第 34 卷 第 7 期 控 制 与 决 策 Vol.34 No.7
2019 年 7 月 Control and Decision Jul. 2019

文章编号: 1001-0920(2019)07-1497-04 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1638

离散区间2-D系统的鲁棒稳定性

杨 阳, 潘 凯†

(长春理工大学 电子信息工程学院，长春 130022)

摘 要: 基于第2类Fornasini-Machesini模型,研究离散区间2-D系统鲁棒稳定的问题. 引入区间不确定性,建立离散区间2-D系统数学模型,根据2-D系统渐近稳定的一种Lyapunov不等式判据和一个对称区间矩阵正定性引理,给出离散区间2-D系统鲁棒稳定的一个充分条件,并通过数值算例表明所给出的离散区间2-D系统鲁棒稳定的充分条件是有效的.

关键词: 2-D系统；区间不确定性；鲁棒稳定性；Lyapunov不等式；区间矩阵正定性

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Robust stability of discrete interval 2-D systems

YANG Yang, PAN Kai†

(School of Electronic and Information Technology，Changchun University of Science and Technology，Changchun 130022，China)

Abstract: The problem of robust stability of discrete interval 2-D systems described by the second Fornaini-Machesini model is studied. By introducing interval uncertainty, a mathematical model of discrete interval 2-D systems is established. According to a kind of Lyapunov inequality criterion of 2-D systems and a positive definite lemma of a symmetric interval matrix, a sufficient condition for robust stability of the discrete interval 2-D systems is given. A numerical example shows the effectiveness of the sufficient condition for the robust stability of the 2-D systems.

Keywords: 2-D system；interval uncertainty；robust stability；Lyapunov inequality；interval matrix positive definiteness

0 引 言

在实际的生产生活中,对于多数实际运行的控制系统,由于测量设备的测量误差、元器件的老化、外部干扰等因素的影响,想要对控制系统建立精确的控制对象模型几乎是不可能的. 然而,为了提高系统的性能和稳定性,在设计系统控制器时,又必须考虑这些不确定因素的影响. 另外随着时代的进步和科技的发展,在诸多学科和工程技术领域,如自动控制、迭代学习控制、柔性机器人、多维数字滤波器、多维数字图像处理等[1-4],越来越多地涉及到二维(2-D)离散系统和二维离散信号问题. 因此,学者们对不确定离散2-D系统进行了大量的研究,并有了不少的研究成果.

文献[5]中定义了系统参数矩阵在给定实矩阵区间取值的2-D不确定系统的稳定界. 文献[6-7]研究了具有范数有界不确定性的2-D离散系统的鲁棒稳定性问题,并以LMI形式给出了该系统鲁棒稳定的充分条件,其中文献[7]的范数有界不确定性更为一般. 文献[8]研究了具有多面体型不确定性的鲁棒稳定性问题,并以LMI形式给出了充分条件.

本文研究一类具有区间不确定性的离散2-D系统的鲁棒稳定性,后文称该类系统为区间系统. 该类系统的不确定性不同于上述文献中的不确定性,它的特点在于它不需要求得已知系统各个不确定参数的变化规律,只需要估计其变化的上下界,便可描述系统的不确定性. 这点在实际的控制系统中很容易做到,因此,研究这类不确定性具有较高的实用价值. 相应地,本文给出了一种研究该类系统鲁棒稳定性的方法,即利用一类对称区间矩阵正定性引理来研究该类系统的鲁棒稳定性. 由于大多数参数确定的2-D系统渐近稳定的判据均以LMI形式给出,且是对称的,通过该方法,只需知道该类系统不确定参数的上下界,便能研究系统的鲁棒稳定性.

本文用上述方法研究了由第2类Fornasini-

收稿日期: 2017-12-03；**修回日期:** 2018-04-26.

基金项目: 吉林省教育厅“十三五”科学技术项目(JJKH20170618KJ)；吉林省科技发展计划项目(20180201090GX).

责任编委: 虞文武.

†通讯作者. E-mail: pc2579083@163.com.

Machesini模型描述的区间2-D系统的鲁棒稳定性,同时给出了相应判据,并用数值算例说明了该判据的有效性.

1 问题描述

首先对符号作如下说明: R^n 代表 n 维实向量空间, $R^{n\times m}$ 代表 $n\times m$ 维实矩阵空间, $\mathrm{IR}^{n\times m}$ 代表 $n\times m$ 维区间实矩阵空间, 0代表适合维度的空矩阵或空向量, $G>0(G<0)$ 代表矩阵 G 是正定(负定)矩阵, $N\succeq(\preceq,\succ,\prec)M$ 代表矩阵 N 中的元素大于等于(小于等于, 大于, 小于) M 矩阵的对应元素, $\mathrm{diag}(\cdots)$ 代表块对角矩阵, Z_+ 代表非负整数.

考虑离散2-D系统第2类Fornasini-Machesini模型的自治模型

$$x(i+1,j+1)=A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1).\tag{1}$$

其中: $A_1,A_2\in R^{n\times n}$ 为系统矩阵, $x(i,j)\in R^n$ 为系统状态变量. 其边界条件为

$$x(i,0)=x_0(i),\ x(0,j)=x_0(j),\ i,j\in Z_+.$$

为了便于分析,引入下列引理,关于本节的引理,其证明参见文献[9-11].

引理1 若存在正定对称矩阵 $P_1,P_2\in R^{n\times n}$ 使得块对角矩阵 $P=\mathrm{diag}(P_1,P_2)$ 满足下面的矩阵不等式:

$$P-\tilde{A}^{\mathrm{T}}P\tilde{A}>0,\tag{2}$$

则2-D系统(1)是渐近稳定的. 其中

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_1 & A_2\end{bmatrix}.$$

若定义 $A_s^m=[a_{ij,s}^m]_{n\times n}$ 为区间系统矩阵的下界, $A_s^M=[a_{ij,s}^M]_{n\times n}$ 为区间系统矩阵的上界,且满足 $a_{ij,s}^m\leqslant a_{ij,s}^M$,则区间系统矩阵可表示如下:

$$[A_s^m\ \ A_s^M]=\{[a_{ij,s}]_{n\times n}:a_{ij,s}^m\leqslant a_{ij,s}\leqslant a_{ij,s}^M,\\ 1\leqslant i,j\leqslant n,s=1,2\}.$$

又令 $A_{0,s}=(A_s^m+A_s^M)/2$ 为区间系统矩阵的中心矩阵, $\Delta A_s=(A_s^M-A_s^m)/2$ 为相对于中心矩阵的摄动界,则区间系统矩阵又可表示如下:

$$A_s=A_{0,s}+\sum e_if_{ij,s}e_{ij}^{\mathrm{T}},\ |f_{ij,s}|\leqslant\Delta a_{ij,s},\ s=1,2;$$

$$A_0=\begin{bmatrix}A_{0,1} & A_{0,2}\\ A_{0,1} & A_{0,2}\end{bmatrix}.$$

其中: $e_i\in R^n$ 代表第 i 个元素为1、其余元素为0的列向量, $\Delta a_{ij,s}$ 代表摄动界 ΔA_s 第 i 行第 j 列的元素.

考虑如下离散区间2-D系统:

$$x(i+1,j+1)=\tilde{A}_1x(i+1,j)+\tilde{A}_2x(i,j+1).\tag{3}$$

其中: $\tilde{A}_s\in[A_s^m\ \ A_s^M](s=1,2)$ 为区间系统矩阵, $x(i,j)\in R^n$, A_s^m 与 A_s^M 为已知的常数矩阵. 其边界条件如系统(1)的边界条件.

定义1 离散2-D系统(3)是鲁棒渐近稳定的,如果对所有的 $\tilde{A}_s\in[A_s^m\ \ A_s^M]$, $s=1,2$,系统都是渐近稳定的.

引理2 给定矩阵 $S=[M-N\ \ M+N]\in\mathrm{IR}^{n\times n}$,其中 $M,N\in R^{n\times n}$ 是给定的对称矩阵,若 $\exists c\in R$,满足 $\|N\|_2\leqslant c$,有 $M-cI$ 是正定矩阵,则每一个对称矩阵 $A\in S$ 是正定的.

引理3 (Schur补公式) 设 $Q_1(x)=Q_1^{\mathrm{T}}(x)$, $Q_2(x)=Q_2^{\mathrm{T}}(x)$ 和 $S(x)$ 都仿射地依赖于变量 x,则线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}Q_1(x) & S(x)\\ S(x) & Q_2(x)\end{bmatrix}>0\tag{4}$$

等价于

$$Q_2(x)>0,\ Q_1(x)-S(x)Q_2^{-1}(x)S(x)^{\mathrm{T}}>0.$$

2 鲁棒稳定性分析

定理1 若存在对称正定矩阵 $P_1,P_2\in R^{n\times n}$,使得块对角矩阵 $P=\mathrm{diag}(P_1,P_2)$ 满足下面的矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix}P-\gamma I & A_0^{\mathrm{T}}P\\ PA_0 & P\end{bmatrix}>0,\tag{5}$$

则称系统(3)是鲁棒渐近稳定的. 其中

$$\gamma=\|\Delta A\|_2\|P\|_2(2\|A_0\|_2+\|\Delta A\|_2),$$

$$A_0=\begin{bmatrix}A_{0,1} & A_{0,2}\\ A_{0,1} & A_{0,2}\end{bmatrix},\ \Delta A=\begin{bmatrix}\Delta A_1 & \Delta A_2\\ \Delta A_1 & \Delta A_2\end{bmatrix}.$$

证明 令 $M=P-A_0^{\mathrm{T}}PA_0$,作为引理2中的 M 矩阵. 令 $A=A_0+\Delta A$,代入式(2),化简得

$$\begin{aligned}&P-(A_0+\Delta A)^{\mathrm{T}}P(A_0+\Delta A)=\\&P-(A_0^{\mathrm{T}}+\Delta A^{\mathrm{T}})P(A_0+\Delta A)=\\&P-A_0^{\mathrm{T}}PA_0-[(A_0^{\mathrm{T}}P\Delta A)^{\mathrm{T}}+\\&A_0^{\mathrm{T}}P\Delta A+\Delta A^{\mathrm{T}}P\Delta A]=\\&M-N_1.\end{aligned}$$

又令 $\tilde{A}=A_0-\Delta A$,代入式(2),化简得

$$\begin{aligned}&P-(A_0-\Delta A)^{\mathrm{T}}P(A_0-\Delta A)=\\&P-(A_0^{\mathrm{T}}-\Delta A^{\mathrm{T}})P(A_0-\Delta A)=\\&P-A_0^{\mathrm{T}}PA_0+[(A_0^{\mathrm{T}}P\Delta A)^{\mathrm{T}}+\\&A_0^{\mathrm{T}}P\Delta A-\Delta A^{\mathrm{T}}P\Delta A]=\\&M+N_2.\end{aligned}$$

根据引理2中关于 N 的定义,求出了两个 N 矩阵,由于 $N_1\succcurlyeq N_2$,且均为对称矩阵,设

$$S_1 = [M - N_1 \ \ M + N_1],$$
$$S_2 = [M - N_2 \ \ M + N_2],$$

则$S_2 \subseteq S_1$. 因此,若S_1满足引理2的条件,则S_2必满足引理2的条件,故选$N = N_1$.

根据引理2求c,即

$$\begin{aligned}&\|N\|_2 = \\ &\|\Delta A^{\mathrm{T}} P A_0 + A_0^{\mathrm{T}} P \Delta A + \Delta A^{\mathrm{T}} P \Delta A\|_2 \leqslant \\ &\|\Delta A\|_2 \|P\|_2 (2\|A_0\|_2 + \|\Delta A\|_2) = c.\end{aligned}$$

由引理2可知,若求得的$M - cI$矩阵为正定矩阵,则每一个S_1里的对称矩阵均是正定矩阵. 又由引理1和定义1可得,2-D系统(3)是鲁棒渐近稳定的,即若满足下式:

$$P - A_0^{\mathrm{T}} P A_0 - \|\Delta A\|_2 \|P\|_2 (2\|A_0\|_2 + \|\Delta A\|_2) I > 0, \tag{6}$$

则2-D系统(3)是鲁棒渐近稳定的.

令

$$\gamma = \|\Delta A\|_2 \|P\|_2 (2\|A_0\|_2 + \|\Delta A\|_2),$$

由Schur补公式(引理3)可得式(6)等价于

$$\begin{bmatrix} P - \gamma I & A_0^{\mathrm{T}} \\ A_0 & P^{-1} \end{bmatrix} > 0. \tag{7}$$

对式(7)左端分别左乘、右乘$\mathrm{diag}(I, P)$不影响其正定性,因此式(7)可以等价为式(5),从而定理1得证. □

注: 由引理1可知P是对称矩阵,且$\forall \tilde{A} \in R^{2n\times 2n}$,式(2)均为对称矩阵. 又由引理2和定义1可知,可以利用系统(3)的区间系统矩阵的中心矩阵和摄动界矩阵判定系统(3)的鲁棒渐近稳定性.

3 稳定性裕度

定义2 若对于$\|\Delta A\|_2 \leqslant \lambda$,系统(3)都是鲁棒稳定的,则称$\lambda$为系统(3)的稳定裕度.

由第2节的定理1可得系统(3)的稳定裕度求解如下:

$$\begin{cases} \max\ \lambda; \\ \text{s.t. } P_1 = P_1^{\mathrm{T}} > 0,\ P_2 = P_2^{\mathrm{T}} > 0, \\ \quad P = \mathrm{diag}(P_1, P_2), \\ \quad \gamma = \lambda \|P\|_2 (2\|A_0\|_2 + \lambda), \\ \quad \begin{bmatrix} P - \gamma I & A_0^{\mathrm{T}} P \\ P A_0 & P \end{bmatrix} > 0. \end{cases} \tag{8}$$

4 数值算例

例1 对于系统(3),假设区间系统矩阵的中心矩阵和摄动界矩阵如下:

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} 0.471\,875 & 0.125\,024 \\ -0.210\,642 & 0.451\,176 \end{bmatrix},$$
$$A_{0,2} = \begin{bmatrix} 0.474\,253 & -0.007\,580 \\ 0.034\,811 & 0.475\,623 \end{bmatrix},$$
$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0.007 & 0.008 \\ 0.004 & 0.005 \end{bmatrix},$$
$$\Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0.003 & 0.006 \\ 0.002 & 0.003 \end{bmatrix}.$$

利用Matlab软件,求解定理1的式(5),可求得满足条件的正定对称矩阵P_1和P_2如下:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 785.088\,4 & 5.177\,8 \\ 5.177\,8 & 529.637\,5 \end{bmatrix},$$
$$P_2 = \begin{bmatrix} 727.016\,3 & 19.972\,7 \\ 19.972\,7 & 556.064\,8 \end{bmatrix}.$$

因此,该系统是鲁棒渐近稳定的.

另外,利用Matlab求得,该系统的稳定裕度为0.027,若按文献[9]中的稳定裕度定义,则该系统的稳定裕度为0.019 3,与文献[7]和[9]中的结果相比,本文结果较为严格.

系统(3)在系统矩阵取上界和下界时的状态轨迹如图1～图4所示. 设定系统初始状态$x(i,0) = [1\ \ 1]^{\mathrm{T}} 0.5^i$, $x(0,j) = [1\ \ 1]^{\mathrm{T}} 0.5^j$, $i, j \in Z_+$.

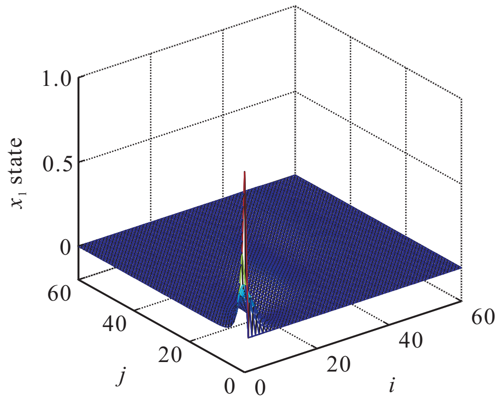

图1 系统矩阵为上界时,状态x_1的轨迹

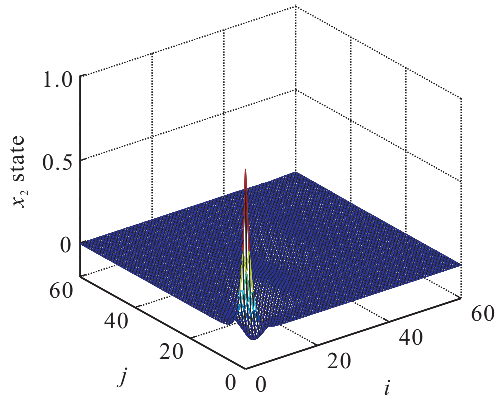

图2 系统矩阵为上界时,状态x_2的轨迹

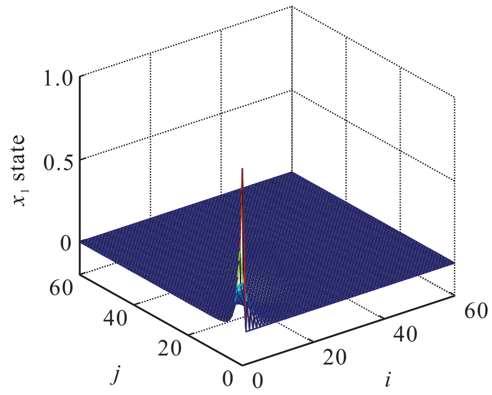

图 3 系统矩阵为下界时,状态 x_1 的轨迹

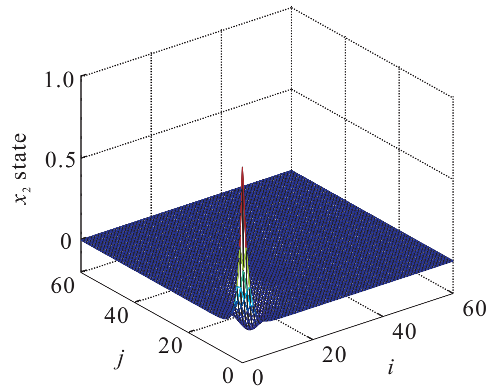

图 4 系统矩阵为下界时,状态 x_2 的轨迹

由图1～图4可以看出,该系统在两个端点处是渐近稳定的.

5 结 论

本文以离散2-D系统中的第2类Fornasini-Machesini模型为基础,建立了不确定离散2-D系统的数学模型,并以LMI形式给出了判别该系统鲁棒稳定的一个充分条件.本文介绍了一种利用对称区间矩阵正定性引理来研究离散区间2-D系统的鲁棒稳定性问题的方法.该方法的优点在于只需知道系统的扰动上下界,即可研究系统的鲁棒性,比较方便;而缺点在于,该方法使用的对称区间矩阵正定性引理是充分条件,有一定的局限性,得出的结论保守性较大.

参考文献(References)

[1] Shanks J, Treitel S, Justice J. Stability and synthesis of two-dimensional recursive filters[J]. IEEE Trans on Audio & Electroacoustics, 1972, 20(2): 115-128.

[2] Bose N K. Applied multidimensional systems theory[M]. Applied Multidimensional Systems Theory. Van Nostrand Reinhold, 1982: 1-189.

[3] 吴敏, 兰永红, 佘锦华. 基于二维混合模型的重复控制系统设计新方法[J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1208-1214.
(Wu M, Lan Y H, She J H. A new design method of repetitive control system based on two-dimensional mixed model[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(9): 1208-1214.)

[4] 李目, 何怡刚, 刘祖润, 等. 基于自适应神经网络的二维线性相位FIR滤波器优化设计[J]. 电路与系统学报, 2011, 16(2): 94-98.
(Li M, He Y G, Liu Z R, et al. Optimization design of two-dimensional linear phase FIR filter based on adaptive neural network[J]. J of Circuits and Systems, 2011, 16(2): 94-98.)

[5] Lu W S. On robust stability of 2-D discrete systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(3): 502-506.

[6] Wang Z, Liu X. Robust stability of two-dimensional uncertain discrete systems[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2003, 10(5): 133-136.

[7] 申涛, 诸静. 一类2-D系统的鲁棒稳定性分析[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2004, 38(6): 717-720.
(Shen T, Zhu J. Robust stability analysis of a class of 2-D systems[J]. J of Zhejiang University: Engineering Science, 2004, 38(6): 717-720.)

[8] Hmamed A, Alfidi M, Benzaouia A, et al. LMI conditions for robust stability of 2D linear discrete-time systems[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2008(5): 267-290.

[9] 赵胜民, 唐万生, 李光泉. 2-D系统的稳定性问题[J]. 自动化学报, 2002, 28(4): 620-624.
(Zhao S M, Tang W S, Li G Q. The issues about stability of 2-D system[J]. Acta Automatica Sinica, 2002, 28(4): 620-624.)

[10] Siegfried M. Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic[J]. Acta Numerica, 2010, 19(19): 287-449.

[11] 刘兴文. 正系统动力学性质研究[D]. 电子科技大学自动化工程学院, 2009.
(Liu X W. Dynamics study of positive system[D]. School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, 2009.)

作者简介

杨阳(1979−), 男, 副教授, 博士, 从事多维正系统理论等研究, E-mail: cloneyang@126.com.

潘凯(1991−), 男, 硕士生, 从事检测技术与过程控制的研究, E-mail: pc2579083@163.com.

(责任编辑: 孙艺红)