文章编号: 1001-0920(2019)07-1469-06　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1723

一种有效的不确定分数阶T-S模糊系统的控制器设计方法

张雪峰†, 刘洋洋

(东北大学 理学院，沈阳 110819)

摘　要: 考虑分数阶非线性系统的稳定和镇定问题,基于线性矩阵不等式(LMI)方法,对分数阶T-S模糊系统进行研究. 利用并行分布补偿法,设计分数阶T-S模糊系统的控制器. 考虑阶次满足$0 < \alpha < 1$的分数阶系统,给出可以利用Matlab求解的LMI形式的T-S模糊控制器设计镇定判据. 该判据的优点是可以处理具有正实部特征根的分数阶T-S模糊系统的稳定性和镇定问题,能够保持与Matignon分数阶系统稳定性结论的一致性,并克服其他方法只能处理特征根在负实部的方法的局限性和保守性. 数值仿真结果验证了所提控制器设计方法的有效性.

关键词: 分数阶系统；T-S模糊模型；模糊状态反馈控制器；线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号: TP18　　**文献标志码:** A

An effective method of controller design for uncertain fractional T-S fuzzy systems

ZHANG Xue-feng†, *LIU Yang-yang*

(School of Sciences，Northeastern University，Shenyang 110819，China)

Abstract: Considering the stability and stabilization of a class of nonlinear fractional order systems, based on the linear matrix inequality(LMI) approach, fractional order T-S fuzzy systems are studied. Using the method of parallel distributed compensation, controllers of fractional order T-S fuzzy systems are designed. Considering the fractional order T-S fuzzy systems with the order α satisfying $0 < \alpha < 1$, stabilization criterion is given in terms of LMI, which can be solved by Matlab. This criterion can handle the problems of the stability and stabilization of fractional order T-S fuzzy systems which have positive real eigenvalues, while maintaining the consistency with the stability criterion of fractional order systems from Matignon. The limitation and conservatsm of the eigenvalues in negative real parts in the other methods are solved. Numerical simulation results verify the effectiveness of the proposed controller design method.

Keywords: fractional order system；T-S fuzzy model；fuzzy state feedback controllers；linear matrix inequality(LMI)

0 引　言

最近几十年,分数阶微积分方程越来越多地被用来解决科学领域的诸多问题,许多物理系统因其特殊的材料和化学特性而展现出分数阶动力学行为. 文献[1-2]认为“实际系统通常大都是分数阶的”,采用分数阶描述那些本身带有分数阶特性的对象时,能够更好地揭示对象的本质特性及其行为,如流体力学[3]控制理论及线性和非线性分数阶电气系统控制[4]问题等. 与整数阶微分方程建立的模型相比,分数阶微积分模型能为很多种实际的控制系统建立更加精确的模型.

在实际的控制应用中引入分数阶系统(FOS)是非常有必要和有意义的. Li等[5]较早研究了非线性系统的稳定性问题;朱呈祥等[6]对分数阶控制理论及其应用研究作了很全面的总结评述和展望. 近年来,FOS引起了越来越多学者的兴趣,吸引了更多的注意. 分数阶模糊控制系统的稳定性问题,是FOS研究领域的热门话题. 为分数阶控制理论的发展作出开拓贡献的当属Podlubny的标志性成果[7],此方法基于频域的控制思想,拓展和完善了整数阶控制系统的控制规模和水平. Oustaloup等[8]提出了CRONE控制原理; Matignon[9]研究了分数阶系统的稳定性判据,适用于判定线性定常分数阶系统的稳定性.

1985 年, Takagi 等[10]建立了T-S模糊模型,利用T-S模糊模型可以将整个非线性系统看作是多个局部线性系统模糊逼近,并将线性系统理论与模糊理论相结合来解决非线性系统控制问题. 目前,T-S模糊系统的研究成果很多,特别是将整数阶T-S模糊系

收稿日期: 2017-12-18；**修回日期:** 2018-05-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61673094, 61673100).

†通讯作者. E-mail: zhangxuefeng@mail.neu.edu.cn.

统拓展成的分数阶T-S模糊系统具有比整数阶T-S模糊系统更加复杂和有趣的成果,例如混沌控制[11]、鲁棒H_∞控制[12]、输出反馈控制[13]、镇定性[14]、稳定性[15]和时滞系统[16]等. 文献[17-18]研究了阶次α $(0<\alpha<1)$的不确定分数阶T-S模糊系统的控制器设计问题,因为其方法需要较强的限制条件,即假设$P_{11}=P_{21}=P, P_{21}=P_{22}=0$,并且根据其可行解求得闭环系统特征根的实部全部在左半平面,导致其方法有较强的保守性. 本文首先根据文献[19]分数阶系统的LMI稳定性判据研究不确定分数阶T-S模糊系统镇定性问题,并给出无保守性不确定分数阶T-S模糊系统镇定性LMI判据,根据该判据求得的闭环系统特征根能够保持在右半平面使系统稳定,该方法能够避免文献[17]所给方法的保守性;然后,基于镇定性法则给出使得分数阶T-S模糊系统稳定的状态反馈控制器设计方法;最后通过数值仿真验证所推导定理的有效性.

1 准备工作和问题描述

下面介绍分数阶系统的基本定理,并且引入不确定T-S模糊分数阶系统.

定义1[20] Caputo分数阶微积分. 设函数$f(\tau)$在区间$[a,t]$上m阶可导,即

$$ {}_aD_t^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}\mathrm{d}\tau, $$

其中$\Gamma(\cdot)$是Gamma函数,其定义为

$$ \Gamma(q)=\int_0^\infty t^{q-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, $$

$m-1\leqslant\alpha<m, m\in N$.

引理1[19] 分数阶系统$D^\alpha x(t)=Ax(t)$是渐近稳定的充要条件是,存在矩阵X和反对称矩阵Y使得

$$ \begin{bmatrix} X & Y\\ -Y & X\end{bmatrix}>0 $$

以及

$$ aAX+bAY+aXA^{\mathrm{T}}-bYA^{\mathrm{T}}<0 $$

成立. 其中: $a=\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}, b=\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}$.

引理2[21] 给定两个适当维数的矩阵M和N,若其对所有$F(t)$满足$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$,则有下式成立:

$$ MF(t)N+N^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)M^{\mathrm{T}}\leqslant\epsilon MM^{\mathrm{T}}+\epsilon^{-1}N^{\mathrm{T}}N. $$

引理3[22] 对于给定的矩阵S_1、S_2和S_3, $S_1+S_2S_3^{-1}S_2^{\mathrm{T}}<0$成立的充要条件是

$$ \begin{bmatrix} S_1 & S_2\\ S_2^{\mathrm{T}} & -S_3\end{bmatrix}<0. $$

其中: $S_1=S_1^{\mathrm{T}}, S_3>0$.

文献[17]给出了如下不确定分数阶T-S模糊模型:

Rule i: if $z_1(t)$ is H_{i1} and $z_s(t)$ is H_{is},

$$ \text{then}\begin{cases} D^\alpha x(t)=\bar{A}_ix(t)+\bar{B}_iu(t),\\ y(t)=\bar{C}_ix(t). \end{cases} \tag{1} $$

其中

$$ \bar{A}_i=A_i+\Delta A_i, \bar{B}_i=B_i+\Delta B_i. $$

Rule $i(i=1,2,\cdots,r)$代表第i个if-then规则,r是模糊系统的规则数; $z_j(t)\in\boldsymbol{R}$和$H_{ij}(i,j=1,2,\cdots,r)$分别代表前件变量和第i个规则的模糊集合; $x(t)\in\boldsymbol{R}^n, u(t)\in\boldsymbol{R}^m, x(0)$是初始状态; $A_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$是系统状态矩阵, $B_i\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$是控制输入矩阵, $C_i\in\boldsymbol{R}^{p\times n}$是系统输出矩阵; ΔA_i和ΔB_i分别与A_i和B_i相对应,都是时不变矩阵,用来表示范数有界干扰的不确定参数,形式为

$$ [\Delta A_i\ \ \Delta B_i]=[M_{Ai}F_{Ai}N_{Ai}\ \ M_{Bi}F_{Bi}N_{Bi}], $$

M_{Ai}、M_{Bi}和N_{Ai}、N_{Bi}是适当的实数矩阵, F_{Ai}和F_{Bi}满足

$$ F_{Ai}^{\mathrm{T}}F_{Ai}\leqslant I,\ F_{Bi}^{\mathrm{T}}F_{Bi}\leqslant I. $$

不确定分数阶T-S模糊系统的形式如下:

$$ \begin{cases} D^\alpha x(t)=\sum\limits_{i=1}^r h_i(z(t))[\bar{A}_ix(t)+\bar{B}_iu(t)],\\ y(t)=\bar{C}_ix(t). \end{cases} \tag{2} $$

其中

$$ \begin{cases} z(t)=(z_1(t),z_2(t),\cdots,z_n(t)),\\ h_i(z(t))=\dfrac{w_i(z(t))}{\sum\limits_{i=1}^r w_i(z(t))},\\ w_i(z(t))=\prod\limits_{j=1}^n H_{ij}(z_j(t)),\\ \qquad i=1,2,\cdots,r. \end{cases} $$

$H_{ij}(z_j(t))$是$z_j(t)$在H_{ij}的隶属度,满足

$$ \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^r h_i(z(t))=1,\\ h_i(z(t))\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,r \end{cases} $$

以及

$$ \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^r w_i(z(t))>0,\\ w_i(z(t))\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,r, \end{cases} $$

$h_i(z(t))$可被视为if-then规则的归一化权重. 对于不确定分数阶T-S 模糊系统(1),不确定分数阶T-S模糊

系统的自治系统可以被写成如下形式:

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\bar{A}_i x(t),\\ x(0)=x_0,\ i=1,2,\cdots,r. \end{cases} \tag{3}$$

如果不确定分数阶T-S模糊系统是不稳定的,则需要设计T-S模糊状态反馈控制器使得系统稳定,控制器规则如下:

Rule i: if $z_1(t)$ is H_{i1} and $\cdots$ and $z_s(t)$ is H_{is} then $u(t)=K_i x(t),\ i=1,2,\cdots,r.$

其中$K_i\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$是状态反馈增益矩阵. 因此,据此控制输入,闭环系统可以表示成如下形式:

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))(\bar{A}_i+\bar{B}_iK_i)x(t),\\ x(0)=x_0. \end{cases} \tag{4}$$

为了使闭环系统稳定,需要设计模糊状态反馈增益矩阵K_i作为控制器.

定义2[23] 如果存在矩阵X和反对称矩阵Y使得

$$\begin{bmatrix} X & Y\\ -Y & X\end{bmatrix}>0$$

以及

$$\begin{aligned} &a(A+\Delta A)X+b(A+\Delta A)Y+\\ &aX(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}-bY(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}<0 \end{aligned}$$

成立,则零输入系统(1)称为二次稳定的.

引理4[17] 在模糊控制器的控制下,阶次为α $(0<\alpha<1)$的闭环控制系统(4)渐近稳定的充分条件是存在矩阵$K_i(i=1,2,\cdots,r)$,其可以表示为$K_i=X_iP^{-1}(i=1,2,\cdots,r)$. 其中:矩阵$X_i\in\boldsymbol{R}^{m\times n}(i=1,2,\cdots,r)$和$P\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$是对称正定矩阵,$\varepsilon_{ij}>0$和$\delta_{ij}>0(i=1,2,\cdots,r,j=1,2)$是实变量,满足

$$\begin{bmatrix} \varPhi_{i11} & I_2\otimes(N_{Ai}P)^{\mathrm{T}} & I_2\otimes(N_{Ai}P)^{\mathrm{T}} & I_2\otimes(N_{Bi}X_i)^{\mathrm{T}} & I_2\otimes(N_{Ai}X_i)^{\mathrm{T}}\\ * & -\varepsilon_{i1}\otimes I_{2n} & 0 & 0 & 0\\ * & * & -\varepsilon_{i2}\otimes I_{2n} & 0 & 0\\ * & * & * & -\delta_{i1}\otimes I_{2n} & 0\\ * & * & * & * & -\delta_{i2}\otimes I_{2n} \end{bmatrix}<0.$$

其中

$$\begin{aligned} \varPhi_{i11}=&\sum_{j=1}^{2}\mathrm{sym}\{\varTheta_{j1}\otimes(A_iP+B_iX_i)\}+\\ &\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_{ij}(I_2\otimes(M_{Ai}M_{Ai}^{\mathrm{T}}))+\\ &\sum_{j=1}^{2}\delta_{ij}(I_2\otimes(M_{Bi}M_{Bi}^{\mathrm{T}})), \end{aligned}$$

$$\varTheta_{11}=\begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix},\ \varTheta_{21}=\begin{bmatrix} a & b\\ -b & a\end{bmatrix},$$

$a=\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)$,$b=\cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)$,以下$a$、$b$皆以此种方式表示;$\mathrm{sym}\{X\}=X+X^{\mathrm{T}}$.

2 不确定分数阶T-S模糊系统的状态反馈

为每一个子系统分别设计状态反馈控制器$K_i(i=1,2,\cdots,r)$,以确保闭环系统稳定,可得到如下定理.

定理1 存在一个状态反馈控制器$u(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))K_ix(t)$,使得阶数为$\alpha(0<\alpha<1)$的不确定分数阶T-S模糊闭环控制系统(4)对所有容许的不确定干扰系统渐近稳定的充分条件是,存在矩阵$X\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$、反对称矩阵$Y\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$和$Z_i\in\boldsymbol{R}^{l\times n}$,以及实变量$\varepsilon_i>0$和$\delta_i>0$,满足

$$\begin{bmatrix} X & Y\\ -Y & X\end{bmatrix}>0 \tag{5}$$

和

$$\begin{bmatrix} \varPsi_i & (aN_{Ai}X+bN_{Ai}Y)^{\mathrm{T}} & (N_{Bi}Z_i)^{\mathrm{T}}\\ * & -\varepsilon_iI & 0\\ * & * & -\delta_iI \end{bmatrix}<0. \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} \varPsi_i=&\\ &aA_iX+bA_iY+B_iZ_i+(aA_iX+bA_iY+\\ &B_iZ_i)^{\mathrm{T}}+\varepsilon_iM_{Ai}M_{Ai}^{\mathrm{T}}+\delta_iM_{Bi}M_{Bi}^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

实数$K_i=Z_i(aX+bY)^{-1},i=1,2,\cdots,r.$

证明 由于$\Delta A_i=M_{Ai}F_{Ai}N_{Ai}$且$\Delta B_i=M_{Bi}F_{Bi}N_{Bi}$,系统(4)可以被写成如下形式:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x(t)=&\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[A_i+M_{Ai}F_{Ai}N_{Ai}+\\ &(B_i+M_{Bi}F_{Bi}N_{Bi})K_i]x(t). \end{aligned}$$

系统(4)的子系统可以被精确地线性化成如下形式:

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}x(t)=\\ &[A_i+M_{Ai}F_{Ai}N_{Ai}+(B_i+M_{Bi}F_{Bi}N_{Bi})K_i]x(t). \end{aligned}$$

根据引理1和定义2,系统(4)是渐近稳定的充分条件是存在矩阵$X,Y\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$使得式(5)和

$$\Psi=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[(aA_iX+bA_iY+B_iZ_i)+$$
$$(aA_iX+bA_iY+B_iZ_i)^{\mathrm{T}}+$$
$$a\Delta A_iX+b\Delta A_iY+aX_i\Delta A_i^{\mathrm{T}}+$$
$$bY^{\mathrm{T}}\Delta A_i^{\mathrm{T}}+\Delta B_iZ_i+Z_i^{\mathrm{T}}\Delta B_i^{\mathrm{T}}]<0 \quad (7)$$

成立. 其中, $Z_i=K_i(aX+bY)$. 因为X是正定的, Y是反对称的, 所以

$$-(aX+bY)I-(aX+bY)^{\mathrm{T}}I=-2aX<0.$$

由Lyapunov稳定理论可知$\mathrm{Re}(-aX-bY)<0$, 进而可以保证$aX+bY$一定可逆, 且$Z_i\in\boldsymbol{R}^{l\times n}$, 因此, 状态反馈增益矩阵为$K_i=Z_i(aX+bY)^{-1}$, $i=1,2,\cdots,r$. 根据引理2以及$F_{Ai}^{\mathrm{T}}F_{Ai}\leqslant I$和$F_{Bi}^{\mathrm{T}}F_{Bi}\leqslant I$, 对于任意实数$\varepsilon_i>0,\delta_i>0$, 可得

$$a\Delta A_iX+b\Delta A_iY+aX_i\Delta A_i^{\mathrm{T}}+$$
$$bY^{\mathrm{T}}\Delta A_i^{\mathrm{T}}+\Delta B_iZ_i+Z_i^{\mathrm{T}}\Delta B_i^{\mathrm{T}}\leqslant$$
$$\varepsilon_iM_{Ai}M_{Ai}^{\mathrm{T}}+\delta_iM_{Bi}M_{Bi}^{\mathrm{T}}+\delta_i^{-1}(N_{Bi}Z_i)^{\mathrm{T}}(N_{Bi}Z_i)+$$
$$\varepsilon_i^{-1}(aN_{Ai}X+bN_{Ai}Y)^{\mathrm{T}}(aN_{Ai}X+bN_{Ai}Y). \quad (8)$$

由式(8)和(7)可得

$$\Psi\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[(aA_iX+bA_iY+B_iZ_i)+$$
$$(aA_iX+bA_iY+B_iZ_i)^{\mathrm{T}}+\varepsilon_iM_{Ai}M_{Ai}^{\mathrm{T}}+$$
$$\delta_iM_{Bi}M_{Bi}^{\mathrm{T}}+\delta_i^{-1}(N_{Bi}Z_i)^{\mathrm{T}}(N_{Bi}Z_i)+$$
$$\varepsilon_i^{-1}(aN_{Ai}X+bN_{Ai}Y)^{\mathrm{T}}(aN_{Ai}X+bN_{Ai}Y)]. \quad (9)$$

要使式(7)成立, 只需保证

$$(aA_iX+bA_iY+B_iZ_i)+(aA_iX+bA_iY+$$
$$B_iZ_i)^{\mathrm{T}}+\varepsilon_iM_{Ai}M_{Ai}^{\mathrm{T}}+\delta_iM_{Bi}M_{Bi}^{\mathrm{T}}+$$
$$\delta_i^{-1}(N_{Bi}Z_i)^{\mathrm{T}}(N_{Bi}Z_i)+\varepsilon_i^{-1}(aN_{Ai}X+$$
$$bN_{Ai}Y)^{\mathrm{T}}(aN_{Ai}X+bN_{Ai}Y)<0. \quad (10)$$

根据引理3可得式(10)等价于(6).

由于$0<h_i(z(t))\leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))=1$, 可知$\Psi<0$成立. 即由引理1可推得不确定分数阶T-S模糊系统(4)是渐近稳定的. □

3 仿真算例

例1 阶次为$\alpha=0.5$, $i=1,2$的不确定分数阶T-S模糊系统(4), 其参数如下:

$$A_1=\begin{bmatrix}1&-2&0\\3&4&0\\-2&0&-3\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}3&-4&0\\5&7&0\\-1&0&-3\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ C_1=[0\ \ 1\ \ 0],$$

$$B_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\ C_2=[0\ \ 1\ \ 0],$$

$$M_{A1}=M_{A2}=\begin{bmatrix}-0.1&0.05&0.1\\-0.1&-0.3&0.1\\-0.15&-0.08&-0.4\end{bmatrix},$$

$$M_{B1}=M_{B2}=\begin{bmatrix}-0.01&0.05&0.01\\-0.01&-0.03&0.01\\-0.15&-0.08&-0.04\end{bmatrix},$$

$$N_{A1}=N_{A2}=I_3,$$

$$N_{B1}=N_{B2}=\begin{bmatrix}0.1\\0.15\\0.15\end{bmatrix},$$

$$F_{A1}=F_{A2}=F_{B1}=F_{B2}=$$
$$\mathrm{diag}(\sin(0.1\pi)\quad\cos(0.2\pi)\quad\sin(0.1\pi)).$$

给出如下隶属度函数:

$$h_1(x_1(t))=\frac{1}{\exp(-2x_1(t))},$$
$$h_2(x_1(t))=1-h_1(x_1(t)).$$

当$u(t)=0$时, 系统(1)为自治系统(3), 本例中具体可写为

$$D^{0.5}x(t)=\sum_{i=1}^{2}h_i(\xi)A_ix(t).$$

在给定初始条件$x_0=[0.5\quad 0.3\quad -0.2]^{\mathrm{T}}$时的状态响应见图1, 显然开环系统是不稳定的.

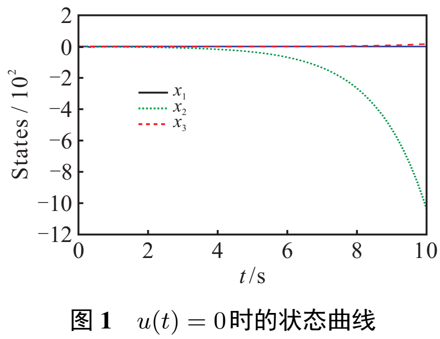

图1 $u(t)=0$**时的状态曲线**

为使该系统在有不确定扰动时能够渐近稳定, 可根据定理3为系统设计状态反馈控制器$u(t)$, 其设计形式如下:

Rule i: if $x_1(t)$ is $H_i(x_1(t))$

then $u(t)=K_ix(t)$, $i=1,2$.

阶数为$\alpha=0.5$, $i=1,2$的分数阶T-S模糊模型如下:

$$\begin{cases} D^{0.5}x(t) = \sum_{i=1}^{2} h_i(z(t))(\bar{A}_i + \bar{B}_i K_i)x(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{11}$$

根据定理1的LMI结果, 利用Matlab　Control Toolbox中的标准'feasp'命令求解式(5)和(6),可得如下可行解:

$$X = \begin{bmatrix} 15.5162 & 2.0855 & -0.8266 \\ 2.0855 & 11.1735 & -9.0440 \\ -0.8266 & -9.0440 & 31.2489 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -11.6303 & 11.8665 \\ 11.6303 & 0 & 0.2941 \\ -11.8665 & -0.2941 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = [-35.0206 \quad -50.9138 \quad 33.6542],$$

$$Z_2 = [-11.3415 \quad -38.8574 \quad -30.3049],$$

$$\varepsilon_1 = 67.4720,\ \varepsilon_2 = 60.9676,$$

$$\delta_1 = 64.6125,\ \delta_2 = 61.6357.$$

状态反馈增益矩阵K_1和K_2可由定理1中的公式$K_i = Z_i(aX + bY)^{-1}$求得,结果如下:

$$K_1 = [1.4009 \quad -5.7287 \quad -0.5759],$$

$$K_2 = [1.7144 \quad -6.6659 \quad -3.8437].$$

最终,设计初始条件$x_0 = [0.5 \quad 0.3 \quad -0.2]^{\mathrm{T}}$,则不确定分数阶T-S模糊系统在模糊控制器控制下的数值仿真图象如图2所示. 结果表明,尽管开环分数阶T-S模糊系统是不稳定的,但是该系统在定理1所设计控制器的作用下形成的闭环分数阶T-S模糊系统(1)是渐近稳定的.

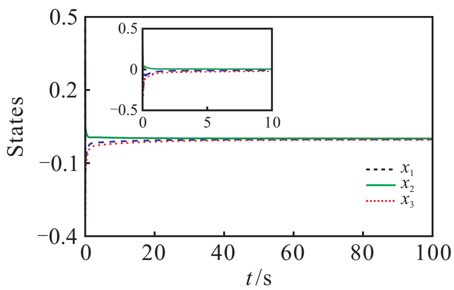

图2　$u(t) = K_i x(t)$时的状态曲线

然而,根据文献[17]中的状态反馈控制器设计方法求解LMI无法获得结果,运行的LMI显示结果如下:

Result: best value of t: 9.462495e-12

Marginal infeasibility

这表明文献[17]中的状态反馈控制器设计方法不能求得可行解,存在保守性.

注1　尽管引理4给出了不确定分数阶T-S模糊系统的控制器设计方法,但本文例1所给定参数的自治系统是不稳定的,当根据引理4利用Matlab求解时不能得到可行解,表明引理4具有局限性和保守性. 然而,根据定理1可以求得可行解,这说明定理1具有比引理4更小保守性. 这是因为文献[17]在作状态反馈控制时,令$Q_{11} = Q_{21} = P_0 > 0$, $Q_{12} = Q_{22} = 0$,这样的处理使得闭环系统的特征值必须具有负实部,忽略了具有正实部特征值的分数阶系统的特性,且进行了不等式的放缩,使得保守性又一次增大.

4　结　论

本文研究了阶数为$\alpha(0 < \alpha < 1)$的不确定分数阶T-S模糊系统镇定性问题,给出了镇定性LMI判据,该判据的优点是可以解决其他判据处理控制器设计问题时特征根具有负实部的不足. 仿真结果验证了本文稳定性定理的有效性,表明其克服了其他文献的保守性.

参考文献(References)

[1] 赵春娜, 李英顺, 陆涛. 分数阶系统分析与设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011: 1-3.
(Zhao C N, Li Y S, Lu T. Analysis and design of fractional order systems[M]. Beijing: National Defend Industry Press, 2011: 1-3.)

[2] 汪纪锋. 分数阶系统控制性能分析[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010: 1-8.
(Wang J F. Control performance analysis for fractional order systems[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010: 1-8.)

[3] 邱宁. 时间分数阶延迟微分方程在流体力学中的应用[J]. 沈阳大学学报: 自然科学版, 2016, 28(2): 170-172.
(Qiu N. Application of Time Fractional Delay Differential Equations in Fluid Dynamics[J]. J of Shenyang University: Natural Science, 2016, 28(2): 170-172.)

[4] 杨平, 董国威. 互联电网AGC的分数阶PID控制[J]. 电力系统及其自动化学报, 2013, 25(3): 124-129.
(Yang P, Dong G W. Fractional Order PID Control for AGC of Interconnected Power System[J]. Proc of the Chinese Society of Universities for Electric Power System and its Automation, 2013, 25(3): 124-129.)

[5] Li Y, Chen Y Q, Podlubny I. Technical communique: Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems[J]. Automatica, 2009, 45(8): 1965-1969.

[6] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 161-169.

(Zhu C X, Zou Y. Summary of research on fractional-order control[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 161-169.)

[7] Podlubny I. Fractional-order systems and $\mathrm{PI}^{\lambda}\mathrm{D}^{\mu}$ controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(1): 208-214.

[8] Oustaloup A, Mathieu B, Lanusse P. The CRONE control of resonant plants: Application to a flexible transmission[J]. European J of Control, 1995, 1(2): 113-121.

[9] Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing[J]. Computational Engineering in Systems Applications, 1996, 2: 963-968.

[10] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis ans design of fuzzy control systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135-156.

[11] Huang Xia, Wang Zhen, Lia Yuxia, et al. Design of fuzzy state feedback controller for robust stabilization of uncertain fractional order chaotic systems[J]. J of the Franklin Institute, 2014, 351(12): 5480-5493.

[12] Tian Engang, Yue Dong, Zhang Yijun. Delay-dependent robust H_∞ control for T-S fuzzy system with interval time-varying delay[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(12): 1708-1719.

[13] Zheng Yongai, Nian Yibei, Wang Dejin. Controlling fractional order chaotic systems based on Takagi-Sugeno fuzzy model and adaptive adjustment mechanism[J]. Physics Letters A, 2010, 375(2): 125-129.

[14] Lin Chong, Chen Bing, Wang Qingguo. Static output feedback stabilization for fractional order systems in T-S fuzzy models[J]. Neurocomputing, 2016, 218: 354-358.

[15] Wang Bin, Chen Diyi. Takagi-Sugeno fuzzy control for a wide class of fractional-order chaotic systems with uncertain parameters via linear matrix inequality[J]. J of Vibration and Control, 2016, 22(10): 2356-2369.

[16] 卫一恒, 朱敏, 彭程, 等. 不确定分数阶时滞系统的鲁棒稳定性判定准则[J]. 控制与决策, 2014, 29(3): 511-516.
(Wei Y H, Zhu M, Peng C, et al. Robust stability criteria for uncertain fractional order systems with time delay[J]. Control and Decision, 2014, 29(3): 511-516.)

[17] Ji Y, Su L, Qiu J. Design of fuzzy output feedback stabilization for uncertain fractional order systems[J]. Neurocomputing, 2016(173): 1683-1693.

[18] Li Yuting, Li Junmin. Stability analysis of fractional order systems based on T-S fuzzy model with the fractional order α: $0 < \alpha < 1$[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 78(4) : 2909-2919.

[19] Zhang X, Chen Y. D-stability based LMI criteria of stability and stabilization for fractional order systems[D]. Proc of the ASME 2015 Int Design Engineering Technical Conf & Computers and Information in Engineering Conf. Boston, 2015: 1-6.

[20] Podlubny I. Fractional differertial equations[M]. San Diego: Acdemic Press, 1999: 111-116.

[21] Xie L. Output feedback protect H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J of Control, 1996, 63(4): 741-750.

[22] Boyd S, Ghaoui L, Freon E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[23] Li Bingxin, Zhang Xuefeng. Observer-based robust control of $(0 < \alpha < 1)$ fractional-order linear uncertain control systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(14): 1724-1731.

作者简介

张雪峰 (1966−), 男, 副教授, 博士, 从事时变周期系统、分数阶系统、广义系统的研究, E-mail: zhangxuefeng@mail.neu.edu.cn;

刘洋洋 (1989−), 男, 硕士, 从事分数阶系统、T-S模糊系统的研究, E-mail: 944671170@qq.com.

(责任编辑: 齐 霁)