第 34 卷 第 8 期
2019 年 8 月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.34 No.8
Aug. 2019

文章编号: 1001-0920(2019)08-1702-07 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.0019

广义逆张量Padé逼近的连分式递推算法

顾传青[1†], 黄逸铮[1], 陈之兵[2]

(1. 上海大学 理学院，上海 200444；2. 深圳大学 数学与统计学院，广东 深圳 518052)

摘 要: 张量指数函数已经广泛应用于控制论、图像处理和各个工程领域. 鉴于此, 在矩阵广义逆的基础上, 首次在张量内积空间上定义一种有效的张量广义逆, 从而构造张量Padé逼近的一种连分式算法. 利用张量t-积成功计算张量的幂, 由此递推地给出张量指数函数的幂级数展开式. 在前面两个工作的基础上, 利用设计的连分式算法逼近张量指数函数, 其特点在于, 该算法可以编程实现递推计算, 而且在计算过程中不必计算张量的乘积, 也不必计算张量的逆. 给出的两个张量指数函数的数值实验表明, 将连分式算法与目前通常使用的截断法进行比较, 在不降低逼近阶的条件下, 所提出算法是有效的. 如果张量的维数较大, 基于张量广义逆的连分式算法仍然具有一定优势.

关键词: 张量；张量t-积；张量广义逆；张量Padé逼近；张量指数函数；张量连分式算法

中图分类号: O231.1 **文献标志码:** A

A continued fractional recurrence algorithm for generalized inverse tensor Padé approximation

GU Chuan-qing[1†], *HUANG Yi-zheng*[1], *CHEN Zhi-bing*[2]

(1. College of Sciences，Shanghai University，Shanghai 200444，China；2. School of Mathematics and Statistics，Shenzhen University，Shenzhen 518052，China)

Abstract: The tensor exponential function has been widely used in cybernetics, image processing and various engineering fields. Based on the generalized matrix inverse, an effective tensor generalized inverse is defined for the first time on the scalar inner product space, thus constructing a continued fractional algorithm for the tensor Padé approximation. On the other hand, we successfully use the tensor t- product to calculate the power of the tensor, and recursively giving the power series expansion of the tensor exponential function. Based on the previous two work, the continuous fractional algorithm designed in this paper is used to approximate the tensor exponential function. Its characteristic is that the algorithm can be programmed to implement recursive calculations, and in the calculation process, it is not necessary to calculate the product of the tensor and to calculate the inverse of the tensor. The numerical experiments of the two tensor exponential functions given in this paper show that comparing the continuous fractional algorithm with the commonly used truncation method, the proposed algorithm is effective without reducing the approximation order. If the dimension of the tensor is relatively large, a continuous fractional algorithm based on the generalized inverse of tensors will also have certain advantages.

Keywords: tensor；tensor t-product；tensor generalized inverse；tensor Padé approximation；tensor exponential functions；continued fraction expression algorithm

0 引 言

张量动力系统已广泛应用于Volterra系统识别[1]、张量乘积(TP)模型变换[2]、人体动作识别[3]和塑性模型[4]等各个领域. 由于在张量常微分方程的求解过程中,必须用到张量指数函数,其计算问题已经成为一个重要的研究领域.

考虑如下常微分方程[4]:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{Y}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t),\\ \boldsymbol{Y}(t_0)=\boldsymbol{Y}_0,\end{cases} \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{Y}_0$是给定的张量,一般是非对称的,则关于系统(1)的张量指数函数$\exp(\cdot)$有如下唯一解:

$$\boldsymbol{Y}(t)=\exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{Y}_0. \tag{2}$$

对于一般的张量$\boldsymbol{A}$,其指数函数通常表示为幂级

收稿日期: 2018-01-03；**修回日期:** 2018-03-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11371243)；上海市重点学科建设项目(S30104).

†通讯作者. E-mail: cqgu@shu.edu.cn.

数展开形式,有

$$\exp(\boldsymbol{A})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n. \tag{3}$$

目前计算式(2)中张量指数函数的方法通常是将无穷级数(3)前若干项截断求和[5],但是该方法的计算精度和效率受限于其舍入方式和终止准则. 截断法取前$n_{\max}$项,得到近似解,即

$$\exp(\boldsymbol{A})\approx\sum_{n=0}^{n_{\max}}\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n. \tag{4}$$

选取的项数$n_{\max}$受限于所需精度

$$\frac{1}{n_{\max}}\|\boldsymbol{A}^{n_{\max}}\|\leqslant\epsilon_{\mathrm{tol}}. \tag{5}$$

显然,截断法的精度与张量指数函数选取的项数$n_{\max}$有关,保留的项数越多,精度越高,但是需要进行的张量乘积次数也越多;保留的项数越少,计算量越少,但是精度也越低. 因此,在一定程度上,这将限制该算法的实用性.

为研究张量指数函数的计算问题,本文定义了张量的一种广义逆,并以此为基础构造了张量广义逆Padé逼近(GITPA)的一种可以递推计算的连分式算法,其特点在于:在计算过程中,不必用到张量的乘积,也不需要计算张量的逆,另外,该方法对奇异张量也是适用的. 目前,关于张量的逆和广义逆的计算问题,还没有找到一种比较可行的计算方法. 作为GITPA方法的一个重要应用,后文将给出计算张量指数函数的数值实验,以说明该连分式算法的有效性.

1 张量的一种广义逆

1.1 张量简介

张量是一种多维数组,其中向量是一阶张量,矩阵是二阶张量,特别地,一个N阶张量拥有N个下标,是N个拥有独立坐标系的向量空间的外积(张量积). 一个N阶$n_1\times n_2\times\cdots\times n_N$维张量可以表示为

$$\boldsymbol{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_N})\in\boldsymbol{R}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_N}.$$

文献[6]提出了张量的切片方法. 如对一个三阶张量,可以固定其中任意一个下标,从而得到该张量的一种表示形式. 设$\boldsymbol{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in\boldsymbol{R}^{2\times2\times3}$,固定其第3个下标,则张量可以表示为

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_3]=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}a_{111}&a_{121}&a_{112}&a_{122}&a_{113}&a_{123}\\a_{211}&a_{221}&a_{212}&a_{222}&a_{213}&a_{223}\end{array}\right].$$

下面定义两个三阶张量的t-积,可以通过递归自然地推广到高阶张量的t-积.

定义1 (块循环矩阵)[7] 设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{l\times p\times n}$,那么$\boldsymbol{A}$的块循环矩阵定义为

$$\mathrm{bcirc}(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_n&\boldsymbol{A}_{n-1}&\cdots&\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_n&\cdots&\boldsymbol{A}_3\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_n&\boldsymbol{A}_{n-1}&\cdots&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}_{ln\times pn}.$$

定义一个展开算子unfold$(\cdot)$[7],用以下方式将一个$p\times m\times n$的张量展开成一个$pn\times m$的矩阵:

$$\mathrm{unfold}(\boldsymbol{B})=[\boldsymbol{B}_1^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{B}_2^{\mathrm T}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{B}_n^{\mathrm T}]^{\mathrm T}.$$

fold$(\cdot)$[7]是其逆算子,它会将一个$pn\times m$的矩阵转化成$p\times m\times n$的张量. 因此有

$$\mathrm{fold}(\mathrm{unfold}(\boldsymbol{B}))=\boldsymbol{B}.$$

定义2 (张量t-积)[7-8] 设$\boldsymbol{A}$是一个$l\times p\times n$的张量,$\boldsymbol{B}$是一个$p\times m\times n$的张量,则t-积$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$是一个$l\times m\times n$的张量,定义如下:

$$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=\mathrm{fold}(\mathrm{bcirc}(\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{unfold}(\boldsymbol{B})).$$

例1 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{2\times2\times3}$,现固定其第3个下标,分别产生

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&3&0&5&7\\0&2&0&4&6&8\end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&3&5&7&9&11\\2&4&6&8&10&12\end{array}\right].$$

由定义2得到

$$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=\mathrm{fold}\left[\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_3&\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_3\\\boldsymbol{A}_3&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{B}_3\end{bmatrix}\right]=$$

$$\mathrm{fold}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3\\\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3\\\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3\end{bmatrix}=$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc}95&127&123&155&43&75\\122&162&154&194&66&106\end{array}\right].$$

类似地，可以定义更高阶张量t-积.

定义3 (高阶张量t-积)[9] 设张量$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}$,$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{n_2\times l\times\cdots\times n_p}$,则高阶张量$t$-积$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$是一个$n_1\times l\times\cdots\times n_p$的$p$阶张量,定义为

$$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=\mathrm{fold}(\mathrm{bcirc}(\mathrm{unfold}(\boldsymbol{A}))*\mathrm{unfold}(\boldsymbol{B})).$$

设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}$,张量的范数等于它所有元素平方和的平方根[6],即

$$\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_p}a_{i_1i_2\cdots i_p}^2}. \tag{6}$$

这与矩阵的Frobenius-模是类似的. 两个大小相同的张量$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}$的内积等于它们对

应元素的乘积的和[6],即

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_p}a_{i_1i_2\cdots i_p}b_{i_1i_2\cdots i_p}.\tag{7}$$

于是有$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|^2$.

1.2 一种张量广义逆

参考复数、向量和矩阵的倒数,容易得到以下结论:若复数$c\in\boldsymbol{C}$,则$cc^*=|c|^2,1/c=c^{-1}=c^*/|c|^2$;若向量$v\in\boldsymbol{C}^n$,则$vv^*=|v|^2,1/v=v^{-1}=v^*/|v|^2$[10];若矩阵$A=a_{ij},B=b_{ij}\in\boldsymbol{C}^{s\times t}$,则$A\cdot B=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(a_{ij}b_{ij})\in\boldsymbol{C},1/A=A^{-1}=A^*/\|A\|^2$[11-12].因此,下面张量的广义逆可以看作是上述向量的倒数和矩阵的倒数在张量上的推广.

定义4 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in C^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}$,内积为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_p}a_{i_1i_2\cdots i_p}b_{i_1i_2\cdots i_p};$$

若$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*=\|\boldsymbol{A}\|^2$,则张量$\boldsymbol{A}$的广义逆定义为

$$\boldsymbol{A}_r^{-1}=\frac{1}{\boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{\|\boldsymbol{A}\|^2},\boldsymbol{A}\neq 0,\boldsymbol{A}\in C^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}.\tag{8}$$

由定义3,这里张量$\boldsymbol{A}$的广义逆$\boldsymbol{A}_r^{-1}$实质上是指张量$\boldsymbol{A}$的倒数. 由上面定义易证以下引理.

引理1 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in C^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}$,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\neq 0$且$c\in\boldsymbol{R},c\neq 0$,则下列关系成立:

1) $\dfrac{c}{\boldsymbol{A}}=\dfrac{1}{\boldsymbol{B}}\Longleftrightarrow\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{B}$;

2) $(\boldsymbol{A}_r^{-1})_r^{-1}=\boldsymbol{A},\ (c\boldsymbol{A})_r^{-1}=\dfrac{1}{c}\boldsymbol{A}_r^{-1}$.

2 广义逆张量Padé逼近的连分式递推算法

2.1 广义逆张量Padé逼近的定义

设$f(z)$是给定的张量幂级数,系数为张量,即

$$f(z)=\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{C}_1z+\boldsymbol{C}_2z^2+\cdots+\boldsymbol{C}_nz^n+\cdots,\tag{9}$$

$$\boldsymbol{C}_i=(c_i^{(i_1i_2\cdots i_p)})\in\boldsymbol{R}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p},\ z\in\boldsymbol{R},$$

其中$(c_i^{(i_1i_2\cdots i_p)})\in\boldsymbol{R}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}$包含了所有$p$阶$n_1\times n_2\times\cdots\times n_p$维的张量.

定义5 设$\boldsymbol{C}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}[z]$是一个$p$阶张量多项式的集合,维数分别为$n_1\times n_2\times\cdots\times n_p$. 一个张量多项式

$$\boldsymbol{A}(z)=(a_{i_1i_2\cdots i_p}(z))\in\boldsymbol{C}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}[z]$$

是m阶的,表示为$\partial\boldsymbol{A}(z)=m$,若满足

$$\partial(a_{i_1i_2\cdots i_p}(z))\leqslant m,\forall i_i=1,2,\cdots,n_i,\ 1\leqslant i\leqslant p,$$

且

$$\partial(a_{(i_1i_2\cdots i_p)}(z))=m,\exists i_i=1,2,\cdots,n_i,\ 1\leqslant i\leqslant p.$$

定义6 阶数为$[n/2k]$型广义逆张量Padé逼近(GITPA)是张量的一个有理函数,有

$$\boldsymbol{R}(z)=\boldsymbol{P}(z)/\boldsymbol{Q}(z).\tag{10}$$

其中:$\boldsymbol{P}(z)$为一个张量多项式,$\boldsymbol{Q}(z)$为一个数量多项式,满足以下条件:

1) $\partial\boldsymbol{P}(z)\leqslant n,\partial\boldsymbol{Q}(z)=2k$;

2) $\boldsymbol{Q}(z)\ |\|\ \boldsymbol{P}(z)\ \|^2$;

3) $\boldsymbol{Q}(z)f(z)-\boldsymbol{P}(z)=O(z^{n+1})$.

$\boldsymbol{P}(z)=(p_{(i_1i_2\cdots i_p)}(z))\in\boldsymbol{C}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}$,整除条件2)表明分母数量多项式$\boldsymbol{Q}(z)$能够整除张量分子多项式$\boldsymbol{P}(z)$的范数的平方,而$\boldsymbol{P}(z)$的范数$\|\boldsymbol{P}(z)\|^2$由定义(6)给出,$*$表示取复共轭.

2.2 连分式算法格式

设张量幂级数为式(9),利用张量广义逆(8),递推地定义Thiele型张量连分式如下:

$$\boldsymbol{H}(z)=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{B}_1}+\frac{z}{\boldsymbol{B}_2}+\cdots+\frac{z}{\boldsymbol{B}_n}+\cdots.$$

其中:张量$\boldsymbol{B}_i\in\boldsymbol{C}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p},z\in\boldsymbol{R},\boldsymbol{H}(z)$的$n$项截断分式定义为

$$\boldsymbol{R}_n(z)=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{B}_1}+\frac{z}{\boldsymbol{B}_2}+\cdots+\frac{z}{\boldsymbol{B}_n}.\tag{11}$$

利用张量广义逆的定义,下面给出一个用于计算机编程的计算截断连分式(9)的递推算法.

算法1 张量Thiele型连分式算法.

输入:给定张量幂级数系数$\boldsymbol{C}_i$,逼近阶n.

Step 1: 计算

$$\boldsymbol{A}_0(z)=f(z),\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{B}_0(0)=\boldsymbol{A}_0(0).$$

Step 2: 计算

$$\boldsymbol{A}_1(z)=(Df(z))_r^{-1}=\frac{[Df(z)]^*}{\|Df(z)\|^2},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1(0)=\boldsymbol{A}_1(0).$$

令$i=2$.

Step 3: 计算

$$\boldsymbol{B}_i=i(DA_{i-1}(z))_r^{-1}|_{z=0}=i\frac{[D\boldsymbol{A}_{i-1}(z)]^*}{\|D\boldsymbol{A}_{i-1}(z)\|^2}\Big|_{z=0},$$

$$\boldsymbol{A}_i(z)=\boldsymbol{B}_i(z)+\boldsymbol{A}_{i-2}(z),i=i+1.$$

Step 4: 若$i<n$,执行Step 3. 若$i=n$,计算

$$\boldsymbol{B}_n=n(D\boldsymbol{A}_{n-1}(z))_r^{-1}|_{z=0}=n\frac{[D\boldsymbol{A}_{n-1}(z)]^*}{\|D\boldsymbol{A}_{n-1}(z)\|^2}\Big|_{z=0}.$$

Step 5: 将计算得到的$\boldsymbol{B}_i(i=0,\cdots,n)$代入逼近公式(11),并输出$\boldsymbol{R}_n(z)$.

在算法1中,D表示张量函数对于z的导数.

下面证明恒等定理. 该定理表明,根据GITPA的定义5,由算法1得到的连分式截断分式$\boldsymbol{R}_n(z)$是一个阶数为$[n/2k]$型的GITPA,其分母多项式的阶数分为两种情况,$n=2k$或$n=2k+1$.

定理1 (恒等定理) 设利用算法1计算截断连分式$\boldsymbol{R}_n(z)$的过程中没有出现分母为0的情况,则满足

$$\boldsymbol{R}_n(z)=[n/2k]_f=\begin{cases}[2k/2k]_f,\ n=2k,\ k=0,1,\cdots;\\ [2k+1/2k]_f,\ n=2k+1,\ k=0,1,\cdots.\end{cases} \tag{12}$$

证明 通过归纳法证明. 当$n=0,k=0$时,有

$$\boldsymbol{R}_0(z)=\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{B}_0/1=\boldsymbol{P}_0(z)/\boldsymbol{Q}_0(z)=[0/0]_f.$$

当$n=1,k=0$时,有

$$\boldsymbol{R}_1(z)=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{B}_1}=\boldsymbol{B}_0+\frac{z\boldsymbol{B}_1^*}{\|\boldsymbol{B}_1\|^2}=\frac{\boldsymbol{B}_0\|\boldsymbol{B}_1\|^2+z\boldsymbol{B}_1^*}{\|\boldsymbol{B}_1\|^2}=\frac{\boldsymbol{P}_1(z)}{\boldsymbol{Q}_1(z)}.$$

其中: $\partial\boldsymbol{P}_1=1,\partial\boldsymbol{Q}_1=0,\boldsymbol{Q}_1|\|\boldsymbol{P}_1\|^2$. 可得

$$\boldsymbol{R}_1(z)=[1/0]_f. \tag{13}$$

当$n=2,k=1$时,有

$$\boldsymbol{R}_2(z)=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{B}_1}+\frac{z}{\boldsymbol{B}_2}=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{S}_1(z)},$$

其中$\boldsymbol{S}_1(z)=\boldsymbol{B}_1+\dfrac{z}{\boldsymbol{B}_2}=\dfrac{\widetilde{\boldsymbol{P}}_1(z)}{\widetilde{\boldsymbol{Q}}_1(z)}$. 由式(13)得到$\partial\widetilde{\boldsymbol{P}}_1=1,\partial\widetilde{\boldsymbol{Q}}_1=0,\widetilde{\boldsymbol{Q}}_1|\|\widetilde{\boldsymbol{P}}_1\|^2$.

令$\|\widetilde{\boldsymbol{P}}_1\|^2=\widetilde{\boldsymbol{Q}}_1g_1$,则有$\partial g_1=2$. 由此可知

$$\boldsymbol{R}_2(z)=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{S}_1(z)}=\boldsymbol{B}_0+\frac{z\widetilde{\boldsymbol{Q}}_1\widetilde{\boldsymbol{P}}_1^*}{\|\widetilde{\boldsymbol{P}}_1\|^2}=\frac{\boldsymbol{B}_0g_1+z\widetilde{\boldsymbol{P}}_1^*}{g_1}=\frac{\boldsymbol{P}_2(z)}{\boldsymbol{Q}_2(z)},$$

其中$\boldsymbol{Q}_2(z)=g_1$. 可知$\partial\boldsymbol{P}_2(z)=2,\partial\boldsymbol{Q}_2(z)=2$. 又由

$$\|\boldsymbol{P}_2\|^2=\|\boldsymbol{B}_0\|^2g_1^2+z^2\|\widetilde{\boldsymbol{P}}_1^*\|^2+zg_1(\boldsymbol{B}_0^*\widetilde{\boldsymbol{P}}_1^*+\boldsymbol{B}_0\widetilde{\boldsymbol{P}}_1),$$

可知$\boldsymbol{Q}_2|\|\boldsymbol{P}_2\|^2$成立. 由此可得

$$\boldsymbol{R}_2(z)=[2/2]_f. \tag{14}$$

设当$n-1=2k$或$n-1=2k+1(k=0,1,\cdots)$时,下式成立:

$$\boldsymbol{R}_n(z)=\boldsymbol{P}_{n-1}(z)/\boldsymbol{Q}_{n-1}(z)=[n-1/2k]_f=\begin{cases}[2k/2k]_f,\ n=2k,k=0,1,\cdots;\\ [2k+1/2k]_f,\ n=2k+1,k=0,1,\cdots.\end{cases} \tag{15}$$

当$n=2k(k=0,1,\cdots)$时,可以写作

$$\boldsymbol{R}_n(z)=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{B}_1}+\frac{z}{\boldsymbol{B}_2}+\cdots+\frac{z}{\boldsymbol{B}_n}=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{S}_n(z)}. \tag{16}$$

$$\boldsymbol{S}_n(z)=\boldsymbol{B}_1+\frac{z}{\boldsymbol{B}_2}+\frac{z}{\boldsymbol{B}_3}+\cdots+\frac{z}{\boldsymbol{B}_n}=\frac{\widetilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}(z)}{\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n-1}(z)}. \tag{17}$$

由式(15)可知

$$\partial\widetilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}=2k,\ \partial\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n-1}=2k,\ \widetilde{\mathcal{Q}}_{n-1}|\|\widetilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}\|^2. \tag{18}$$

设式(18)中$\|\widetilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}\|^2=\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n-1}g_{n-1}$,易知$\partial g_{n-1}=2k$. 将式(17)代入(16),可得

$$\boldsymbol{R}_n(z)=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{S}_n(z)}=\boldsymbol{B}_0+\frac{z\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n-1}\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}^*}{\|\widetilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}\|^2}=\frac{\boldsymbol{B}_0g_{n-1}+z\widetilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}^*}{g_{n-1}}=\frac{\boldsymbol{P}_n(z)}{\boldsymbol{Q}_n(z)}, \tag{19}$$

其中$\boldsymbol{Q}_n(z)=g_{n-1}$. 由式(18)得到

$$\partial\boldsymbol{P}_n=n,\partial\boldsymbol{Q}_n=2k. \tag{20}$$

因为

$$\|\boldsymbol{P}_n\|^2=\|\boldsymbol{B}_0\|^2g_{n-1}^2+z^2\|\widetilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}^*\|^2+g_{n-1}(\boldsymbol{B}_0^*\widetilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}^*+\boldsymbol{B}_0\widetilde{\boldsymbol{P}}_{n-1}),$$

从而有

$$\boldsymbol{Q}_n|\|\boldsymbol{P}_n\|^2. \tag{21}$$

由式(19)～(21)可知,当$n=2k(k=0,1,\cdots)$时,有

$$\boldsymbol{R}_n(z)=\boldsymbol{Q}_n/\boldsymbol{P}_n=[n/2k]_f=[2k/2k]_f, \tag{22}$$

同理可以证明,当$n=2k+1(k=0,1,\cdots)$时,有

$$\boldsymbol{R}_n(z)=[n/2k]_f=[2k+1/2k]_f. \tag{23}$$

综上,定理1成立. □

2.3 算法算例

例2 设张量$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{2\times2\times2}$,张量幂级数展开式为

$$f(z)=\exp(\boldsymbol{A}z)=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&0&2\\0&-2&0&-1\end{array}\right]z+\left[\begin{array}{cc|cc}0&-2&0&-\frac{5}{2}\\0&\frac{5}{2}&0&2\end{array}\right]z^2+\cdots=\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{C}_1z+\boldsymbol{C}_2z^2+\cdots. \tag{24}$$

计算其[2/2]型GITPA.

根据算法1,计算结果如下:

$$\boldsymbol{A}_0(z)=f(z),\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{A}_0(0)=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{A}_1(z)=(Df(z))_r^{-1}=\frac{\left[\begin{array}{cc|cc}0&4z-1&0&-5z+2\\0&5z-2&0&4z-1\end{array}\right]}{2(4z-1)^2+2(5z-2)^2},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1(0)=\left[\begin{array}{cc|cc}0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5}\\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10}\end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}_2=2(D\boldsymbol{A}_1(z))_r^{-1}|_{z=0}=\left[\begin{array}{cc|cc}0 & \frac{16}{41} & 0 & \frac{62}{41}\\ 0 & -\frac{62}{41} & 0 & -\frac{16}{41}\end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{R}_2(z)=\frac{\boldsymbol{P}_2(z)}{\boldsymbol{Q}_2(z)}=\boldsymbol{B}_0+\frac{z}{\boldsymbol{B}_1}+\frac{z}{\boldsymbol{B}_2}=\frac{\left[\begin{array}{cc|cc}t_3 & t_1 & 0 & t_2\\ 0 & t_3-t_2 & 0 & -t_1\end{array}\right]}{t_3}.$$

其中

$$t_1=16z^2+20z,$$

$$t_2=62z^2+40z,$$

$$t_3=41z^2+56z+20.$$

由定义6, $\boldsymbol{R}_2(z)=\boldsymbol{P}_2(z)/\boldsymbol{Q}_2(z)$ 是式(24)的[2/2]型GITPA,满足以下条件:

1) $\partial\boldsymbol{P}_2(z)=2,\ \boldsymbol{Q}_2(z)=2.$

2) $\boldsymbol{Q}_2(z)\ |||\ \boldsymbol{P}_2(z)\ \|^2$. 其中

$$\|\mathcal{P}_2(z)\|^2=2(t_1^2+t_2^2+t_3^2-t_2t_3)=$$
$$2(t_3^2+4z^2t_3-t_2t_3)=2t_3(t_3+4z^2-t_2).$$

3) $\boldsymbol{Q}_2(z)\exp(\boldsymbol{A}z)-\boldsymbol{P}_2(t)=O(t^3)$.

3 数值实验

设将要计算的张量指数函数为

$$\exp(\boldsymbol{A}z)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}z+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2z^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3z^3+\cdots. \tag{25}$$

目前,计算张量指数函数(25)通常使用的方法是级数截断法[5],为了便于数值比较和验算,下面给出它的算法程序.

算法2 [5] 级数截断法.

输入: 给定张量$\boldsymbol{A}$、自变量z和误差限$\epsilon_{\rm tol}$的值.

Step 1: 初始化$n=0$和$\exp(\boldsymbol{A}):=\boldsymbol{I}$.

Step 2: $n:=n+1$.

Step 3: 计算$\dfrac{z^n}{n!}$和$\boldsymbol{A}^n$.

Step 4: 将上一步计算结果加入,有

$$\exp(\boldsymbol{A}):=\exp(\boldsymbol{A})+\frac{z^n}{n!}\boldsymbol{A}^n.$$

Step 5: 判断是否停止,若$\|\boldsymbol{A}^n\|z^n/n!<\epsilon_{\rm tol}$,则停止,否则转至Step 2.

输出: $\exp(\boldsymbol{A}t)$.

由连分式算法1计算得到的逼近值记作A值,由截断法(即算法2)取前30项计算得到的近似值为理论值,记作E值. 定义残差RES为张量逼近值和理论值差的模的平方,定义如下:

$$\mathrm{RES}(x_i)=\|\exp(\boldsymbol{A}z_i)-[4/4]_{\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}z}}(z_i)\|^2,$$

其中模算子$\|\cdot\|$由式(6)定义.

例3 设给定张量指数函数$\exp(\boldsymbol{A}z)$, $\boldsymbol{A}$中元素为$a_{121}=\dfrac{1}{3}, a_{122}=-\dfrac{1}{2}, a_{221}=\dfrac{1}{4}, a_{222}=\dfrac{1}{3}$,其余均为0.

现在计算该张量指数函数的[4/4]型GITRA,其计算结果在表1中记作A值. 首先,利用定义2,即张量t-积将$\exp(\boldsymbol{A}z)$展开成幂级数,得到

$$\exp(\boldsymbol{A}z)=$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc|cc}0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3}\end{array}\right]z+$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc}0 & -\frac{1}{24} & 0 & -\frac{1}{144}\\ 0 & \frac{25}{288} & 0 & \frac{1}{12}\end{array}\right]z^2+\left[\begin{array}{cc|cc}0 & -\frac{11}{2\,592} & 0 & -\frac{1}{192}\\ 0 & \frac{19}{1\,152} & 0 & \frac{43}{2\,592}\end{array}\right]z^3+$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc}0 & -\frac{29}{41\,472} & 0 & -\frac{37}{54\,478}\\ 0 & \frac{8}{3\,315} & 0 & \frac{25}{10\,368}\end{array}\right]z^4+\cdots=$$
$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}z+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2z^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3z^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4z^4+\cdots.$$

分别计算该张量下标为$(1,2,1)$,$(1,2,2)$,$(2,2,1)$和$(2,2,2)$在点$0.1,0.2,0.3,0.4,0.5$的A值和E值,计算结果见表1.

从表1中张量指数函数的连分式算法得到的逼近值(即A值)与截断法得到的理论值(即E值)的残差来看,本文给出的张量连分式算法是有效的.

例4 设给定张量指数函数$\exp(\boldsymbol{A}z)$,其中$\boldsymbol{A}$为如下$2\times2\times2\times2$四阶张量:

$$\boldsymbol{A}=$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc}a_{1\,111} & a_{1\,211} & a_{1\,121} & a_{1\,221}\\ a_{2\,111} & a_{2\,211} & a_{2\,121} & a_{2\,221}\end{array}\right]\to$$
$$\leftarrow\left[\begin{array}{cc|cc}a_{1\,112} & a_{1\,212} & a_{1\,122} & a_{1\,222}\\ a_{2\,112} & a_{2\,212} & a_{2\,122} & a_{2\,222}\end{array}\right]=$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}0.2 & 0 & 0 & -0.3 & 0 & -0.1 & -0.3 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0\end{array}\right].$$

现在计算该张量指数函数的[4/4]型GITRA. 首先利用定义3,即高阶张量t-积将$\exp(\boldsymbol{A}z)$展开成幂级数,再利用本文给出的算法1计算张量指数函数,将其计算结果与由截断法(即算法2)取前30项计算得到值进行比较,得到指数函数每个元素在点$0.1,0.3,0.5$的A值和E值,计算结果见表2. 在表2中,张量$\boldsymbol{A}$的元素表示为$a_{i_1i_2i_3i_4}$.

表 1 [4/4]型三阶张量连分式算法数值实验结果

z		(1, 2, 1)	(1, 2, 2)	(2, 2, 1)	(2, 2, 2)	RES
0.1	A 值	0.032 912 35	−0.050 074 72	1.025 884 80	0.034 183 50	5.42e-17
	E 值	0.032 912 35	−0.050 074 72	1.025 884 79	0.034 183 50	
0.2	A 值	0.064 964 88	−0.100 320 56	1.053 608 20	0.070 136 70	8.32e-15
	E 值	0.064 964 90	−0.100 320 56	1.053 608 12	0.070 136 67	
0.3	A 值	0.096 129 37	−0.150 771 32	1.083 278 40	0.107 968 45	2.19e-13
	E 值	0.096 129 55	−0.150 771 33	1.083 278 06	0.107 968 15	
0.4	A 值	0.126 375 53	−0.201 462 67	1.115 010 60	0.147 794 40	3.87e-12
	E 值	0.126 376 31	−0.201 462 69	1.115 009 22	0.147 793 12	
0.5	A 值	0.155 670 75	−0.252 432 21	1.148 927 40	0.189 737 69	3.83e-11
	E 值	0.155 673 18	−0.252 432 25	1.148 923 09	0.189 733 63	

表 2 [4/4]型四阶张量连分式算法数值实验结果

元素	$z=0.1$		$z=0.3$		$z=0.5$	
	A 值	E 值	A 值	E 值	A 值	E 值
$a_{1\,111}$	1.020 505	1.020 505	1.064 640	1.064 640	1.113 182	1.113 178
$a_{1\,211}$	−0.000 045	−0.000 045	−0.000 316	−0.000 316	−0.000 621	−0.000 620
$a_{2\,111}$	−0.000 773	−0.000 773	−0.007 379	−0.007 377	−0.021 765	−0.021 747
$a_{2\,211}$	1.040 703	1.040 703	1.126 386	1.126 386	1.217 898	1.217 902
$a_{1\,121}$	−0.000 242	−0.000 242	−0.002 008	−0.002 008	−0.005 059	−0.005 057
$a_{1\,221}$	−0.030 763	−0.030 763	−0.097 121	−0.097 121	−0.170 505	−0.170 507
$a_{2\,121}$	0.010 552	0.010 552	0.034 987	0.034 987	0.063 895	0.063 890
$a_{2\,221}$	−0.000 251	−0.000 251	−0.002 275	−0.002 275	−0.006 342	−0.006 339
$a_{1\,112}$	−0.000 766	−0.000 766	−0.007 195	−0.007 193	−0.020 900	−0.020 885
$a_{1\,212}$	−0.009 843	−0.009 843	−0.028 458	−0.028 458	−0.045 316	−0.045 326
$a_{2\,112}$	−0.000 161	−0.000 161	−0.001 649	−0.001 649	−0.005 158	−0.005 154
$a_{2\,212}$	0.009 634	0.009 634	0.026 410	0.026 411	0.039 120	0.039 133
$a_{1\,122}$	−0.030 660	−0.0306 60	−0.096 111	−0.096 112	−0.167 456	−0.167 463
$a_{1\,222}$	−0.000 146	−0.000 146	−0.001 238	−0.001 238	−0.003 204	−0.003 202
$a_{2\,122}$	0.051 579	0.051 579	0.164 741	0.164 741	0.292 494	0.292 494
$a_{2\,222}$	−0.000 052	−0.000 052	−0.000 494	−0.000 495	−0.001 438	−0.001 440
RES		2.167 1e-15		3.562 9e-12		6.501 3e-10

从表2中本文算法得到的逼近值与截断法得到的理论值的残差来看,本文给出的张量连分式算法对高阶张量也是有效的.

4 结 论

本文提出的一种张量广义逆是一个实用的计算方法,它是向量广义逆[10]和矩阵广义逆[11-15]在张量上的推广. 在该张量广义逆的基础上,得到了计算张量指数函数的张量Thiele型连分式算法. 从计算张量指数函数的数值实验来看,所给出的算法是有效的. 由张量连分式算法Step 1～Step 4利用张量广义逆分别计算$\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,n)$可以看出,当张量指数函数(25)中张量$\boldsymbol{A}$维数较大时,连分式算法的计算效果会更加明显. 以后的研究工作考虑将所提出的张量连分式方法用于控制论中的模型简化问题.

参考文献(References)

[1] Batselier K, Chen Z, Wong N. A tensor network kalman filter with an application in recursive MIMO volterra system identification[J]. Automatica, 2017, 84: 17-25.

[2] Liu X, Yu Y, Li Z, et al. An efficient algorithm for optimally reshaping the TP model transformation[J]. IEEE Trans on Circuits & Systems II, Express Briefs, 2017, 64(10): 1187-1191.

[3] Koniusz P, Cherian A, Porikli F. Tensor representations via kernel linearization for action recognition from 3D skeletons[C]. European Conf on Computer Vision. Austerdam: Springer International Publishing, 2016: 37-53.

[4] Souza Neto E A. The exact derivative of the exponential of an unsymmetric tensor[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2001, 190(18/19): 2377-2383.

[5] Neto E A D S, Peri D, Owen D R J. Computational methods for plasticity: Theory and applications[M]. New York: Wiley, 2008: 729-764.

[6] Kolda T G, Bader B W. Tensor decompositions and applications[J]. Siam Review, 2009, 51(3): 455-500.

[7] Kilmer M E, Braman K, Hao N, et al. Third-order tensors as operators on matrices: A Theoretical and computational framework with applications in imaging[J]. Siam J on Matrix Analysis & Applications, 2013, 34(1): 148-172.

[8] Kilmer M E, Martin C D, Perrone L. A third-order generalization of the matrix svd as a product of third-order tensors[R]. Medford: Department of Computer Science, Tufts University, 2008.

[9] Martin C D, Shafer R, Larue B. An order-p tensor factorization with applications in imaging[J]. Siam J on Scientific Computing, 2013, 35(1): 474-490.

[10] Graves-Morris P R. Vector valued rational interpolants I[J]. Numerische Mathematik, 1983, 42(3): 331-348.

[11] Gu Chuan-qing. Generalized inverse matrix Padé approximation on the basis of scalar products[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2001, 322(1): 141-167.

[12] Gu Chuan-qing. A practical two-dimensional thiele-type matrix pade approximation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(12): 2259-2263.

[13] 顾传青. 关于矩阵指数的Padé逼近新算法[J]. 自动化学报, 1999, 25(1): 94-99.
(Gu C Q. New algorithm for matrix exponentials by Padé approximation[J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(1): 94-99.)

[14] 顾传青. 基于广义逆的矩阵Pade逼近[J]. 计算数学, 1997(1): 19-29.
(Gu C Q. Matrix Pade approximation based on generalized inverse[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1997(1): 19-29.)

[15] 顾传青. 矩阵有理逼近及其在控制论中应用[D]. 上海: 上海大学理学院, 2004.
(Gu C Q. Matrix rational approximation and its application in control theory[D]. Shanghai: College of Science, Shanghai University, 2004.)

作者简介

顾传青(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事数值逼近、数值代数及其在控制论中的应用等研究, E-mail: cqgu@shu.edu.cn;

黄逸铮(1994−), 男, 硕士生, 从事Padé逼近及其应用的研究, E-mail: 895168142@qq.com;

陈之兵(1968−), 男, 教授, 从事数值逼近等研究, E-mail: chenzb@szu.edu.cn.

(责任编辑：郑晓蕾)