$

从式(25)可以看出,目标PDF是由两个较分散的高斯函数所组成的. 其中

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|0.8|} \exp\left[-\frac{(x+4)^2}{2 \times 0.8^2}\right], \quad (26)$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|1|} \exp\left[-\frac{(x-4)^2}{2 \times 1^2}\right]. \quad (27)$$

与例1相同,此时的目标PDF与上节所假设的近似PDF形式一致. 因此,可将其直接代入到FPK方程(15)中求解,由式(3)得到控制函数.

由目标PDF(25)可知  $N = 2$ , 根据  $2N = w + 1$ , 此时  $w = 3, \varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_3x^3$ . 根据等式(16)可得

$$\begin{aligned} & \frac{k}{2} \sum_{i=1}^2 E_i[(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)x^{k-1}] + \\ & \frac{k(k-1)}{2} \sum_{i=1}^2 E_i[x^{k-2}] = 0, \\ & k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{28}$$

将式(28)展开成方程组形式

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 E_i[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3] = 0, \\ & \sum_{i=1}^2 E_i[a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4] + 2 = 0, \\ & \sum_{i=1}^2 E_i[a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \\ & a_3x^5] + 2 \sum_{i=1}^2 E_i[x] = 0, \\ & \sum_{i=1}^2 E_i[a_0x^3 + a_1x^4 + a_2x^5 + \\ & a_3x^6] + 3 \sum_{i=1}^2 E_i[x^2] = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

已知  $p_i(x) (i = 1, 2)$ , 由式(17)求解上述方程组可得  $a_0 = -0.5044, a_1 = 0.5746,$   
 $a_2 = 0.0341, a_3 = -0.0319,$   
 $\varphi(x) = -0.5044 + 0.5746x + 0.0341x^2 - 0.0319x^3.$

根据式(3)得到控制函数为

$$u(x) = -0.5044 - 0.4254x - 2.9659x^2 + 6.9681x^3.$$

图2为多峰目标PDF、指数多项式控制法得到的PDF和本文所得到的PDF之间的比较. 由于目标PDF本身具有多高斯型函数线性叠加的特性,可直接利用其求出控制函数. 从图2可以看出,本文所提出的方法能够完全控制目标PDF,相较于指数多项式PDF控制法,该方法更适用于较分散的PDF.

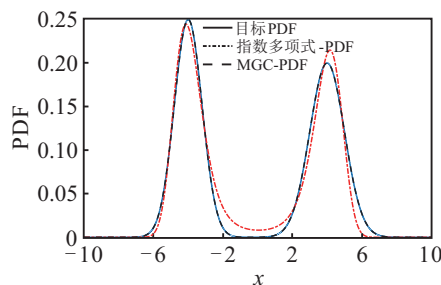


图2 多峰目标PDF与被控PDF( $N = 2$ )

以上两例中的目标PDF均属于较理想的情况,下面分析复杂多峰目标PDF的控制.

**例3**

$$\begin{aligned} p_d(x) = & 0.23 \exp\left(x^2 - \frac{5x^4}{3}\right) + \\ & 0.3536 \exp\left(-7x - \frac{x^2}{2} - \frac{49}{2}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

根据式(30),此时的目标PDF不同于以上两例,不能直接采用MGC法计算,首先应该解决优化问题(19)得出近似PDF.

取  $N = 2$ , 则近似PDF是由两个高斯函数所组成的. 将式(30)代入到(19)中,解得  $\min e = 0.0064$ , 且

$$\begin{aligned} m_1 &= -7, \sigma_1 = 1, \\ m_2 &= 0, \sigma_2 = 0.7110. \end{aligned}$$

则近似PDF为

$$\begin{aligned} p_d(x) = & \frac{1}{2\sqrt{2\pi}|1|} \exp\left[-\frac{(x+7)^2}{2 \times 1^2}\right] + \\ & \frac{1}{2\sqrt{2\pi}|0.7110|} \exp\left[-\frac{x^2}{2 \times 0.7110^2}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

其中

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|1|} \exp\left[-\frac{(x+7)^2}{2 \times 1^2}\right], \tag{32}$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|0.7110|} \exp\left[-\frac{x^2}{2 \times 0.7110^2}\right]. \tag{33}$$

同例2,此时  $N = 2$ , 且  $2N = w + 1$ , 则  $w = 3, \varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_3x^3$ . 需要求解的方程组与方程组(29)相同,但是  $p_i(x) (i = 1, 2)$  的不同导致了解的不同,解得

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.2466, a_1 = -0.8635, \\ a_2 &= -0.3709, a_3 = -0.0339, \\ \varphi(x) &= 0.2466 - 0.8635x - 0.3709x^2 - 0.0339x^3, \\ u(x) &= 0.2466 - 1.8635x - 3.3709x^2 + 6.9661x^3. \end{aligned}$$

图3为较复杂的多峰目标PDF与本文提出的方法所得到的PDF之间的比较. 其中没有指数多项式控制法的效果展示,这是因为经过研究发现指数多项式形式的函数无法逼近该目标PDF. 也就是说,它不适用于较复杂的分散PDF. 相比之下,本文方法对于此类PDF却有良好的控制效果.

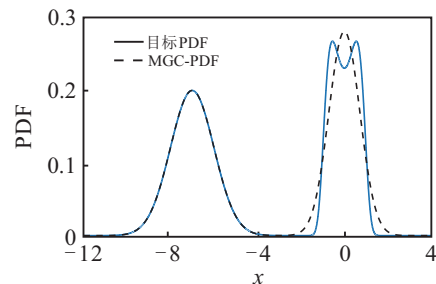


图3 复杂多峰目标PDF与被控PDF( $N = 2$ )

## 4 结论

非线性随机系统状态响应的变化充满不确定性,对其进行控制研究比较困难,但这种变化遵循着一定的统计规律,因此可以以其统计特征为基础展开研究,通常采用PDF控制. 高斯白噪声激励下的非线性随机系统具有Markov性,可以通过FPK方程研究PDF的控制问题. 但是,对FPK方程直接求解困难重重,而且一般情况下难以得到精确值. 本文提出了一种基于MGC法的PDF控制方法,有效降低了FPK方程的求解难度. 从不同形状特征的目标PDF的仿真可以看出,该方法具有较好的可行性和有效性. 相对于已有的一些控制方法,该方法更适用于强非线性系统以及形状较分散的PDF.

本文所提出的方法具有较强的实用性,且容易实现,为随机控制理论在实际工程中的应用提供了新的思路. 然而,本文仅研究了一维非线性随机系统的PDF控制,将该方法应用于二维及以上的非线性随机系统时如何才能达到良好的追踪控制效果是需要进一步研究的. 此外,本文中组成近似PDF的基础函数为高斯型,其指数部分的最高阶次为二阶. 当组成近似PDF的基础函数具有更高阶的指数部分时,能否实现PDF的追踪控制也是后续值得研究的内容.

## 参考文献(References)

- [1] 栾小丽, 刘飞. 随机系统输出概率密度函数的有限时间镇定[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1161-1166.  
(Luan X L, Liu F. Finite time stabilization for output probability density function of stochastic system[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1161-1166.)
- [2] Qian F C, Gao J J, Li D. Complete statistical characterization of discrete-time LQG and cumulant control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(8): 2110-2115.
- [3] Yang H Z, Gao S, Qian F C, et al. A suboptimal dual control method for the stochastic systems with parameters drifting[J]. Asian J of Control, 2018, DOI: 10.1002/asjc.1750.
- [4] Qian F C, Xie G, Liu D, et al. Nonlinear optimal trade-off control for LQG problem[C]. Proc of the 2010 American Control Conf. Baltimore: IEEE, 2010: 1931-1936.
- [5] 高振斌, 钱富才. 基于LMI不确定离散随机系统输出反馈保性能控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 170-174.  
(Gao Z B, Qian F C. Output feedback guaranteed cost control of uncertainty discrete stochastic system based on LMI[J]. Control and Decision, 2011, 26(2): 170-174.)
- [6] Xiao Q K, Luo Y C, Wang H Y. Motion retrieval based on switching kalman filters model[J]. Multimedia Tools and Applications, 2014, 72(1): 951-966.
- [7] 陈海永, 孙鹤旭, 王宏. 一类仿射非线性系统的概率密度函数形状控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(8): 1169-1174.  
(Chen H Y, Sun H X, Wang H. Probability density function shape control of a class of affine nonlinear stochastic systems[J]. Control and Decision, 2011, 26(8): 1169-1174.)
- [8] 杨恒占, 钱富才, 黄姣茹, 等. 一类随机系统完全统计特征控制[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(5): 669-675.  
(Yang H Z, Qian F C, Huang J R, et al. The complete statistical characterization control for a class of stochastic systems[J]. Control Theory & Applications, 2016, 33(5): 669-675.)
- [9] 杨恒占, 钱富才, 高韵, 等. 随机系统的概率密度函数形状调节[J]. 物理学报, 2014, 63(24): 122-129.  
(Yang H Z, Qian F C, Gao Y, et al. The shape adjustment of probability density function for stochastic systems[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(24): 122-129.)
- [10] 张红燕, 殷利平, 张永宏. 磨矿粒度分布的概率密度函数跟踪控制研究[J]. 计算机仿真, 2014, 31(10): 364-368.  
(Zhang H Y, Yin L P, Zhang Y H. Probability density function tracking control for particle size distribution of grinding circuits[J]. Computer Simulation, 2014, 31(10): 364-368.)
- [11] Wang L Z, Qian F C. Shaping the PDF of the state variable based on piecewise linear control for non-linear stochastic systems[J]. Science China: Information Sciences, 2016, 59(11): 106-116.
- [12] Wang L Z, Qian F C. Technique of probability density function shape control for nonlinear stochastic systems[J]. J of Shanghai Jiaotong University, 2015, 20(2): 129-134.
- [13] 朱位秋. 非线性随机振动理论的近期进展[J]. 力学进展, 1994, 24(2): 163-173.  
(Zhu W Q. Recent advances in nonlinear stochastic vibration theory[J]. Advances in Mechanics, 1994, 24(2): 163-173.)
- [14] 李杰, 陈建兵. 随机动力系统里的概率密度演化方程及其研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(2): 170-188.  
(Li J, Chen J B. Evolution equation of probability density in stochastic dynamical systems and its research progress[J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(2): 170-188.)
- [15] Er G K. Multi-Gaussian closure method for randomly excited non-linear systems[J]. Int J Non-Linear Mechanics, 1998, 33(2): 201-214.

## 作者简介

杨恒占(1976—), 男, 副教授, 博士, 从事随机系统、最优控制、系统辨识等研究, E-mail: yanghengzhan@126.com;

付月园(1993—), 女, 硕士生, 从事随机系统的研究, E-mail: 1782167250@qq.com;

高嵩(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事最优控制、智能控制、分数阶控制等研究, E-mail: gaos@xatu.edu.cn;

钱富才(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统、最优控制、随机系统等研究, E-mail: fcqian@xaut.edu.cn.

(责任编辑: 齐 霖)