

含状态和输入时滞的模糊系统的 隶属函数依赖的稳定与镇定

周 坤¹, 齐淑楠^{2†}, 黄天民³, 赵 涛⁴

(1. 西南交通大学 电气工程学院, 成都 610031; 2. 周口师范学院 计算机科学与技术学院, 河南 周口 466001;
3. 西南交通大学 数学学院, 成都 611756; 4. 四川大学 电气信息学院, 成都 610065)

摘 要: 研究一类含有状态时滞和输入时滞的 T-S 模糊系统的稳定性分析和镇定问题. 首先, 构造一个含三重积分的 Lyapunov-Krasovskii(L-K) 泛函, 利用一个近期提出的二重积分不等式和基于辅助函数的积分不等式处理积分项. 为了得到更为放松的时滞依赖的稳定性结果, 考虑隶属度函数的边界信息, 选择分段隶属函数去近似隶属度函数, 同时引入松弛矩阵, 以线性矩阵不等式(LMIs)形式给出保守性较小的隶属函数依赖的稳定性准则; 然后, 基于前提不匹配技术, 结合 Finsler 引理, 首次提出含状态和输入时滞的模糊系统的状态反馈控制器的设计方法, 该模糊控制器不要求与模糊系统拥有相同的隶属度函数和模糊规则数目, 从而提高设计的灵活性; 最后, 通过给出 3 个仿真算例表明所提出方法的先进性和有效性.

关键词: 积分不等式; 时滞依赖; 分段隶属函数; 隶属函数依赖; 前提不匹配技术; Finsler 引理

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Membership-function-dependent stability and stabilization for fuzzy systems with state and input delays

ZHOU Kun¹, QI Shu-nan^{2†}, HUANG Tian-min³, ZHAO Tao⁴

(1. School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. School of Computer Science and Technology, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466001, China; 3. School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China; 4. School of Electrical Engineering and Information, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: This paper focuses on the stability analysis and stabilization for a class of T-S fuzzy systems with state and input delays. Firstly, a Lyapunov-Krasovskii (L-K) functional with triangle integral is constructed, and a recently developed double integral inequality and the auxiliary function-based integral inequality are selected to deal with the integral term in the derivative of the Lyapunov-Krasovskii functional. In order to obtain further relaxed delay-dependent stability results, the boundary information on membership functions is considered, the piecewise membership functions are employed to approximate the membership functions, meanwhile, some slack matrices are employed, and relaxed membership-function-dependent stability criteria are obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Then, under the imperfect premise matching technique, combining with the Finsler lemma, a fuzzy state feedback control design method is presented for the first time for the T-S fuzzy systems with state and input delays. The fuzzy controller is required to employ the same premise membership functions and the number of fuzzy rules as the fuzzy model, and then the flexibility of controller design is improved. Finally, three numerical examples are given to illustrate progressiveness and effectiveness of the presented approach.

Keywords: integral inequality; delay-dependent; piecewise membership functions; membership-function-dependent; imperfect premise matching technique; Finsler lemma

0 引 言

时滞现象存在于各种实际系统中,如信号传输、网络控制系统、神经网络以及混沌系统之间的同步

等^[1]. 时滞常常是控制系统振荡和性能下降的根源,甚至可能导致系统的不稳定^[2]. T-S 模糊模型将复杂的非线性系统表示成简单的局部线性子系统加权和

收稿日期: 2018-01-13; 修回日期: 2018-05-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473239, 51475391).

责任编委: 王燕舞.

†通讯作者. E-mail: 18215528161@163.com.

的形式,成为处理非线性系统的有效方法.因此,T-S模糊时滞系统的稳定性分析、控制器综合及滤波器设计,受到人们越来越多的关注.近年来,结合积分不等式技术、Lyapunov-Krasovskii(L-K)泛函法、自由权矩阵技术及时滞分割技术,国内外学者取得了丰硕的成果.文献[3]选择一个合适的L-K泛函,结合时滞分割技术和不等式技术,引入模糊自由权矩阵处理L-K导数中的积分项,得到了新的T-S模糊时滞系统稳定性准则.给出了基于并行分布补偿(PDC)技术的状态反馈控制器的设计方法.文献[4]构造一个新的模糊L-K泛函,结合时滞分割技术及Jensen不等式,给出了T-S模糊时滞系统的稳定性条件;同时,基于PDC技术,提出了状态反馈控制器的设计方法.文献[5]构造一个新的含三重积分的增广L-K泛函,结合改进的互凸组合技术和Wirtinger积分不等式,得到了放松的T-S模糊时滞系统的稳定性判据.文献[6]基于柯西-施瓦茨不等式,构造一个新的有限和不等式,结合一个新的增广L-K泛函,给出了T-S模糊时滞系统的保守性更小的稳定性条件,同时提出了基于PDC技术的模糊状态反馈控制器的设计方法.文献[7]针对一类T-S模糊不确定时滞系统,构造模糊L-K泛函,结合积分不等式技术,给出了基于PDC技术的模糊滤波器的设计方法.文献[8]结合自由权矩阵技术和积分不等式技术,考虑隶属函数的导数信息,给出了T-S模糊时滞系统的稳定性条件,同时设计了基于PDC技术的模糊记忆状态反馈控制器.

然而,上述结果都只考虑了含状态时滞的情形.由于控制信号是通过网络传输的,控制输入存在时滞是不可避免的,对含有输入时滞的T-S模糊系统的研究,在理论和实际应用中都具有重要的意义.文献[9]研究了含有输入时滞的T-S模糊系统,基于PDC技术,提出了动态输出反馈控制器的设计方法.文献[10]针对含有输入时滞的T-S模糊随机切换系统,设计了基于PDC技术的模糊输出反馈控制器.需要指出的是,文献[9-10]只考虑了含有输入时滞的情况,并未考虑同时含有输入时滞和状态时滞的情况.

另一方面,上述成果及当前几乎所有的T-S模糊系统的控制器都是基于PDC技术设计的.PDC技术要求模糊控制器和模糊模型使用相同的隶属度函数和模糊规则数目,方便了T-S模糊系统的稳定性分析.然而,PDC技术限制了模糊控制器设计的灵活性,有可能使其结构复杂化^[11].近年来,前提不匹配技术的提出,成功地解决了此问题.不同于传统的PDC技术,前提不匹配技术不要求模糊控制器与模糊模型分

享相同的隶属度函数和规则数目,极大地增加了控制器设计的自由度.然而,由于不匹配的前提隶属度函数和规则数目,使T-S模糊系统的稳定性分析更具挑战性.对基于前提不匹配技术的控制器综合的研究,如何降低稳定性分析的保守性是首要问题.近年来,为了降低模糊系统稳定性分析的保守性,有学者提出了隶属函数依赖的稳定性分析法,将隶属度函数的边界大小与形状信息考虑进去,以达到降低保守性的目的.文献[12]结合L-K泛函法和积分不等式技术,考虑时延和数据丢失等情况,基于前提不匹配技术,给出了T-S模糊网络控制系统的状态反馈控制器的设计方法.文献[13]构造一个新的有限和不等式,考虑隶属度函数的边界信息,得到了放松的稳定性条件;基于前提不匹配技术,给出了模糊时滞系统的状态反馈控制器设计方法.文献[14]基于时滞分割技术,构造一个新的模糊L-K泛函,结合积分不等式技术,考虑隶属度函数边界信息,给出了隶属函数依赖的稳定性准则;基于前提不匹配技术,给出了模糊状态反馈控制器的设计方法.值得注意的是,文献[12-13]的前提不匹配的控制器的设计只考虑了隶属度函数不相同的情况,并未考虑模糊规则数目不相同的情况.此外,文献[12]只考虑了含输入时滞的情形,而文献[13-14]也只考虑了含状态时滞的情形.

受上述讨论的启发,本文针对一类含有状态时滞和输入时滞的T-S模糊系统,构造一个增广L-K泛函,结合隶属函数依赖分析法和积分不等式技术,得到更为放松的隶属函数依赖的稳定性结果.基于前提不匹配技术,首次提出含状态和输入时滞的模糊系统的状态反馈控制器的设计方法,通过为模糊控制器选择更为简单的隶属度函数和较小的规则数目,降低了控制器的设计复杂度,提高了设计的灵活性.

1 问题描述

首先给出符号标记: R^n 和 $R^{n \times m}$ 分别代表实数域的 n 维向量空间和 $n \times m$ 维矩阵空间; $\text{diag}\{\dots\}$ 表示对角矩阵; $P > 0$ 表示矩阵 P 是正定的; 0 和 I 分别表示合适维数的零矩阵和单位矩阵; A^{-1} 和 A^T 分别表示矩阵 A 的逆矩阵和转置; $\text{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩; $\text{Sym}\{A\}$ 表示矩阵 A 及其转置的和.

1.1 模糊模型

考虑如下具有 p 个模糊规则数目的T-S模糊模型描述的含状态和输入时滞的非线性系统:

Rule i : If $\varsigma_1(x(t))$ is ψ_1^i and $\varsigma_2(x(t))$ is ψ_2^i and $\dots \varsigma_\chi(x(t))$ is ψ_χ^i , Then

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(t - \tau_1) + \mathbf{B}_{di} \mathbf{u}(t - \tau_2), \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\phi}(t), \quad t \in [-\max(\tau_1, \tau_2), 0]. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $\psi_\alpha^i (\alpha = 1, 2, \dots, \chi, i = 1, 2, \dots, p)$ 是模糊集; 状态时滞 $\tau_1 \geq 0$ 和输入时滞 $\tau_2 \geq 0$ 是已知且固定的; $\boldsymbol{\phi}(t)$ 是定义在 $[-\max(\tau_1, \tau_2), 0]$ 上的连续初始函数; $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态; $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入; $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{di}, \mathbf{B}_{di}$ 是已知的具有合适维数的矩阵.

通过单点模糊化, 乘积推理和中心平均反模糊化方法, 系统(1)的动态模型可描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^p m_i(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \\ &\quad \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(t - \tau_1) + \mathbf{B}_{di} \mathbf{u}(t - \tau_2)). \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} m_i(\mathbf{x}(t)) &= \frac{\mu_i(\mathbf{x}(t))}{\sum_{i=1}^p \mu_i(\mathbf{x}(t))}, \\ \mu_i(\mathbf{x}(t)) &= \prod_{\alpha=1}^{\chi} \lambda_{\psi_\alpha^i}(\varsigma_\alpha(\mathbf{x}(t))); \\ m_i(\mathbf{x}(t)) &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^p m_i(\mathbf{x}(t)) = 1, \end{aligned}$$

$\lambda_{\psi_\alpha^i}(\varsigma_\alpha(\mathbf{x}(t)))$ 是 $\varsigma_\alpha(\mathbf{x}(t))$ 对应的隶属度函数.

1.2 模糊控制器

基于前提不匹配技术, 设计如下具有 c 个模糊规则数目的状态反馈控制器

Rule j : If $\varsigma_1(\mathbf{x}(t))$ is ψ_1^j and $\varsigma_2(\mathbf{x}(t))$ is ψ_2^j and \dots $\varsigma_\chi(\mathbf{x}(t))$ is ψ_χ^j , Then

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_j \mathbf{x}(t), \quad j = 1, 2, \dots, c. \quad (3)$$

此时, 模糊控制律可描述为

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^c h_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{K}_j \mathbf{x}(t), \quad (4)$$

\mathbf{K}_j 是待求解的控制增益矩阵. 由式(2)和(4)可得 T-S 模糊时滞系统的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t - \tau_2)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \\ &\quad \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(t - \tau_1) + \mathbf{B}_{di} \mathbf{K}_j \mathbf{x}(t - \tau_2)) \triangleq \\ &\quad \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d(t) \mathbf{x}(t - \tau_1) + \\ &\quad \mathbf{B}_d(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t - \tau_2). \end{aligned} \quad (5)$$

注1 为了简化表达, 定义如下记号: $m_i = m_i(\mathbf{x}(t)), h_j = h_j(\mathbf{x}(t)), h_j^{\tau_2} = h_j(\mathbf{x}(t - \tau_2)), m_i h_j = m_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)), m_i h_j^{\tau_2} = m_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t - \tau_2))$.

注2 不同于传统的 PDC 技术, 本文设计的前提不匹配的模糊控制器的隶属度函数和模糊规则

数目可以任意选择, 即不要求 $p \equiv c, m_i \equiv h_i, i = 1, 2, \dots, p$. 在接下来的章节可以看出, 本文的设计有效地增加了控制器设计的自由度.

1.3 预备引理

为了得到本文的主要结果, 给出以下引理.

引理1^[15] (基于辅助函数的积分不等式) 对于一给定的正定矩阵 $\mathbf{R} > 0$, 以及任意的连续可微函数 $x : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 有如下的不等式成立:

$$\begin{aligned} \int_a^b \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds &\geq \\ \frac{1}{b-a} \boldsymbol{\Omega}_1^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}_1 &+ \frac{3}{b-a} \boldsymbol{\Omega}_2^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}_2 + \frac{5}{b-a} \boldsymbol{\Omega}_3^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}_3. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_1 &= \mathbf{x}(b) - \mathbf{x}(a), \\ \boldsymbol{\Omega}_2 &= \mathbf{x}(b) + \mathbf{x}(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \mathbf{x}(s) ds, \\ \boldsymbol{\Omega}_3 &= \mathbf{x}(b) - \mathbf{x}(a) + \frac{6}{b-a} \int_a^b \mathbf{x}(s) ds - \\ &\quad \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_u^b \mathbf{x}(s) ds du. \end{aligned}$$

引理2^[16] 对于一给定的正定矩阵 $R > 0$, 以及任意的连续可微函数 $x : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_u^b \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds du &\geq \\ 2 \boldsymbol{\Omega}_4^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}_4 &+ 4 \boldsymbol{\Omega}_5^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}_5 + 6 \boldsymbol{\Omega}_6^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}_6. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_4 &= \mathbf{x}(b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathbf{x}(s) ds, \\ \boldsymbol{\Omega}_5 &= \mathbf{x}(b) + \frac{2}{b-a} \int_a^b \mathbf{x}(s) ds - \\ &\quad \frac{6}{(b-a)^2} \int_a^b \int_u^b \mathbf{x}(s) ds du, \\ \boldsymbol{\Omega}_6 &= \mathbf{x}(b) - \frac{3}{b-a} \int_a^b \mathbf{x}(s) ds + \\ &\quad \frac{24}{(b-a)^2} \int_a^b \int_u^b \mathbf{x}(s) ds du - \\ &\quad \frac{60}{(b-a)^3} \int_a^b \int_u^b \int_s^b \mathbf{x}(r) dr ds du. \end{aligned}$$

引理3^[17] (Finsler 引理) 设 $\boldsymbol{\varsigma} \in \mathbf{R}^n$ 是随机向量, $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是对称矩阵, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是任意矩阵且 $\text{rank}(\boldsymbol{\beta}) = r < n, \boldsymbol{\beta}^\perp \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$ 是矩阵 $\boldsymbol{\beta}$ 的右正交补, 满足 $\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^\perp = 0, \boldsymbol{\beta}^\perp \boldsymbol{\beta}^{\perp T} > 0$, 则如下命题是等价的:

- 1) $\boldsymbol{\varsigma}^T \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\varsigma} < 0, \forall \boldsymbol{\varsigma} \neq 0, \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\varsigma} = 0;$
- 2) $\boldsymbol{\beta}^{\perp T} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\beta}^\perp < 0;$
- 3) $\exists \boldsymbol{\kappa} \in \mathbf{R}: \boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta} < 0;$
- 4) $\exists \mathbf{R} \in \mathbf{R}^{n \times m}: \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{R} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{R}^T < 0.$

2 主要结论

2.1 隶属函数依赖的稳定性分析

为了考虑隶属度函数信息,给出保守性更小的隶属函数依赖的稳定性准则.首先,需要引入文献[18]的如下结果:将状态空间 Γ 分成 k 个相连的子空间,分别记为 $\Gamma_l, l = 1, 2, \dots, k$,满足 $\Gamma = \bigcup_{l=1}^k \Gamma_l$.考虑其中一个状态 $\mathbf{X} = [x_1 \ \dots \ x_\eta]$, $\mathbf{X} \in \Gamma_l$,定义 x_r 的上下确界分别为 $\underline{x}_{ri,l}$ 和 $\bar{x}_{ri,l}, r = 1, 2, \dots, \eta, i_r = 1, 2$,即满足 $\underline{x}_{ri,l} \leq x_r \leq \bar{x}_{ri,l}$.设状态子空间 Γ_l 的顶点为 $x_{i_1 \dots i_\eta l} = [x_{1i_1 l} \ \dots \ x_{\eta i_\eta l}]$,分段隶属函数为

$$\hat{\omega}(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_\eta=1}^2 \prod_{r=1}^{\eta} \nu_{ri,l}(x_r) \hat{\omega}(x_{i_1 \dots i_\eta l}). \quad (6)$$

其中: $\nu_{ri,l}(x_r)$ 是提前给出的函数且满足:

- 1) 对所有的 r, l 和 $x \in \Gamma_l$,有 $0 \leq \nu_{ri,l}(x_r) \leq 1$, $\sum_{i_r=1}^2 \nu_{ri,l}(x_r) = 1$, 否则, $\nu_{ri,l}(x_r) = 0$;
- 2) $\sum_{l=1}^k \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_\eta=1}^2 \prod_{r=1}^{\eta} \nu_{ri,l}(x_r) = 1$.

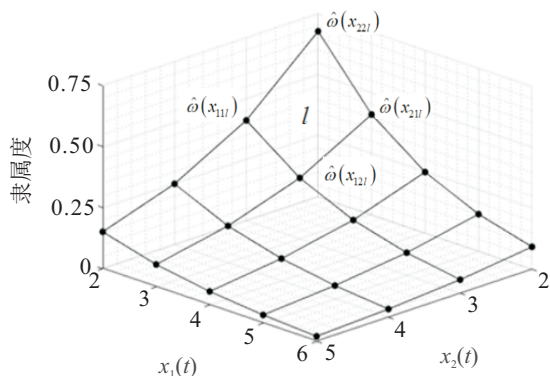


图1 分段隶属函数

为了更好地说明分段隶属函数的定义,下面给出一个分段隶属函数 $\hat{\omega}(x)$ 的例子.设其中一个状态 $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2]$.如图1所示,状态空间 Γ 被分成12个子空间 $\Gamma_l, l = 1, 2, \dots, 12$.图中黑色的点代表顶点,每一个子区间 Γ_l 由4个顶点表示.将图1中标注的第 l 个子区间 Γ_l 的4个顶点对应的隶属度分别记为 $\hat{\omega}(x_{11l}), \hat{\omega}(x_{12l}), \hat{\omega}(x_{21l})$ 和 $\hat{\omega}(x_{22l})$.函数 $\nu_{11l}(x_1), \nu_{12l}(x_1), \nu_{21l}(x_2)$ 及 $\nu_{22l}(x_2)$ 是提前定义的,且满足 $\nu_{11l}(x_1) + \nu_{12l}(x_1) = 1, \nu_{21l}(x_2) + \nu_{22l}(x_2) = 1$,当取其他子空间的点时, $\nu_{11l}(x_1), \nu_{12l}(x_1), \nu_{21l}(x_2)$ 及 $\nu_{22l}(x_2)$ 的值为0.此时,由分段隶属函数的定义,第 l 个子区间 Γ_l 的隶属度可表示为

$$\hat{\omega}(x) = \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \prod_{r=1}^2 \nu_{ri,l}(x_r) \hat{\omega}(x_{i_1 i_2 l}),$$

在此基础上可以得到整个分段隶属函数的表达式为

$$\hat{\omega}(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \prod_{r=1}^2 \nu_{ri,l}(x_r) \hat{\omega}(x_{i_1 i_2 l}).$$

注3 为了得到保守性更小的隶属函数依赖的稳定性准则,本文引用了文献[18]提出的分段隶属函数的方法.文献[18]研究的T-S模糊系统并未考虑时滞现象,而本文研究了T-S模糊时滞系统的稳定与镇定问题,并且考虑了状态和输入同时含有时滞的情况.另一方面,文献[18]提出的模糊观测器是基于传统的PDC技术设计的.本文提出的模糊控制器是基于前提不匹配技术设计的,在下面章节中将会看到该设计方法相较于传统的PDC技术的优越性.

定理1 假设增益矩阵 K_j 已经给定,对于给定的时滞 $\tau_1, \tau_2 (> 0)$,闭环系统(5)是渐近稳定的,如果存在以下矩阵 $0 < P_1 = P_1^T \in R^{4n \times 4n}, 0 < P_2 = P_2^T \in R^{4n \times 4n}, 0 < Q_1 = Q_1^T \in R^{n \times n}, 0 < Q_2 = Q_2^T \in R^{n \times n}, 0 < S_1 = S_1^T \in R^{n \times n}, 0 < S_2 = S_2^T \in R^{n \times n}, 0 < R_1 = R_1^T \in R^{n \times n}, 0 < R_2 = R_2^T \in R^{n \times n}, 0 < M_{ij} = M_{ij}^T \in R^{9n \times 9n}$ 和 $N = N^T \in R^{9n \times 9n}$,使如下的LMIs成立:

$$\Delta_{ij} + N - M_{ij} < 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, c; \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c ((\hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x_{i_1 i_2 \dots i_n l}) + \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}) \Delta_{ij} + \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2} N + (\Delta \bar{\lambda}_{ij}^{\tau_2} - \lambda_{ij}^{\tau_2}) M_{ij}) < 0, \quad \forall i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}, l = 1, 2, \dots, k. \quad (8)$$

其中: $\hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x)$ 是分段隶属函数, k 是状态空间 Γ 被分成子空间的数目, $x_{i_1 i_2 \dots i_n l}$ 是状态空间 Γ 第 l 个子空间的顶点, $\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}$ 和 $\Delta \bar{\lambda}_{ij}^{\tau_2}$ 是提前定义的标量且 $\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2} \leq \Delta \bar{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x) \leq \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}$,其他矩阵定义如下:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} = & \text{Sym}\{\Sigma_1^T P_1 \Sigma_{2ij} + \Sigma_3^T P_2 \Sigma_{4ij}\} + \\ & e_1^T (Q_1 + Q_2) e_1 - e_2^T Q_1 e_2 - e_3^T Q_2 e_3 + \\ & \tau_1^2 U_{ij}^T S_1 U_{ij} + \tau_2^2 U_{ij}^T S_2 U_{ij} + \Sigma_5^T S_1 \Sigma_5 - \\ & 3 \Sigma_6^T S_1 \Sigma_6 - 5 \Sigma_7^T S_1 \Sigma_7 - \Sigma_8^T S_2 \Sigma_8 - \\ & 3 \Sigma_9^T S_2 \Sigma_9 - 5 \Sigma_{10}^T S_2 \Sigma_{10} + \frac{\tau_1^2}{2} U_{ij}^T R_1 U_{ij} - \\ & 2 \Sigma_{11}^T R_1 \Sigma_{11} - 4 \Sigma_{12}^T R_1 \Sigma_{12} - 6 \Sigma_{13}^T R_1 \Sigma_{13} + \\ & \frac{\tau_2^2}{2} U_{ij}^T R_2 U_{ij} - 2 \Sigma_{14}^T R_2 \Sigma_{14} - \\ & 4 \Sigma_{15}^T R_2 \Sigma_{15} - 6 \Sigma_{16}^T R_2 \Sigma_{16}, \\ \Sigma_1 = & [e_1^T \ e_4^T \ e_6^T \ e_8^T]^T, \\ \Sigma_{2ij} = & \left[U_{ij}^T \ e_1^T - e_2^T \ \tau_1 e_1^T - e_4^T \ \frac{\tau_1^2}{2} e_1^T - e_6^T \right]^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= [e_1^T \ e_5^T \ e_7^T \ e_9^T]^T, \\ \Sigma_{4ij} &= \\ & \left[U_{ij}^T \ e_1^T - e_3^T \ \tau_2 e_1^T - e_5^T \ \frac{\tau_2^2}{2} e_1^T - e_7^T \right]^T, \\ \Sigma_5 &= e_1 - e_2, \ \Sigma_6 = e_1 + e_2 - \frac{2}{\tau_1} e_4, \\ \Sigma_7 &= e_1 - e_2 + \frac{6}{\tau_1} e_4 - \frac{12}{\tau_1^2} e_6, \\ \Sigma_8 &= e_1 - e_3, \ \Sigma_9 = e_1 + e_3 - \frac{2}{\tau_2} e_5, \\ \Sigma_{10} &= e_1 - e_2 + \frac{6}{\tau_2} e_5 - \frac{12}{\tau_2^2} e_7, \\ \Sigma_{11} &= e_1 - \frac{1}{\tau_1} e_4, \ \Sigma_{12} = e_1 + \frac{2}{\tau_1} e_4 - \frac{6}{\tau_1^2} e_6, \\ \Sigma_{13} &= e_1 - \frac{3}{\tau_1} e_4 + \frac{24}{\tau_1^2} e_6 - \frac{60}{\tau_1^3} e_8, \\ \Sigma_{14} &= e_1 - \frac{1}{\tau_2} e_5, \ \Sigma_{15} = e_1 + \frac{2}{\tau_2} e_5 - \frac{6}{\tau_2^2} e_7, \\ \Sigma_{16} &= e_1 - \frac{3}{\tau_1} e_5 + \frac{24}{\tau_1^2} e_7 - \frac{60}{\tau_1^3} e_9, \\ U_{ij} &= A_i e_1 + A_{di} e_2 + B_{di} K_j e_3, \\ e_i &= [0_{n \times (i-1)n} \ I_n \ 0_{n \times (9-i)n}], \ i = 1, 2, \dots, 9. \end{aligned}$$

证明 选择如下的L-K泛函:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t).$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \eta_1^T(t) P_1 \eta_1(t) + \eta_2^T(t) P_2 \eta_2(t), \\ V_2(t) &= \\ & \int_{t-\tau_1}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\tau_2}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds, \\ V_3(t) &= \tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \int_u^t \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds du + \\ & \tau_2 \int_{t-\tau_2}^t \int_u^t \dot{x}^T(s) S_2 \dot{x}(s) ds du, \\ V_4(t) &= \int_{t-\tau_1}^t \int_u^t \int_s^t \dot{x}^T(r) R_1 \dot{x}(r) dr ds du + \\ & \int_{t-\tau_2}^t \int_u^t \int_s^t \dot{x}^T(r) R_2 \dot{x}(r) dr ds du, \\ \eta_1(t) &= \\ & \left[x^T(t) \int_{t-\tau_1}^t x^T(s) ds \int_{t-\tau_1}^t \int_u^t x^T(s) ds du \rightarrow \right. \\ & \left. \leftarrow \int_{t-\tau_1}^t \int_u^t \int_s^t x^T(r) dr ds du \right]^T, \\ \eta_2(t) &= \\ & \left[x^T(t) \int_{t-\tau_2}^t x^T(s) ds \int_{t-\tau_2}^t \int_u^t x^T(s) ds du \rightarrow \right. \\ & \left. \leftarrow \int_{t-\tau_2}^t \int_u^t \int_s^t x^T(r) dr ds du \right]^T. \end{aligned}$$

将V(t)沿式(5)对时间求导,得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_2} \xi^T(t) \text{Sym} \{ \Sigma_1^T P_1 \Sigma_{2ij} + \\ & \Sigma_3^T P_2 \Sigma_{4ij} \} \xi(t), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_2} \xi^T(t) [e_1^T (Q_1 + Q_2) e_1 - \\ & e_2^T Q_1 e_2 - e_3^T Q_2 e_3] \xi(t), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_2} \xi^T(t) [\tau_1^2 U_{ij}^T S_1 U_{ij} + \\ & \tau_2^2 U_{ij}^T S_2 U_{ij}] \xi(t) - \tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds - \\ & \tau_2 \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) S_2 \dot{x}(s) ds, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_2} \xi^T(t) \left[\frac{\tau_1^2}{2} U_{ij}^T R_1 U_{ij} + \right. \\ & \left. \frac{\tau_2^2}{2} U_{ij}^T R_2 U_{ij} \right] \xi(t) - \int_{t-\tau_1}^t \int_u^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds du - \\ & \int_{t-\tau_2}^t \int_u^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds du, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \\ & \left[x^T(t) \ x^T(t-\tau_1) \ x^T(t-\tau_2) \rightarrow \right. \\ & \leftarrow \int_{t-\tau_1}^t x^T(s) ds \int_{t-\tau_2}^t x^T(s) ds \rightarrow \\ & \leftarrow \int_{t-\tau_1}^t \int_u^t x^T(s) ds du \int_{t-\tau_2}^t \int_u^t x^T(s) ds du \rightarrow \\ & \leftarrow \int_{t-\tau_1}^t \int_u^t \int_s^t x^T(r) dr ds du \rightarrow \\ & \left. \leftarrow \int_{t-\tau_2}^t \int_u^t \int_s^t x^T(r) dr ds du \right]^T. \end{aligned}$$

运用引理1对式(11)中的积分项进行处理,得

$$\begin{aligned} & -\tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds \leq \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_2} \xi^T(t) (-\Sigma_5^T S_1 \Sigma_5 - \\ & 3 \Sigma_6^T S_1 \Sigma_6 - 5 \Sigma_7^T S_1 \Sigma_7) \xi(t), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} & -\tau_2 \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) S_2 \dot{x}(s) ds \leq \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_2} \xi^T(t) (-\Sigma_8^T S_2 \Sigma_8 - \\ & 3 \Sigma_9^T S_2 \Sigma_9 - 5 \Sigma_{10}^T S_2 \Sigma_{10}) \xi(t). \end{aligned} \tag{14}$$

运用引理2对式(12)中的积分项进行处理,得

$$\begin{aligned} & -\int_{t-\tau_1}^t \int_u^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds du \leq \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_2} \xi^T(t) (-2 \Sigma_{11}^T R_1 \Sigma_{11} - \\ & 4 \Sigma_{12}^T R_1 \Sigma_{12} - 6 \Sigma_{13}^T R_1 \Sigma_{13}) \xi(t), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} & -\int_{t-\tau_2}^t \int_u^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds du \leq \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_2} \xi^T(t) (-2 \Sigma_{14}^T R_2 \Sigma_{14} - \\ & 4 \Sigma_{15}^T R_2 \Sigma_{15} - 6 \Sigma_{16}^T R_2 \Sigma_{16}) \xi(t). \end{aligned} \tag{16}$$

由式(9)~(16)得

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_2} \xi^T(t) \eta_{ij} \xi(t). \quad (17)$$

为了减少系统(5)稳定性分析的保守性,根据式(6),定义如下的分段隶属函数:

$$\hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_\eta=1}^2 \prod_{r=1}^{\eta} \nu_{r i_r l}(x_r) \hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x_{i_1 \dots i_\eta l}), \quad (18)$$

其中 $\lambda_{ij}^{\tau_2}(x) = m_i h_j^{\tau_2}$. 下面将用分段隶属函数 $\hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x)$ 去近似隶属度函数的乘积 $\lambda_{ij}^{\tau_2}(x)$.

设 $\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) = \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) - \hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x)$, $\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x)$ 的上下确界分别记为 $\Delta \bar{\lambda}_{ij}^{\tau_2}$ 和 $\Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2}$, 即满足 $\Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2} \leq \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) \leq \Delta \bar{\lambda}_{ij}^{\tau_2}$, 由分段隶属函数的性质和 $\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x)$ 的定义可得 $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) = 0$.

引入松弛矩阵 $N = N^T \in R^{9n \times 9n}, 0 < M_{ij} = M_{ij}^T \in R^{9n \times 9n}$, 有

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) N = 0. \quad (19)$$

由式(17)和(19)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c (\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) + \hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x)) \xi^T(t) \Delta_{ij} \xi(t) + \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) \xi^T(t) N \xi(t) = \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c (\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) - \Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2}) \xi^T(t) (\Delta_{ij} + N) \xi(t) + \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2} \xi^T(t) (\Delta_{ij} + N) \xi(t) + \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x) \xi^T(t) \Delta_{ij} \xi(t) = \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c (\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) - \Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2}) \xi^T(t) (\Delta_{ij} + N + M_{ij} - \\ &M_{ij}) \xi(t) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2} \xi^T(t) (\Delta_{ij} + N) \xi(t) + \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x) \xi^T(t) \Delta_{ij} \xi(t) \leq \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x) \xi^T(t) \Delta_{ij} \xi(t) + \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2} \xi^T(t) (\Delta_{ij} + N) \xi(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c (\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) - \Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2}) \xi^T(t) (\Delta_{ij} + N - M_{ij}) \times \\ &\xi(t) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c (\Delta \bar{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x) - \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}) \xi^T(t) M_{ij} \xi(t). \end{aligned} \quad (20)$$

将 $\hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x)$ 按式(18)在式(20)中展开,得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{l=1}^k \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_\eta=1}^2 \prod_{r=1}^{\eta} \nu_{r i_r l}(x_r) \xi^T(t) \times \\ &[\Delta \bar{\lambda}_{ij}^{\tau_2} - \Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2}] M_{ij} + \Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2} N + \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c (\hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x_{i_1 i_2 \dots i_\eta l}) + \Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2}) \Delta_{ij} \xi(t) + \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c (\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}(x) - \Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2}) \xi^T(t) \times \\ &(\Delta_{ij} + N - M_{ij}) \xi(t). \end{aligned}$$

如果LMIs(7), (8)成立,则有 $\dot{V}(t) < 0$, 此时,系统(5)是全局渐近稳定的. □

2.2 前提不匹配的控制器设计

在定理1的基础上,本小节给出基于前提不匹配策略的模糊状态反馈控制器的设计方法.

定理2 对于给定时滞 $\tau_1, \tau_2 (> 0)$ 和参数 ε , 闭环系统(5)是渐近稳定的,若存在以下矩阵 $0 < \tilde{P}_1 = \tilde{P}_1^T \in R^{4n \times 4n}, 0 < \tilde{P}_2 = \tilde{P}_2^T \in R^{4n \times 4n}, 0 < \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1^T \in R^{n \times n}, 0 < \tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_2^T \in R^{n \times n}, 0 < \tilde{S}_1 = \tilde{S}_1^T \in R^{n \times n}, 0 < \tilde{S}_2 = \tilde{S}_2^T \in R^{n \times n}, 0 < \tilde{R}_1 = \tilde{R}_1^T \in R^{n \times n}, 0 < \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2^T \in R^{n \times n}, 0 < \tilde{M}_{ij} = \tilde{M}_{ij}^T \in R^{10n \times 10n}, \tilde{N} = \tilde{N}^T \in R^{10n \times 10n}$ 及矩阵 $X \in R^{n \times n}, G_j \in R^{m \times n}$, 使如下的LMIs成立:

$$\begin{aligned} &\tilde{\Delta}_{ij} + \tilde{N} - \tilde{M}_{ij} < 0, \\ &\forall i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, c; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c ((\hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x_{i_1 i_2 \dots i_\eta l}) + \Delta \underline{\lambda}_{ij}^{\tau_2}) \tilde{\Delta}_{ij} + \\ &\Delta \lambda_{ij}^{\tau_2} \tilde{N} + (\Delta \bar{\lambda}_{ij}^{\tau_2} - \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}) \tilde{M}_{ij}) < 0, \\ &\forall i_1, \dots, i_\eta \in \{1, 2\}, l = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (22)$$

此时,控制器增益矩阵为 $K_j = G_j X^{-1}, j = 1, 2, \dots, c$. 其中 $\hat{\lambda}_{ij}^{\tau_2}(x), \Delta \lambda_{ij}^{\tau_2}$ 和 $\Delta \bar{\lambda}_{ij}^{\tau_2}$ 定义同定理1,其他矩阵定义如下:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{ij} &= \text{Sym}\{\tilde{\Sigma}_1^T \tilde{P}_1 \tilde{\Sigma}_2 + \tilde{\Sigma}_3^T \tilde{P}_2 \tilde{\Sigma}_4\} + \\ &\tilde{e}_1^T (\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2) \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2^T \tilde{Q}_1 \tilde{e}_2 - \tilde{e}_3^T \tilde{Q}_2 \tilde{e}_3 + \\ &\tau_1^2 \tilde{e}_{10}^T \tilde{S}_1 \tilde{e}_{10} + \tau_2^2 \tilde{e}_{10}^T \tilde{S}_2 \tilde{e}_{10} - \\ &\tilde{\Sigma}_5^T \tilde{S}_1 \tilde{\Sigma}_5 - 3 \tilde{\Sigma}_6^T \tilde{S}_1 \tilde{\Sigma}_6 - 5 \tilde{\Sigma}_7^T \tilde{S}_1 \tilde{\Sigma}_7 - \\ &\tilde{\Sigma}_8^T \tilde{S}_2 \tilde{\Sigma}_8 - 3 \tilde{\Sigma}_9^T \tilde{S}_2 \tilde{\Sigma}_9 - 5 \tilde{\Sigma}_{10}^T \tilde{S}_2 \tilde{\Sigma}_{10} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tau_1^2}{2} \tilde{e}_{10}^T \tilde{R}_1 \tilde{e}_{10} - 2 \tilde{\Sigma}_{11}^T \tilde{R}_1 \tilde{\Sigma}_{11} - 4 \tilde{\Sigma}_{12}^T \tilde{R}_1 \tilde{\Sigma}_{12} - \\
 & 6 \tilde{\Sigma}_{13}^T \tilde{R}_1 \tilde{\Sigma}_{13} + \frac{\tau_2^2}{2} \tilde{e}_{10}^T \tilde{R}_2 \tilde{e}_{10} - 2 \tilde{\Sigma}_{14}^T \tilde{R}_2 \tilde{\Sigma}_{14} - \\
 & 4 \tilde{\Sigma}_{15}^T \tilde{R}_2 \tilde{\Sigma}_{15} - 6 \tilde{\Sigma}_{16}^T \tilde{R}_2 \tilde{\Sigma}_{16} + \\
 & \text{Sym}\{(\tilde{e}_1^T + \varepsilon \tilde{e}_{10}^T)(\mathbf{A}_i \mathbf{X} \tilde{e}_1 + \mathbf{A}_{di} \mathbf{X} \tilde{e}_2 + \\
 & \mathbf{B}_{di} \mathbf{G}_j \tilde{e}_3 - \mathbf{X} \tilde{e}_{10})\}, \quad (23) \\
 \tilde{\Sigma}_1 &= [\tilde{e}_1^T \ \tilde{e}_4^T \ \tilde{e}_6^T \ \tilde{e}_8^T]^T, \\
 \tilde{\Sigma}_2 &= \left[\tilde{e}_{10}^T \ \tilde{e}_1^T - \tilde{e}_2^T \ \tau_1 \tilde{e}_1^T - \tilde{e}_4^T \ \frac{\tau_1^2}{2} \tilde{e}_1^T - \tilde{e}_6^T \right]^T, \\
 \tilde{\Sigma}_3 &= [\tilde{e}_1^T \ \tilde{e}_5^T \ \tilde{e}_7^T \ \tilde{e}_9^T]^T, \\
 \tilde{\Sigma}_4 &= \left[\tilde{e}_{10}^T \ \tilde{e}_1^T - \tilde{e}_3^T \ \tau_2 \tilde{e}_1^T - \tilde{e}_5^T \ \frac{\tau_2^2}{2} \tilde{e}_1^T - \tilde{e}_7^T \right]^T, \\
 \tilde{\Sigma}_5 &= \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2, \quad \tilde{\Sigma}_6 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 - \frac{2}{\tau_1} \tilde{e}_4, \\
 \tilde{\Sigma}_7 &= \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 + \frac{6}{\tau_1} \tilde{e}_4 - \frac{12}{\tau_1^2} \tilde{e}_6, \\
 \tilde{\Sigma}_8 &= \tilde{e}_1 - \tilde{e}_3, \quad \tilde{\Sigma}_9 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_3 - \frac{2}{\tau_2} \tilde{e}_5, \\
 \tilde{\Sigma}_{10} &= \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 + \frac{6}{\tau_2} \tilde{e}_5 - \frac{12}{\tau_2^2} \tilde{e}_7, \\
 \tilde{\Sigma}_{11} &= \tilde{e}_1 - \frac{1}{\tau_1} \tilde{e}_4, \quad \tilde{\Sigma}_{12} = \tilde{e}_1 + \frac{2}{\tau_1} \tilde{e}_4 - \frac{6}{\tau_1^2} \tilde{e}_6, \\
 \tilde{\Sigma}_{13} &= \tilde{e}_1 - \frac{3}{\tau_1} \tilde{e}_4 + \frac{24}{\tau_1^2} \tilde{e}_6 - \frac{60}{\tau_1^3} \tilde{e}_8, \\
 \tilde{\Sigma}_{14} &= \tilde{e}_1 - \frac{1}{\tau_2} \tilde{e}_5, \quad \tilde{\Sigma}_{15} = \tilde{e}_1 + \frac{2}{\tau_2} \tilde{e}_5 - \frac{6}{\tau_2^2} \tilde{e}_7, \\
 \tilde{\Sigma}_{16} &= \tilde{e}_1 - \frac{3}{\tau_1} \tilde{e}_5 + \frac{24}{\tau_1^2} \tilde{e}_7 - \frac{60}{\tau_1^3} \tilde{e}_9, \\
 \tilde{e}_i &= [\mathbf{0}_{n \times (i-1)n} \ \mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n \times (10-i)n}], \quad i = 1, 2, \dots, 10.
 \end{aligned}$$

证明 定义矩阵

$$\begin{aligned}
 \tilde{\xi}(t) &= \\
 & \left[\mathbf{x}^T(t) \ \mathbf{x}^T(t - \tau_1) \ \mathbf{x}^T(t - \tau_2) \rightarrow \right. \\
 & \leftarrow \int_{t-\tau_1}^t \mathbf{x}^T(s) ds \ \int_{t-\tau_2}^t \mathbf{x}^T(s) ds \rightarrow \\
 & \leftarrow \int_{t-\tau_1}^t \int_u^t \mathbf{x}^T(s) ds du \ \int_{t-\tau_2}^t \int_u^t \mathbf{x}^T(s) ds du \rightarrow \\
 & \leftarrow \int_{t-\tau_1}^t \int_u^t \int_s^t \mathbf{x}^T(r) dr ds du \rightarrow \\
 & \left. \leftarrow \int_{t-\tau_2}^t \int_u^t \int_s^t \mathbf{x}^T(r) dr ds du \ \dot{\mathbf{x}}^T(t) \right]^T, \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi(t) &= [\mathbf{A}(t) \ \mathbf{A}_d(t) \ \mathbf{B}_d(t) \mathbf{K}(t) \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \rightarrow \\
 & \leftarrow \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ -\mathbf{I}]. \quad (25)
 \end{aligned}$$

在定理1证明的基础上,由式(17)和(24)可得到

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_j^2} \tilde{\xi}^T(t) \Delta \tilde{\xi}(t). \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \text{Sym}\{\tilde{\Sigma}_1^T \mathbf{P}_1 \tilde{\Sigma}_2 + \tilde{\Sigma}_3^T \mathbf{P}_2 \tilde{\Sigma}_4\} + \\
 & \tilde{e}_1^T (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2^T \mathbf{Q}_1 \tilde{e}_2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{e}_3^T \mathbf{Q}_2 \tilde{e}_3 + \tau_1^2 \tilde{e}_{10}^T \mathbf{S}_1 \tilde{e}_{10} + \tau_2^2 \tilde{e}_{10}^T \mathbf{S}_2 \tilde{e}_{10} - \\
 & \tilde{\Sigma}_5^T \mathbf{S}_1 \tilde{\Sigma}_5 - 3 \tilde{\Sigma}_6^T \mathbf{S}_1 \tilde{\Sigma}_6 - 5 \tilde{\Sigma}_7^T \mathbf{S}_1 \tilde{\Sigma}_7 - \\
 & \tilde{\Sigma}_8^T \mathbf{S}_2 \tilde{\Sigma}_8 - 3 \tilde{\Sigma}_9^T \mathbf{S}_2 \tilde{\Sigma}_9 - 5 \tilde{\Sigma}_{10}^T \mathbf{S}_2 \tilde{\Sigma}_{10} + \\
 & \frac{\tau_1^2}{2} \tilde{e}_{10}^T \mathbf{R}_1 \tilde{e}_{10} - 2 \tilde{\Sigma}_{11}^T \mathbf{R}_1 \tilde{\Sigma}_{11} - 4 \tilde{\Sigma}_{12}^T \mathbf{R}_1 \tilde{\Sigma}_{12} - \\
 & 6 \tilde{\Sigma}_{13}^T \mathbf{R}_1 \tilde{\Sigma}_{13} + \frac{\tau_2^2}{2} \tilde{e}_{10}^T \mathbf{R}_2 \tilde{e}_{10} - 2 \tilde{\Sigma}_{14}^T \mathbf{R}_2 \tilde{\Sigma}_{14} - \\
 & 4 \tilde{\Sigma}_{15}^T \mathbf{R}_2 \tilde{\Sigma}_{15} - 6 \tilde{\Sigma}_{16}^T \mathbf{R}_2 \tilde{\Sigma}_{16}.
 \end{aligned}$$

由式(24)和(25)得 $\Psi(t) \tilde{\xi}(t) = 0$, 运用引理3的命题1)和4)可知,闭环系统(5)是渐近稳定的,如果存在 $L \in \mathbf{R}^{10n \times 10n}$ 满足

$$\Delta + L\Psi(t) + \Psi^T(t)L^T < 0. \quad (27)$$

设矩阵

$$\begin{aligned}
 L &= [\mathbf{X}^{-T} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \varepsilon \mathbf{X}^{-T}]^T, \\
 \eta &= \text{diag}(\mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X}).
 \end{aligned}$$

其中: $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是任意可逆矩阵, ε 是调整参数. 在式(27)的左右两边分别乘以 η^T 及其转置,得

$$\eta^T (\Delta + L\Psi(t) + \Psi^T(t)L^T) \eta = \tilde{\Delta}_{ij}. \quad (28)$$

$\tilde{\Delta}_{ij}$ 定义于式(23), $\mathbf{G}_j = \mathbf{K}_j \mathbf{X}$, $j = 1, 2, \dots, c$, $\tilde{\mathbf{P}}_i = \text{diag}^T(\mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X}) \mathbf{P}_i \text{diag}(\mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X})$, $\tilde{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{X}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{S}}_i = \mathbf{X}^T \mathbf{S}_i \mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{R}}_i = \mathbf{X}^T \mathbf{R}_i \mathbf{X}$, $i = 1, 2$. 由式(28)可以得到

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j^{\tau_j^2} \tilde{\xi}^T(t) \tilde{\Delta}_{ij} \tilde{\xi}(t). \quad (29)$$

接下来的证明类似于定理1,这里不再赘述. □

当不存在输入时滞时,时滞系统(2)退变为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^p m_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)), \quad (30)$$

此时,闭环系统(5)变为

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c m_i h_j ((\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t) + \\
 & \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(t - \tau)). \quad (31)
 \end{aligned}$$

基于定理2很容易得出如下的推论.

推论1 给定时滞 $\tau > 0$ 和参数 ε , 闭环系统(31)是渐近稳定的,如果存在以下矩阵 $0 < \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}^T \in \mathbf{R}^{4n \times 4n}$, $0 < \hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}}^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $0 < \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}^T \in \mathbf{R}^{6n \times 6n}$, $0 < \hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $0 < \hat{\mathbf{M}}_{ij} = \hat{\mathbf{M}}_{ij}^T \in \mathbf{R}^{6n \times 6n}$, $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{N}}^T \in \mathbf{R}^{6n \times 6n}$ 以及任意矩阵 $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{G}}_j \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 使如下的LMIs成立:

$$\hat{\Delta}_{ij} + \hat{\mathbf{N}} - \hat{\mathbf{M}}_{ij} < 0,$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, c;$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c ((\hat{\lambda}_{ij}(x_{i_1 i_2 \dots i_n l}) + \Delta \lambda_{ij}) \hat{\Delta}_{ij} + \Delta \lambda_{ij} \hat{N} +$$

$$(\Delta \bar{\lambda}_{ij} - \Delta \lambda_{ij}) \hat{M}_{ij}) < 0,$$

$$\forall i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}, l = 1, 2, \dots, k.$$

此时,控制器增益矩阵为 $K_j = \hat{G}_j \hat{X}^{-1}, j = 1, 2, \dots, c$. 其中 $\lambda_{ij}(x) = m_i h_j$, 分段隶属函数

$$\hat{\lambda}_{ij}(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 \prod_{r=1}^n \nu_{r i_r l}(x_r) \lambda_{ij}(x_{i_1 \dots i_n l}),$$

$\Delta \lambda_{ij}$ 和 $\Delta \bar{\lambda}_{ij}$ 满足 $\Delta \lambda_{ij} \leq \Delta \lambda_{ij}(x) \leq \Delta \bar{\lambda}_{ij}$, 其他矩阵定义如下:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_{ij} = & \text{Sym}\{\hat{\Sigma}_1^T \hat{P} \hat{\Sigma}_2\} + \hat{e}_1^T \hat{Q} \hat{e}_1 - \hat{e}_2^T \hat{Q} \hat{e}_2 + \\ & \tau^2 \hat{e}_6^T \hat{S} \hat{e}_6 - \hat{\Sigma}_3^T \hat{S} \hat{\Sigma}_3 - 3 \hat{\Sigma}_4^T \hat{S} \hat{\Sigma}_4 - \\ & 5 \hat{\Sigma}_5^T \hat{S} \hat{\Sigma}_5 + \frac{\tau^2}{2} \hat{e}_6^T \hat{R} \hat{e}_6 - 2 \hat{\Sigma}_6^T \hat{R} \hat{\Sigma}_6 - \\ & 4 \hat{\Sigma}_7^T \hat{R} \hat{\Sigma}_7 - 6 \hat{\Sigma}_8^T \hat{R} \hat{\Sigma}_8 + \text{Sym}\{(\hat{e}_1^T + \varepsilon \hat{e}_6^T) \times \\ & (A_i X \hat{e}_1 + B_i G_j \hat{e}_1 + A_{di} X \hat{e}_2 - X \hat{e}_6)\}. \end{aligned}$$

$$\hat{\Sigma}_1 = [\hat{e}_1^T \ \hat{e}_3^T \ \hat{e}_4^T \ \hat{e}_5^T]^T,$$

$$\hat{\Sigma}_2 = \left[\hat{e}_6^T \ \hat{e}_1^T - \hat{e}_2^T \ \tau \hat{e}_1^T - \hat{e}_3^T \ \frac{\tau^2}{2} \hat{e}_1^T - \hat{e}_4^T \right]^T,$$

$$\hat{\Sigma}_3 = \hat{e}_1 - \hat{e}_2, \ \hat{\Sigma}_4 = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \frac{2}{\tau} \hat{e}_3,$$

$$\hat{\Sigma}_5 = \hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \frac{6}{\tau} \hat{e}_3 - \frac{12}{\tau^2} \hat{e}_4,$$

$$\hat{\Sigma}_6 = \hat{e}_1 - \frac{1}{\tau} \hat{e}_3, \ \hat{\Sigma}_7 = \hat{e}_1 + \frac{2}{\tau} \hat{e}_3 - \frac{6}{\tau^2} \hat{e}_4,$$

$$\hat{\Sigma}_8 = \hat{e}_1 - \frac{3}{\tau} \hat{e}_3 + \frac{24}{\tau^2} \hat{e}_4 - \frac{60}{\tau^3} \hat{e}_5,$$

$$\hat{e}_i = [0_{n \times (i-1)n} \ I_n \ 0_{n \times (6-i)n}], \ i = 1, 2, \dots, 6.$$

由定理2很容易证明推论1,此略.

3 数值仿真

本节将给出3个典型算例,并与已有文献的结果进行对比,以说明本文所提出方法的先进性.

例1 考虑文献[1,3,19-20]给出的具有时滞的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0.5(1 - \sin^2(\theta(t)))x_2(t) - x_1(t - \tau_1) - \\ \quad (1 + \sin^2(\theta(t)))x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = \sin\left(|\theta(t)| - \frac{\pi}{2}\right)(0.9\cos^2(\theta(t)) - 1)x_1 \times \\ \quad (t - \tau_1) - x_2(t - \tau_1) - \\ \quad (0.9 + 0.1\cos^2(\theta(t)))x_2(t). \end{cases} \quad (32)$$

非线性系统(32)可以由 $u(t - \tau_2) = 0$ 及具有两个规则数目的T-S模糊模型(2)进行近似逼近.

Rule 1: If $\theta(t)$ is $\pm \frac{\pi}{2}$, Then

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_{d1} x(t - \tau_1);$$

Rule 2: If $\theta(t)$ is 0, Then

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + A_{d2} x(t - \tau_1).$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \ A_{d1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ A_{d2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}.$$

隶属度函数选取如下:

$$\begin{cases} m_1(x_1) = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x_1}{12}\right)}, \\ m_2(x_1) = 1 - m_1(x_1). \end{cases} \quad (33)$$

由式(33)可知,隶属度函数 $m_i(x_1) (i = 1, 2)$ 依赖于状态 x_1 . 根据式(6),定义分段隶属函数 $\hat{m}_i(x_1)$ 去近似 $m_i(x_1)$, 其中

$$\hat{m}_i(x_1) = \sum_{l=1}^k \sum_{i_1=1}^2 \nu_{i_1 l}(x_1) \hat{m}_i(x_{i_1 l}).$$

现将状态空间 $x_1(t) \in [-a, b]$ 分成 k 个子空间, a 和 b 是正实数,第 $l (l = 1, 2, \dots, k)$ 个子空间表示为

$$\left(\frac{a+b}{k}\right)\left(l - \frac{k}{2} - 1\right) \leq x_1 \leq \left(\frac{a+b}{k}\right)\left(l - \frac{k}{2}\right).$$

取

$$\nu_{11l}(x_1) = 1 - \frac{x_1 - x_{2l}}{x_{1l} - x_{2l}},$$

$$\nu_{12l}(x_1) = 1 - \nu_{11l}(x_1).$$

其中

$$x_{1l} = \left(\frac{a+b}{k}\right)\left(l - \frac{k}{2} - 1\right),$$

$$x_{2l} = \left(\frac{a+b}{k}\right)\left(l - \frac{k}{2}\right).$$

这里取 $a = b = 10, k$ 分别取为4、50和100. 进而,可以得到 Δm_i 的最大和最小值,如表1所示.

由定理1计算出保证系统(32)渐近稳定的最大允许时滞 $\tau_{1 \max}$, 并与文献[1,3,19-20]给出的结果进行比较. 由表2可以清楚地看到,由本文定理1得到的 $\tau_{1 \max}$ 是最大的,说明本文给出的稳定性准则比文献[1,3,19-20]提出的方法具有更小的保守性. 同时,在表2的最后一列给出了表明每种方法计算复杂度的所需变量个数. 由表2可以看到,本文需要的变量个数比文献[1]的变量个数少,说明本文提出的方法在保证具有较小保守性的同时兼顾了计算复杂度的问题. 此外,由表2可以看出,最大允许时滞伴随着状态空间分割数目 k 的变化而变化, k 越大,时滞上界越大.

表1 Δm_i 的最值(例1)

	Δm_i 的最小值	Δm_i 的最大值
$k = 4$	$\Delta m_1 = \Delta m_2 = -1.4851 \times 10^{-3}$	$\Delta \bar{m}_1 = \Delta \bar{m}_2 = 1.4851 \times 10^{-3}$
$k = 50$	$\Delta m_1 = \Delta m_2 = -1.1426 \times 10^{-5}$	$\Delta \bar{m}_1 = \Delta \bar{m}_2 = 1.1426 \times 10^{-5}$
$k = 100$	$\Delta m_1 = \Delta m_2 = -2.8733 \times 10^{-6}$	$\Delta \bar{m}_1 = \Delta \bar{m}_2 = 2.8733 \times 10^{-6}$

由分段隶属函数的定义可知, k 越大, 隶属度函数被分割的越精细, 因而可以考虑到更多的隶属度函数信息, 进而得到更为放松的稳定性结果. 同时, 这也进一步说明了隶属函数依赖分析法的有效性.

表2 不同方法得到的最大允许时滞 $\tau_{1 \max}$ (例1)

方法	$\tau_{1 \max}$	变量个数	
文献[3]($m = 4$)	1.777	23	
文献[19]	2.0689	206	
文献[20]($m = 4$)	2.53	291	
文献[1]	2.5932	860	
	$k = 4$	2.9459	612
本文定理1	$k = 50$	2.9511	612
	$k = 100$	2.9512	612

例2 考虑文献[21-23]给出的卡车拖车模型

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} x_1(t) - (1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} x_1(t-\tau) + \frac{v\bar{t}}{lt_0} u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} x_1(t) + (1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} x_1(t-\tau), \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{v\bar{t}}{t_0} \sin \left(x_2(t) + a \frac{v\bar{t}}{2L} x_1(t) + (1-a) \frac{v\bar{t}}{2L} x_1(t-\tau) \right). \end{aligned}$$

其中: $x_1(t)$ 为拖车与卡车角度, $x_2(t)$ 为拖车相对水平位置的角度, $x_3(t)$ 为拖车尾部垂直位移, $u(t)$ 为牵引导向角, 卡车长度 $l = 2.8$ m, 拖车长度 $L = 5.5$ m, 倒车速度 v 恒定且 $v = -1$ m/s, 滞后项系数 $a = 0.7$, $\bar{t} = 2.0$ s, $t_0 = 0.5$ s. 取

$$\theta(t) = x_2(t) + a \frac{v\bar{t}}{2L} x_1(t) + (1-a) \frac{v\bar{t}}{2L} x_1(t-\tau),$$

运用下面具有两条规则数目的T-S模糊模型(30)近似逼近上述非线性系统:

Rule 1: If $\theta(t)$ is 0 rad, Then

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}_1 x(t) + \mathbf{A}_{d1} x(t-\tau) + \mathbf{B}_1 u(t);$$

Rule 2: If $\theta(t)$ is $-\pi$ rad or π rad, Then

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}_2 x(t) + \mathbf{A}_{d2} x(t-\tau) + \mathbf{B}_2 u(t).$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{v^2 \bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{v\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{dv^2 \bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{dv\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{d1} = \begin{bmatrix} -(1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{v^2 \bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{d2} = \begin{bmatrix} -(1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{dv^2 \bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{v\bar{t}}{lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{v\bar{t}}{lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

隶属度函数选取同文献[22], 即

$$\begin{cases} m_1(x_1) = \left(1 - \frac{1}{1 + \exp \left(-3 \left(x_1 - \frac{1}{2} \pi \right) \right)} \right) \times \\ \left(\frac{1}{1 + \exp \left(-3 \left(x_1 + \frac{1}{2} \pi \right) \right)} \right), \\ m_2(x_1) = 1 - m_1(x_1). \end{cases}$$

基于前提不匹配技术, 设计如下具有两条规则数目的模糊状态反馈控制器:

Rule 1: If $\theta(t)$ is 0 rad, Then $u(t) = \mathbf{K}_1 x(t)$;

Rule 2: If $\theta(t)$ is $-\pi$ rad or π rad, Then $u(t) = \mathbf{K}_2 x(t)$.

模糊控制器的隶属度函数选择如下:

$$h_1(x_1) = \frac{1}{1 + \exp \left(-\frac{x_1}{2} \right)},$$

$$h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1).$$

根据例1, 首先计算出当 $k = 50$ 时的 $\Delta \lambda_{ij}$ ($i = 1, 2, j = 1, 2$) 的最大和最小值, 如表3所示.

表3 当 $k = 50$ 时, $\Delta \lambda_{ij}$ 的最值(例2)

$\Delta \lambda_{ij}$ 的最值	$k = 50$
最小值	$\Delta \lambda_{11} = \Delta \lambda_{12} = -9.8699 \times 10^{-3}$ $\Delta \lambda_{21} = \Delta \lambda_{22} = -1.1766 \times 10^{-2}$
最大值	$\Delta \bar{\lambda}_{11} = \Delta \bar{\lambda}_{12} = 1.2054 \times 10^{-2}$ $\Delta \bar{\lambda}_{21} = \Delta \bar{\lambda}_{22} = 1.0338 \times 10^{-2}$

文献[21-23]也研究了此系统, 表4列出了不同文献保证系统渐近稳定的最大允许时滞 τ_{\max} . 如表4所示, 本文得到的结果远大于文献[21-23]的结果, 说明本文推论1具有更小的保守性.

表4 不同方法得到的最大允许时滞 τ_{\max} (例2)

方法	文献[21]	文献[22]	文献[23]	推论1
τ_{\max}	5.8	8.1951	10.4653	100.1

特别地,取时滞 $\tau = 12$ 以及调整参数 $\varepsilon = 1.005$, 基于推论1,通过 Matlab LMIs 工具箱解得反馈增益

$$K_1 = [2.9381 \quad -7.3403 \quad 0.1792],$$

$$K_2 = [2.9393 \quad -7.3438 \quad 0.1792].$$

初始值取为 $\phi(0) = [0.5\pi \quad 0.75\pi \quad -5]^T$, 通过 Matlab 仿真得到描述卡车拖车模型的 T-S 模糊时滞闭环系统的状态响应如图2所示. 由仿真结果可以看出,闭环系统是渐近稳定的,说明本文推论1提出的前提不匹配的模糊控制器设计方法是有效的.

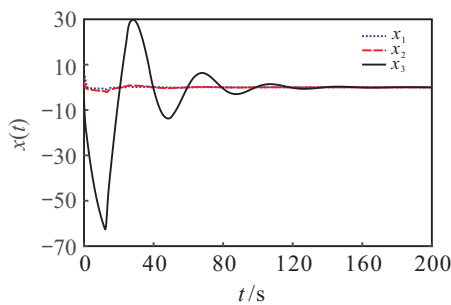


图2 闭环系统的状态响应

注4 由例2可以看出,本文所提出的方法得到了更放松的结果.此外,文献[21-23]设计的控制器需要与模糊模型分享相同的隶属度函数,然而本文所提出的方法不需要.在例2中,通过选择简单的隶属度函数以代替模糊模型中复杂的隶属度函数,降低了控制器执行的难度和设计的复杂度,提高了设计的灵活性.因此,本文所提出的方法具有更好的应用前景.

例3 为了进一步说明本文所提出的控制器设计方法的先进性,考虑文献[24-26]给出的非线性时滞系统:搅拌反应釜(CSTR)系统. CSTR系统由如下具有3个规则数目的 T-S 模糊模型(2)描述:

Rule 1: If $x_2(t)$ is 0.8862 (temperature is low), Then

$$\delta \dot{x}(t) = A_1 \delta x(t) + A_{d1} \delta x(t - \tau_1) + B_{d1} \delta u(t - \tau_2).$$

Rule 2: If $x_2(t)$ is 2.7520 (temperature is middle), Then

$$\delta \dot{x}(t) = A_2 \delta x(t) + A_{d2} \delta x(t - \tau_1) + B_{d2} \delta u(t - \tau_2).$$

Rule 3: If $x_2(t)$ is 4.7052 (temperature is high), Then

$$\delta \dot{x}(t) = A_3 \delta x(t) + A_{d3} \delta x(t - \tau_1) + B_{d3} \delta u(t - \tau_2).$$

其中 $\delta x(t) = x(t) - x_d$, $\delta x(t - \tau_1) = x(t - \tau_1) - x_d$, $\delta u(t - \tau_2) = u(t - \tau_2) - u_d$, (x_d, u_d) 是一个期望操作点,此外

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.4274 & 0.0757 \\ -1.4189 & -0.9442 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.0508 & 0.3958 \\ -6.4066 & 1.6168 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -4.5279 & 0.3167 \\ -26.2228 & 0.9837 \end{bmatrix},$$

$$B_{d1} = B_{d2} = B_{d3} = [0 \quad 0.3]^{-1},$$

$$A_{d1} = A_{d2} = A_{d3} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

隶属度函数选择同文献[24-26],即

$$m_1(x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 \leq 0.8862; \\ 1 - \frac{x_2 - 0.8862}{2.7520 - 0.8862}, & 0.8862 < x_2 < 2.752; \\ 0, & x_2 \geq 2.752; \end{cases}$$

$$m_2(x_2) = \begin{cases} 1 - m_1, & x_2 \leq 2.7520; \\ 1 - m_3, & x_2 \geq 2.7520; \end{cases}$$

$$m_3(x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 \leq 2.7520; \\ \frac{x_2 - 2.7520}{4.7052 - 2.7520}, & 2.7520 < x_2 < 4.7052; \\ 1, & x_2 \geq 4.7052. \end{cases}$$

基于前提不匹配策略,设计一个具有两个模糊规则数目的状态反馈控制器

Rule 1: If $x_2(t)$ is ψ_1^1 , Then $u(t) = K_1 x(t)$;

Rule 2: If $x_2(t)$ is ψ_1^2 , Then $u(t) = K_2 x(t)$.

模糊控制器的隶属度函数选择如下:

$$h_1(x_1) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x_1}{2}\right)}, \quad h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1).$$

根据例1,首先计算出当 $k = 50$ 时的 $\Delta \lambda_{ij}$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) 的最大和最小值,如表5所示.

表5 当 $k = 50$ 时, $\Delta \lambda_{ij}$ 的最值(例3)

$\Delta \lambda_{ij}$ 的最值	$k = 50$
最小值	$\Delta \lambda_{11} = -1.7268 \times 10^{-2}$
	$\Delta \lambda_{12} = -5.2473 \times 10^{-3}$
	$\Delta \lambda_{21} = -3.2737 \times 10^{-2}$
	$\Delta \lambda_{22} = -1.2614 \times 10^{-2}$
	$\Delta \lambda_{31} = -1.7249 \times 10^{-2}$
	$\Delta \lambda_{32} = -4.2537 \times 10^{-3}$
最大值	$\Delta \bar{\lambda}_{11} = 2.3386 \times 10^{-2}$
	$\Delta \bar{\lambda}_{12} = 1.2419 \times 10^{-2}$
	$\Delta \bar{\lambda}_{21} = 3.4728 \times 10^{-2}$
	$\Delta \bar{\lambda}_{22} = 9.2858 \times 10^{-3}$
	$\Delta \bar{\lambda}_{31} = 3.2988 \times 10^{-2}$
	$\Delta \bar{\lambda}_{32} = 3.4135 \times 10^{-3}$

在如下情况1和情况2中,分别将本文的结果与文献[24-26]的结果进行对比,以证明本文提出的控制器设计方法的先进性.

情况1 当 $\tau_2 \neq 0$ 时,此时系统同时含有状态时滞和输入时滞.由于文献[24-25]只考虑了状态时滞的情况,文献[24-25]的方法将失效,而文献[26]和本文定理2的方法适用.同文献[26],取 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.1, \varepsilon = 0.005$,基于定理2,使用Matlab LMIs工具箱求解得到状态反馈增益.表6列出了对应的状态反馈增益,显然定理2得到了更小的控制增益矩阵,说明本文方法获得了更放松的结果.

表6 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.1$ 时,反馈增益矩阵比较

方法	反馈增益矩阵
文献[26]	$K_1 = [-27.014 \ 1 \ 23.013 \ 2] = K_2 = K_3$
本文定理2	$K_1 = [0.091 \ 6 \ -2.243 \ 9], K_2 = [0.155 \ 5 \ -2.127 \ 1]$

取初始条件为 $\phi(0) = [0.8 \ -1.6]^T$,仿真得到闭环系统的状态轨迹如图3所示.随着时间的增长,状态轨迹都趋于零,则闭环系统是渐近稳定的,表明了本文定理2的控制器设计的有效性.

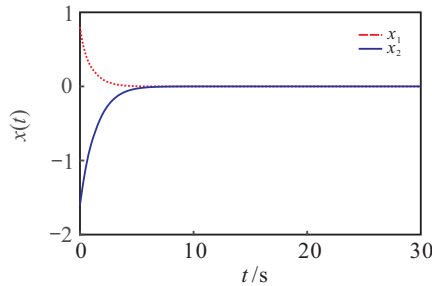


图3 闭环系统的状态响应($\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.1$)

情况2 当 $\tau_2 = 0$ 时,系统退变为只含状态时滞的模糊系统,同文献[24-25].取状态时滞 $\tau_1 = 5$ 及调整参数 $\varepsilon = 0.0035$,由推论1可以得到基于前提不匹配技术的状态反馈增益

$$K_1 = [31.410 \ 3 \ -12.775 \ 5],$$

$$K_2 = [2.853 \ 5 \ -0.050 \ 4].$$

取初始值为 $\phi(0) = [0.8 \ -1.6]^T$,仿真得到闭环系统的状态响应曲线如图4所示,闭环系统是渐近稳定的,进一步表明了推论1的控制器设计的有效性.

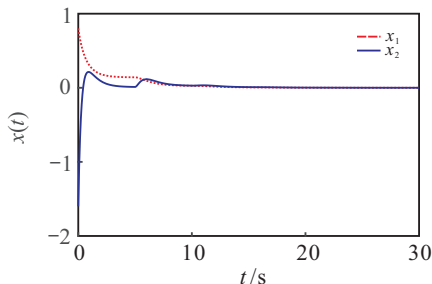


图4 闭环系统的状态响应($\tau_1 = 5, \tau_2 = 0$)

注5 对于例3中的CSTR系统,文献[24-26]的模糊状态反馈控制器都是基于PDC技术设计的,即要求控制器与模糊模型分享相同的隶属度函数和规则数目.但是,本文定理2提出的前提不匹配控制器的隶属度函数和规则数目可以任意选取.通过选择较为简单的隶属度函数和较少的规则数,能有效地降低控制器的设计复杂度和制造成本.

4 结 论

本文研究了同时含有状态时滞和输入时滞的T-S模糊系统的稳定性分析和控制器的设计问题.其主要贡献有以下3点:

1) 使用基于辅助函数的积分不等式和二重积分不等式处理L-K泛函导数中的积分项,得到了保守性较小的时滞依赖的稳定性条件.

2) 通过分段隶属度函数方法,充分考虑隶属度函数的边界信息,给出了更为放松的隶属度函数依赖的稳定性准则.

3) 基于前提不匹配技术,第1次提出了含状态和输入时滞的模糊系统的状态反馈控制器的设计方法.通过为模糊控制器选择更为简单的隶属度函数和较小的规则数目,有效地降低了控制器的设计复杂度.

在实际控制系统中,状态有可能不是完全可测的,因此,对于存在状态时滞和输入时滞的T-S模糊系统的输出反馈控制的研究很有价值,今后作者将在此方面作进一步研究.

参考文献(References)

- [1] Kwon O M, Park M J, Park J H, et al. Stability and stabilization of TS fuzzy systems with time-varying delays via augmented Lyapunov-Krasovskii functionals[J]. Information Sciences, 2016, 372(1): 1-15.
- [2] Gu K Q, Niculescu S I. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems[J]. J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2003, 125(2): 158-165.
- [3] Su X J, Zhou H Y, Song Y D. An optimal divisioning technique to stabilization synthesis of T-S fuzzy delayed systems[J]. IEEE Trans on Cybernetics, 2017, 47(5): 1147-1156.
- [4] Mahmoudabadi P, Shasadeghi M, Zarei J. New stability and stabilization conditions for nonlinear systems with time-varying delay based on delay-partitioning approach[J]. ISA Transactions, 2017, 70(1): 46-52.
- [5] Feng Z G, Zheng W X. Improved stability condition for Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delay[J]. IEEE Trans on Cybernetics, 2017, 47(3): 661-670.

- [6] Park M J, Kwon O M. Stability and stabilization of discrete-time T-S fuzzy systems with time-varying delay via cauchy-schwartz-based summation inequality[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2017, 25(1): 128-140.
- [7] 李艳辉,周秀杰,刘俊丽.基于T-S模糊模型的不确定时滞系统鲁棒滤波[J].控制与决策,2016,31(5): 895-900.
(Li Y H, Zhou X J, Liu J L. Robust filtering for uncertain time-delay systems based on T-S fuzzy model[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 895-900.)
- [8] Wang L K, Lam H K. A new approach to stability and stabilization analysis for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2018, 26(4): 2460-2465.
- [9] Choi H D, Ahn C K, Shi P, et al. Dynamic output-feedback dissipative control for T-S fuzzy systems with time-varying input delay and output constraints[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2017, 25(3): 511-526.
- [10] Yang J, Tong S C. Output-feedback control design for a class of switched stochastic nonlinear systems with input delay[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2017, 36(8): 3182-3205.
- [11] Lam H K, Leung F H F. Stability analysis of fuzzy-model-based control systems[M]. Berlin: Springer, 2011: 23-24.
- [12] 许嘉伟,周绍生.一类网络控制系统的不匹配控制器设计[J].杭州电子科技大学学报,2016,31(5): 46-50.
(Xu J W, Zhou S S. A control design for a class of networked control systems under imperfect matching[J]. J of Hangzhou Dianzi University, 2016, 31(5): 46-50.)
- [13] Zhao T, Dian S Y. State feedback control for interval type-2 fuzzy systems with time-varying delay and unreliable communication links[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2018, 26(2): 951-966.
- [14] Zhao T, Dian S Y. Delay-dependent stabilization of discrete-time interval type-2 T-S fuzzy systems with time-varying delay[J]. J of the Franklin Institute, 2017, 354(3): 1542-1567.
- [15] Park P G, Lee W I, Lee S Y. Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems[J]. J of the Franklin Institute, 2015, 352(4): 1378-1396.
- [16] Zhao N, Lin C, Chen B, et al. A new double integral inequality and application to stability test for time-delay systems[J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 65(1): 26-31.
- [17] Chen Y, Zheng W X. Exponential H_∞ filtering for stochastic Markovian jump systems with time delays[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2014, 24(4): 625-643.
- [18] Xie W B, Lim C C, Zhang J, et al. New approaches to observer design and stability analysis for T-S fuzzy system with multiplicative noise[J]. J of the Franklin Institute, 2017, 354(2): 887-901.
- [19] Yang F S, Guan S P, Wang D H. Quadratically convex combination approach to stability of T-S fuzzy systems with time-varying delay[J]. J of the Franklin Institute, 2014, 351(7): 3752-3765.
- [20] Luo W P, Yang J, Zhao X. Free-matrix-based integral inequality for stability analysis of uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2016, 14(4): 948-956.
- [21] Peng C, Fei M R. An improved result on the stability of uncertain T-S fuzzy systems with interval time-varying delay[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 212(1): 97-109.
- [22] Lian Z, He Y, Zhang C K, et al. Further robust stability analysis for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delay via relaxed integral inequality[J]. Information Sciences, 2017, 409(1): 139-150.
- [23] Zhao Y, Gao H J, Lam J, et al. Stability and stabilization of delayed T-S fuzzy systems: A delay partitioning approach[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17(4): 750-762.
- [24] Wang R J, Lin W W, Wang W J. Stabilizability of linear quadratic state feedback for uncertain fuzzy time-delay systems[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, 2004, 34(2): 1288-1292.
- [25] Teng L, Wang Y Y, Cai W J, et al. Fuzzy model predictive control of discrete systems with time-varying delay and disturbances[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2018, 26(3): 1192-1206.
- [26] Lien C H. Stabilization for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delays and bounded uncertainties[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 32(2): 645-652.

作者简介

周坤(1988—),男,博士生,从事模糊控制、时滞系统的研究, E-mail: 13488950521@163.com;

齐淑楠(1989—),女,助教,硕士,从事产业链协同支持技术的研究, E-mail: 18215528161@163.com;

黄天民(1958—),男,教授,博士生导师,从事智能控制、优化与决策等研究, E-mail: tmhuang@home.swjtu.edu.cn;

赵涛(1988—),男,副教授,博士,从事模糊控制及其应用等研究, E-mail: zhaotaozhaogang@126.com.

(责任编辑:孙艺红)