第 34 卷 第 9 期 控 制 与 决 策 Vol.34 No.9
2019 年 9 月 Control and Decision Sep. 2019

文章编号: 1001-0920(2019)09-1999-11 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.0115

权重信息完全未知的二维二元语义多属性群决策方法

王泽林[1], 王应明[1,2†]

(1. 福州大学 决策科学研究所，福州 350116；2. 福州大学
空间数据挖掘与信息共享教育部重点实验室，福州 350116)

摘　要: 针对群决策问题中专家权重和属性权重均未知的情形,提出一种基于二维二元语义表示模型的多属性群决策方法. 首先,考虑到不同决策者对二维二元语义信息中第一维信息和第二维信息的相对重要性比重不同,提出一种能够反映出该比重变化对于二维二元语义间比较和距离测度影响的得分函数和距离公式;其次,利用得分函数和距离公式建立目标函数,依据专家意见的熵值确立约束条件,进而构建能够同时求解出专家权重和属性权重的双权重求解模型,再分别针对不同的方案依次进行求解,得到每一个方案假定为最优方案时相应的权重信息;再次,按照所提出的新方法,综合目标函数值的大小对方案进行排序与择优;最后,通过案例分析与对比验证所提方法的有效性和科学性.

关键词: 多属性；群决策；得分函数；距离公式；权重；二维二元语义

中图分类号: C934　　**文献标志码:** A

A method for multiple attribute group decision making with complete unknown weight information based on 2-dimension 2-tuple linguistic information

WANG Ze-lin[1], *WANG Ying-ming*[1,2†]

(1. Decision Sciences Institute，Fuzhou University，Fuzhou 350116，China；2. Key Laboratory of Spatial Data Mining & Information Sharing of Ministry of Education，Fuzhou University，Fuzhou 350116，China)

Abstract: Aiming at the situation that the weights of decision makers and criteria are both unknown in group decision making progress, we propose a liner method of multi-attribute decision making based on 2-dimension 2-tuple linguistic representation model. Considering the relative importance of the first dimensional information and the second dimensional information of 2-dimension 2-tuple linguistic information, the score function and distance measures, which can reflect the impact of the change of the proportion of the relative importance on the score function for comparing two 2-dimension 2-tuple linguistic information and distance measures between them, are proposed. Then, decision makers' weight and criteria weight are solved simultaneously by constructing a model that the objective function is set up based on the score function and distance measures, and constraint conditions are established based on the entropy value of decision makers. Furthermore, the corresponding weights information which makes each alternative optimal is obtained by solving different models, then the optimal alternative and rank alternatives are chosen according to the value of the objective function. Finally, the case analysis and comparison verify the effectiveness and scientificalness of the proposed method.

Keywords: multiple attributes；group decision making；score function；distance formula；weights；2-dimension 2-tuple linguistic information

0　引　言

在实际的多属性群决策过程中,由于人类思维的模糊性以及决策事物本身的复杂性,导致了专家们在对方案的属性进行评价时,往往倾向采用语言短语的形式去表达. 为了使表达更为贴近决策者的认知,Zaheh[1] 最先提出了用语义变量(如:好,很好,一般等)来表达评估信息. 随后,为了进一步对语言短语信息进行量化的同时避免信息丢失和扭曲,Herrera 等[2] 提出了二元语义的分析方法. 正是由于二元语义在语言信息表达上的优势,近年来许多学者也纷纷展开了一系列基于二元语义的多属性群决策方法研究[3-6]. 然而,单纯的二元语义表示法仅考虑到对事

收稿日期: 2018-01-22；**修回日期:** 2018-07-22.
基金项目: 国家自然科学基金项目(71371053, 61773123).
责任编委: 黄敏.
†通讯作者. E-mail: msymwang@hotmail.com.

物本身的评价,而没有涉及到评价的确定性程度,这在某种程度上导致了初始决策信息的不准确. 对此,朱卫东等[7] 在传统二元语义表示法的基础上增加了一维表示专家判断准确性程度的第二维语言信息,使得利用二元语义形式表达评价信息时更加直观准确. 目前,已有不少关于二维语言多属性决策方法的研究. 例如,张晨等[8] 利用证据推理原理,构建了二维识别框架以反映决策者的知识和行为特性; Liu[9] 将二维语言信息扩展为二维不确定语言信息,并据此提出一种二维语言多属性群决策方法; Yu 等[10] 将二维语言转化为三角模糊数,并提出了二维语言加权算子和二维语言有序加权算子,以利于决策过程中二维语言信息的集结; Liu 等[11] 研究了依赖型集结算子及其在二维语言群决策中的应用,随后 Liu 等[12] 对二维语言算子进行了进一步的研究,提出了二维不确定语言几何算子和二维不确定语言几何加权算子,进而又提出了二维不确定语言混合加权平均算子[13] 等用于二维语言多属性群决策的信息集结; Zhu 等[14] 为了使二维语言信息更易于理解,提出了一种格蕴涵代数用于二维二元语义的表达和运算.

上述方法为更好地表达语言信息,以及处理语言信息表达中增加的第二维语言信息提供了新的视角与思路,但目前的研究多是侧重于量化二维语言信息或是针对二维语言算子的研究,未能真正考虑到二维语言信息本身的模糊性以及应用于多属性群决策时如何正确处理两个不同维度的语言评价信息等问题. 因此,二维语言信息的拓展与处理方法及其在多属性群决策问题中的应用值得进一步的研究与探讨. 对于多属性群决策而言,决策信息的集结尤为关键. 目前,对于不确定语言决策的权重研究已有一些成果[15-20]: 卫贵武[15] 考虑了属性权重未知时的二元语义群决策; 丁勇等[16] 研究了专家权重已知情况下的属性权重问题; 耿秀丽等[17] 关注了属性权重已知下的双层专家权重问题; 张娜等[18] 提出了专家权重和属性权重均未知情况下的区间二元语义决策问题; 徐选华等[19] 探讨了属性权重已知下的聚集内部的决策成员的权重问题; 郝晶晶等[20] 探寻了阶段权重和各阶段下属性权重的具体表现. 值得关注的是,文献[15-17, 19] 仅考虑了专家权重未知或属性权重未知的多属性决策问题,文献[18, 20] 虽然研究了专家权重和属性权重均未知的情形,利用求解出的权重信息获得最优方案,但用二维语言表示的初始信息中,没有考虑到语言评价的准确性问题. 然而,现实情况是,在管理学、经济学和行为科学等实际应用中,常会遇到属性权重信息和专家权重信息完全未知,且属性值以二维二元语义表达的情形. 对于这个问题,目前还没有相关的文献对此展开研究. 因此,对于权重信息完全未知的二维二元语义多属性群决策方法的研究具有较强的理论意义和实用价值.

基于上述问题,本文提出一种权重信息完全未知的二维二元语义多属性群决策方法. 首先,考虑到不同维度信息的相对重要性,提出一种新的二维二元语义比较方法和二维二元语义距离公式; 然后,在此基础上建立目标函数,将选择不同专家意见所产生的熵值作为约束条件,依次求出各方案为最优方案下相对应的权重信息,再根据各模型对应的目标函数值的大小对方案进行排序和择优,关注最优方案的同时也关注非最优方案; 最后,通过实例分析验证所提方法的有效性和可行性.

1 预备知识

二元语义表示模型是西班牙教授 Herrera 等[2] 提出的一种信息处理方法,可以有效地避免信息的扭曲和丢失. 随后,朱卫东等[7] 为了更好地用语言信息的形式表述决策属性,在二元语义的基础上增加了一维信息,以更为全面、完整地表述专家意见. 下面给出二元语义及二维二元语义的相关定义.

1.1 二元语义模型

定义 1 [1] 设 $S=\{S_0,S_1,\cdots,S_g\}$, $S_i\in S$, 是一个语言短语,则相应的语言短语形式可通过下面的函数 ϕ 获得:

$$\phi: S\rightarrow S\times[-0.5,0.5), \tag{1}$$

$$\phi(S_i)=(S_i,0),\ S_i\in S. \tag{2}$$

定义 2 [1] 设 $\beta\in[0,g]$ 为语言短语评价集 $S=\{S_0,S_1,\cdots,S_g\}$ 经某集结运算得到的实数,则 β 可由如下的函数 $\varDelta$ 表示为二元语义信息:

$$\varDelta:[0,g]\rightarrow S\times[-0.5,0.5); \tag{3}$$

$$\varDelta(\beta)=\begin{cases}S_i,\ i=\mathrm{round}(\beta);\\ \alpha_i=\beta-i,\ \alpha_i\in[-0.5,0.5).\end{cases} \tag{4}$$

其中 round 为四舍五入取整算子.

定义 3 [1] 设 $S=\{S_0,S_1,\cdots,S_g\}$, $S_i\in S$, $\alpha_i\in[-0.5,0.5)$, (S_i,α_i) 是一个二元语义,则存在一个逆函数 $\varDelta^{-1}$ 使其转换成相对应的实数 $\beta\in[0,g]$,即

$$\varDelta^{-1}:S\times[-0.5,0.5)\rightarrow[0,g], \tag{5}$$

$$\varDelta^{-1}(S_i,\alpha_i)=i+\alpha_i=\beta. \tag{6}$$

定义 4 [1] 设 (S_i,α_i) 和 (S_j,α_j) 为两个二元语

义,则当$i > j$时,$(S_i,\alpha_i) > (S_j,\alpha_j)$;当$i < j$时,$(S_i,\alpha_i) < (S_j,\alpha_j)$;当$i = j$时,若$\alpha_i > \alpha_j$,则$(S_i,\alpha_i) > (S_j,\alpha_j)$,若$\alpha_i < \alpha_j$,则$(S_i,\alpha_i) < (S_j,\alpha_j)$,若$\alpha_i = \alpha_j$,则$(S_i,\alpha_i) = (S_j,\alpha_j)$.

1.2 二维二元语义模型

二维二元语义相比传统的二元语义,采用了两个维度的信息,更为全面地表达对于事物的判断. 第一维二元语义表示对事物本身的评价,第二维二元语义表达了对第一个维度信息的确定性程度,如: $\tilde{S} = (S_4, S_3^*)$表示专家有比较充分的理由给出对于事物较好的评价. 其中: $S_4 \in S, S = \{S_0 =$ 很差$, S_1 =$ 差$, S_2 =$ 较差$, S_3 =$ 一般$, S_4 =$ 较好$, S_5 =$ 好$, S_6 =$ 很好$\}$,表示对于事物本身的评价集合; $S_3^* \in S^*, S^* = \{S_0^* =$ 很贫乏$, S_1^* =$ 比较贫乏$, S_2^* =$ 一般$, S_3^* =$ 比较充分$, S_4^* =$ 很充分$\}$,表示对于事物评价的确定性程度集合. 下面给出二维二元语义的相关定义.

定义5[7] 设$S = \{S_0, S_1, \cdots, S_{h_1}\}$,用以表示第一维语言信息评价的集合. $S^* = \{S_0^*, S_1^*, \cdots, S_{h_2}^*\}$,用以表示第二维语言信息评价的集合, $S_{i_t} \in S, S_{j_t}^* \in S^*$. $\tilde{S}_t = ((S_{i_t}, \alpha_{i_t}), (S_{j_t}^*, \alpha_{j_t}^*))$表示一个二维二元语义信息,其中$\alpha_{i_t} \in [-0.5, 0.5), \alpha_{j_t}^* \in [-0.5, 0.5)$. 特别地,当$\alpha_{i_t} = \alpha_{j_t}^* = 0$时, $\tilde{S}_t$简记为$(S_{i_t}, S_{j_t}^*)$.

定义6[14] 设$\tilde{S}_{t_1} = ((S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}), (S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*))$, $\tilde{S}_{t_2} = ((S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}}), (S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)), \cdots, \tilde{S}_{t_n} = ((S_{i_{t_n}}, \alpha_{i_{t_n}}), (S_{j_{t_n}}^*, \alpha_{j_{t_n}}^*))$为一组二维二元语义, $\omega_t = (\omega_{t_1}, \omega_{t_2}, \cdots, \omega_{t_n})^{\mathrm{T}}$为其对应的权重向量,则二维二元语义加权平均算子为

$$\mathrm{2DLWAA}(\tilde{S}_{t_1}, \tilde{S}_{t_2}, \cdots, \tilde{S}_{t_n}) = \Delta\Big(\sum_{q=1}^{n} \omega_{t_q} \Delta^{-1}(S_{i_{t_q}}, \alpha_{i_{t_q}}), \sum_{q=1}^{n} \omega_{t_q} \Delta^{-1}(S_{j_{t_q}}^* + \alpha_{j_{t_q}}^*)\Big). \tag{7}$$

2 权重信息未知的二维二元语义群决策方法

本文提出了新的二维二元语义的比较方法和距离公式,并在此基础上构建出能够同时求解出专家权重和属性权重的模型. 该模型依次假设每个方案都能成为最优方案,分别得到相应的权重信息,综合目标函数值的大小对方案进行排序与择优.

2.1 二维二元语义的比较

设$\tilde{S}_{t_1} = ((S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}), (S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*))$和$\tilde{S}_{t_2} = ((S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}}), (S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*))$为两个二维二元语义,当$\Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) = \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)$时,若$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) > \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}})$,则$\tilde{S}_{t_1} \succ \tilde{S}_{t_2}$;当$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) = \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}})$时,若$\Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) > \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)$,则$\tilde{S}_{t_1} \succ \tilde{S}_{t_2}$;当$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) > \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}})$且$\Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) > \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)$时,则$\tilde{S}_{t_1} \succ \tilde{S}_{t_2}$.

然而,当$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) > \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}})$且$\Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) < \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)$时,二维二元语义的优劣不易比较,如: $((S_5, -0.4), (S_4^*, 0))$和$((S_5, 0), (S_4^*, -0.4))$,虽然在对事物的评价上第一维信息$(S_5, 0)$优于$(S_5, -0.4)$,但专家的确信程度却是第二维信息$(S_5, 0)$的确信程度要低于$(S_5, -0.4)$的确信程度. 对此,现有研究[10-12,14,21]给出了不同的比较方法.

定义7 设$\tilde{S}_{t_1} = ((S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}), (S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*))$和$\tilde{S}_{t_2} = ((S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}}), (S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*))$为两个二维二元语义,则其比较规则如下:

若$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) > \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}})$,则$\tilde{S}_{t_1} \succ \tilde{S}_{t_2}$.

若$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) = \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}})$,则

1) 若$\Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) > \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)$,则$\tilde{S}_{t_1} \succ \tilde{S}_{t_2}$;

2) 若$\Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) < \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)$,则$\tilde{S}_{t_1} \prec \tilde{S}_{t_2}$;

3) 若$\Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) = \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)$,则$\tilde{S}_{t_1} \sim \tilde{S}_{t_2}$.

定义8[11] 设$\tilde{S}_t = ((S_{i_t}, \alpha_{i_t}), (S_{j_t}^*, \alpha_{j_t}^*))$为一个二维二元语义,则它的期望值为

$$\mathrm{E}(\tilde{S}_t) = (\Delta^{-1}(S_{i_t}, \alpha_{i_t}) + 1)/(h_1 + 1) \times (\Delta^{-1}(S_{j_t}^*, \alpha_{j_t}^*) + 1)/(h_2 + 1). \tag{8}$$

定义9[12] 设$\tilde{S}_t = ((S_{i_t}, \alpha_{i_t}), (S_{j_t}^*, \alpha_{j_t}^*))$为一个二维二元语义,则它的期望值为

$$\mathrm{E}(\tilde{S}_t) = \Delta^{-1}(S_{i_t}, \alpha_{i_t})/h_1 \times \Delta^{-1}(S_{j_t}^*, \alpha_{j_t}^*)/h_2. \tag{9}$$

定义10[14] 设$\tilde{S}_{t_1} = ((S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}), (S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*))$和$\tilde{S}_{t_2} = ((S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}}), (S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*))$为两个二维二元语义,则其比较规则如下:

若$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) < \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}}), \Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) < \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)$,则$\tilde{S}_{t_1} \prec \tilde{S}_{t_2}$;

若$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) < \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}}), 0 < \Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) - \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*) < \delta$, δ为小于1的正实数,则$\tilde{S}_{t_1}$略微劣于$\tilde{S}_{t_2}$,记为$\tilde{S}_{t_1} \prec w\tilde{S}_{t_2}$;

若$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) = \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}}), \Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) = \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*)$,则$\tilde{S}_{t_1} \sim \tilde{S}_{t_2}$;

若$\Delta^{-1}(S_{i_{t_1}}, \alpha_{i_{t_1}}) < \Delta^{-1}(S_{i_{t_2}}, \alpha_{i_{t_2}}), \Delta^{-1}(S_{j_{t_2}}^*, \alpha_{j_{t_2}}^*) - \Delta^{-1}(S_{j_{t_1}}^*, \alpha_{j_{t_1}}^*) \geqslant \delta$, δ为小于1的正实数,则

$\tilde{S}_{t_1}$与$\tilde{S}_{t_2}$无法比较,记为$\tilde{S}_{t_1}\|\tilde{S}_{t_2}$.

定义11[21] 设$\tilde{S}_t=((S_{i_t},\alpha_{i_t}),(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t}))$为一个二维二元语义,$0\leqslant\varepsilon\leqslant0.01$,则其期望值为

$$\mathrm{E}(\tilde{S}_t)=[\varDelta^{-1}(S_{i_t},\alpha_{i_t})+\varepsilon]\times[\varDelta^{-1}(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t})+\varepsilon]. \tag{10}$$

上述关于二维二元语义比较的定义中,定义7过于重视第一维二元语义信息的大小,而忽视了第二维二元语义信息的作用. 定义8、定义9和定义11通过二维二元语义的期望值进行比较,期望值越大,则二维二元语义越优,而期望值的实质仅是利用简单的相乘,并不能显示出一二维语言信息互换时的差别. 定义10设置主观参数δ,存在无法比较二维二元语义大小的情况. 同时,这3类定义均没有考虑到不同维度信息重要性之间的差异. 本文为克服以上缺点,先对二维二元语义进行标准化,再提出一种新的比较方法和距离测度.

定义12 设$\tilde{S}_t=((S_{i_t},\alpha_{i_t}),(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t}))$为一个二维二元语义,则标准化后的表示为

$$N_{\tilde{S}_t}=(x_t,y_t). \tag{11}$$

其中:$x_t=(i_t+\alpha_{i_t})/h_1,\ y_t=(j_t+\alpha^*_{j_t})/h_2$.

定义13 设$\tilde{S}_t=((S_{i_t},\alpha_{i_t}),(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t}))$为一个二维二元语义,则$\tilde{S}_t$的得分函数$Q(\tilde{S}_t)$为

$$Q(\tilde{S}_t)=2\gamma x_t+2(1-\gamma)y_t-4\gamma(1-\gamma)x_ty_t, \tag{12}$$

其中γ为两个维度的信息重要性比例系数,且$0\leqslant\gamma\leqslant1$. 当$0.5<\gamma\leqslant1$时,表示决策者更为看重第一维的语言信息;当$0\leqslant\gamma<0.5$时,表示决策者更为看重第二维的语言信息;若无特殊要求,则取$\gamma=0.5$,表示不同维度的语言信息同等重要.

通过得分函数可比较任意两个二维二元语义$\tilde{S}_{t_1}$和$\tilde{S}_{t_2}$的优劣. 当$Q(\tilde{S}_{t_1})>Q(\tilde{S}_{t_2})$时,$\tilde{S}_{t_1}\succ\tilde{S}_{t_2}$;当$Q(\tilde{S}_{t_1})<Q(\tilde{S}_{t_2})$时,$\tilde{S}_{t_1}\prec\tilde{S}_{t_2}$;当$Q(\tilde{S}_{t_1})=Q(\tilde{S}_{t_2})$时,$\tilde{S}_{t_1}\sim\tilde{S}_{t_2}$.

可以证明二维二元语义的得分函数满足以下性质.

性质1 当$y_t<1/(2(1-\gamma))$,且$(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t})$相同时,$(S_{i_t},\alpha_{i_t})$越优,则$Q(\tilde{S}_t)$越大,即$\tilde{S}_t$越优. 特殊地,当$\gamma=0.5$且$(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t})$相同时,在任意的范围内,$(S_{i_t},\alpha_{i_t})$越优,则$\tilde{S}_t$越优.

证明 将得分函数$Q(\tilde{S}_t)$表示为$Q(x_t,y_t)$,则

$$Q_{x_t}(x_t,y_t)=2\gamma-4\gamma(1-\gamma)y_t.$$

当$y_t<1/(2(1-\gamma))$时,有$Q_{x_t}(x_t,y_t)>0$,此时$Q_{x_t}(x_t,y_t)$的值随着x_t的增大而增大,即(S_{i_t},α_{i_t})越优,则$\tilde{S}_t$越优. 当$\gamma=0.5$时,条件$y_t<1/(2(1-\gamma))$自然成立. □

性质2 当$x_t<1/2\gamma$,且(S_{i_t},α_{i_t})相同时,$(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t})$越优,则$Q(\tilde{S}_t)$越大,即$\tilde{S}_t$越优. 特殊地,当$\gamma=0.5$且$(S_{i_t},\alpha_{i_t})$相同时,在任意的范围内,$(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t})$越优,则$\tilde{S}_t$越优.

证明 将得分函数$Q(\tilde{S}_t)$表示为$Q(x_t,y_t)$,则

$$Q_{y_t}(x_t,y_t)=2(1-\gamma)-4\gamma(1-\gamma)x_t.$$

当$x_t<1/2\gamma$时,有$Q_{y_t}(x_t,y_t)>0$,此时$Q_{y_t}(x_t,y_t)$的值随着y_t的增大而增大,即$(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t})$越优,则$\tilde{S}_t$越优. 当$\gamma=0.5$时,条件$x_t<1/2\gamma$自然成立. □

性质3 当$0\leqslant\gamma<0.5$时,$Q(\tilde{S}_t)\in[0,2(1-\gamma)]$;当$\gamma=0.5$时,$Q(\tilde{S}_t)\in[0,1]$;当$0.5<\gamma\leqslant1$时,$Q(\tilde{S}_t)\in[0,2\gamma]$.

证明 将得分函数$Q(\tilde{S}_t)$表示为$Q(x_t,y_t)$,经分析后可以得知,$Q(x_t,y_t)$的最大值和最小值在极值处或边界处取得.

边界1: $y_t=0,0\leqslant x_t\leqslant1$,此时

$$Q(x_t,y_t)=2\gamma x_t.$$

边界2: $x_t=1,0\leqslant y_t\leqslant1$,此时

$$Q(x_t,y_t)=2\gamma+2(1-\gamma)y_t-4\gamma(1-\gamma)y_t.$$

边界3: $y_t=1,0\leqslant x_t\leqslant1$,此时

$$Q(x_t,y_t)=2\gamma x_t+2(1-\gamma)-4\gamma(1-\gamma)x_t.$$

边界4: $x_t=0,0\leqslant y_t\leqslant1$,此时

$$Q(x_t,y_t)=2(1-\gamma)y_t.$$

分别得到上述条件下对应的驻点,经整理后得知:当$0\leqslant\gamma<0.5$时

$$\max Q(x_t,y_t)=$$
$$\max\{2\gamma,4(\gamma-1/2)^2+1,2(1-\gamma)\},$$
$$\min Q(x_t,y_t)=\min\{0,2\gamma,4(\gamma-3/4)^2-7\};$$

当$\gamma=0.5$时

$$\max Q(x_t,y_t)=\max\{2\gamma,1,2(1-\gamma)\},$$
$$\min Q(x_t,y_t)=\min\{0,1\};$$

当$0.5<\gamma\leqslant1$时

$$\max Q(x_t,y_t)=$$
$$\max\{2\gamma,4(\gamma-3/4)^2-7,2(1-\gamma)\},$$
$$\min Q(x_t,y_t)=$$
$$\min\{0,4(\gamma-1/2)^2+1,2(1-\gamma)\}.$$

不同的γ取值下,经比较可得:当$0\leqslant\gamma<0.5$时

$$\max Q(x_t,y_t)=2(1-\gamma),$$
$$\min Q(x_t,y_t)=0;$$

当$\gamma=0.5$时

$$\max Q(x_t,y_t)=1,$$
$$\min Q(x_t,y_t)=0;$$

当$0.5<\gamma\leqslant 1$时

$$\max Q(x_t,y_t)=2\gamma,$$
$$\min Q(x_t,y_t)=0.$$

性质3得证. □

性质4 当$\gamma=1$或$\gamma=0$时,二维二元语义为一般的二元语义. 其中:$\gamma=1$时,第二维信息无效,$\gamma=0$时,第一维信息无效.

证明 将得分函数$Q(\tilde{S}_t)$表示为$Q(x_t,y_t)$,当$\gamma=1$时,$Q(x_t,y_t)=2x_t$,$\tilde{S}_t$的优劣完全由第一维的信息决定,此时其信息等价于一般的二元语义(S_{i_t},α_{i_t});当$\gamma=0$时,$Q(x_t,y_t)=2y_t$,$\tilde{S}_t$的优劣完全由第二维的信息决定,此时其信息等价于一般的二元语义$(S^*_{j_t},\alpha^*_{j_t})$. □

2.2 二维二元语义的距离

同二维二元语义的得分函数一样,为了表现出两个维度的信息重要性比例对距离的影响,设置同样的参数γ,给出二维二元语义的距离定义如下.

定义14 设$\tilde{S}_{t_1}=((S_{i_{t_1}},\alpha_{i_{t_1}}),(S^*_{j_{t_1}},\alpha^*_{j_{t_1}}))$和$\tilde{S}_{t_2}=((S_{i_{t_2}},\alpha_{i_{t_2}}),(S^*_{j_{t_2}},\alpha^*_{j_{t_2}}))$为两个二维二元语义,则它们之间的距离为

$$d(\tilde{S}_{t_1},\tilde{S}_{t_2})=\\(\gamma|x_{t_1}-x_{t_2}|^\lambda+(1-\gamma)|y_{t_1}-y_{t_2}|^\lambda)^{1/\lambda}. \tag{13}$$

其中:$N_{\tilde{S}_{t_1}}=(x_{t_1},y_{t_1})$,$N_{\tilde{S}_{t_2}}=(x_{t_2},y_{t_2})$,$\lambda>0$.

当$\lambda=1$时,式(13)为汉明距离,即

$$d_H(\tilde{S}_{t_1},\tilde{S}_{t_2})=\gamma|x_{t_1}-x_{t_2}|+(1-\gamma)|y_{t_1}-y_{t_2}|; \tag{14}$$

当$\lambda=2$时,式(13)为欧氏距离,即

$$d_O(\tilde{S}_{t_1},\tilde{S}_{t_2})=\\(\gamma|x_{t_1}-x_{t_2}|^2+(1-\gamma)|y_{t_1}-y_{t_2}|^2)^{1/2}. \tag{15}$$

性质5 $d(\tilde{S}_{t_1},\tilde{S}_{t_2})\in[0,1]$. 当且仅当$\tilde{S}_{t_1}=\tilde{S}_{t_2}$时,$d(\tilde{S}_{t_1},\tilde{S}_{t_2})=0$;当且仅当$\tilde{S}_{t_1}=(S_0,S^*_0)$,$\tilde{S}_{t_2}=(S_{h_1},S^*_{h_2})$时,$d(\tilde{S}_{t_1},\tilde{S}_{t_2})=1$.

性质6 设$\tilde{S}_{t^*}=(S_{h_1},S^*_{h_2})$,若$d(\tilde{S}_{t_1},\tilde{S}_{t^*})<d(\tilde{S}_{t_2},\tilde{S}_{t^*})$,则$\tilde{S}_{t_1}\succ\tilde{S}_{t_2}$.

2.3 基于二维二元语义的权重求解模型

2.3.1 问题描述

设决策者要从m个方案$A_1,\cdots,A_m$中选择最优方案并为方案排序. 考虑n个属性$C_1,\cdots,C_n$,参与评估的专家有l个$E_1,\cdots,E_l$. 假设专家$E_g(g=1,2,\cdots,l)$针对方案$A_p(p=1,2,\cdots,m)$的属性C_q $(q=1,2,\cdots,n)$给出的二维二元语义评价值为$\tilde{S}^g_{pq}=(S^g_{i_{pq}},S^{*g}_{j_{pq}})$,由此得到$l$个专家的二维二元语义评估矩阵为$X_g=(\tilde{S}^g_{pq})_{m\times n}$. 其中:专家权重记为$e=(e_1,\cdots,e_l)^{\mathrm{T}}$,属性权重记为$w=(w_1,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$,二者权重均未知.

2.3.2 决策模型

实际上,在专家权重和属性权重均未知的情况下,产生最优方案的可能性更大. 对此,本文提出一种方法,依次假设各方案为最优方案,然后建立相应的模型求解出对应的权重信息,通过目标函数值的大小确定最优方案,且在选择最优方案的同时也关注非最优方案的权重分配,以获取更多有用的决策信息.

在群决策的过程中,不仅需要得到最优方案,同时决策者希望专家意见能表现出较高的一致性,而信息熵可以用来衡量信息量的不确定性. 因此,本文给出熵值定义用以测度选择不同专家的信息确定性,即各专家给出的二维二元语义信息中,第二维信息的不确定性度量,该熵值越大表示专家意见的不确定性越大,赋予越小的权重. 下面给出相关定义.

定义15 选择专家E_g所产生的熵值,即完全依照专家E_g的评估来进行决策的信息不确定性的度量,定义为

$$E_{E_g}=-\frac{1}{\ln m}\cdot\sum_{p=1}^m\Big(\sum_{q=1}^n w_q\cdot\Delta^{-1}(S^{*g}_{j_{pq}})\Big/h_2\times\\ \ln\sum_{q=1}^n w_q\cdot\Delta^{-1}(S^{*g}_{j_{pq}})\Big/h_2\Big). \tag{16}$$

定义16 依据选择不同专家所产生的熵值,专家E_g应被分得的权重为

$$e_g=\frac{1/E_{E_g}}{\sum\limits_{g=1}^l 1/E_{E_g}}. \tag{17}$$

为了对所有的方案进行更为全面的分析,本文依次假设各方案为最优方案,分别建立相应的权重求解模型,求解得到各方案为最优方案的对应权重.

欧氏距离为最常用的距离度量方法,故本文采用欧氏距离度量不同二维二元语义之间的距离. 假设方案$A_p(p=1,2,\cdots,m)$为最优方案,以该方案综合得分值最大的同时,专家意见之间的一致性尽可能高为目标,构建模型M_1如下:

$$\max\ O_p=\sum_{g=1}^l\sum_{q=1}^n e^p_g w^p_q Q^g_{pq}-\\ \sum_{\substack{g_1,g_2=1\\ g_1\neq g_2}}^l\sum_{p=1}^m\sum_{q=1}^n d_O(\tilde{S}^{g_1}_{pq},\ \tilde{S}^{g_2}_{pq}).$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\ &\sum_{g=1}^{l} e_g^p = 1,\ \sum_{q=1}^{n} w_q^p = 1;\\
&\sum_{g=1}^{l}\sum_{q=1}^{n} e_g^p w_q^p Q_{pq}^g - \sum_{g=1}^{l}\sum_{q=1}^{n} e_g^p w_q^p Q_{p'q}^g > 0,\\
&\qquad\qquad p' = 1,2,\cdots,n,\ p' \neq p;\\
&e_g^p = \frac{1/E_{E_g^p}}{\sum\limits_{g=1}^{l} 1/E_{E_g^p}},\ g = 1,2,\cdots,l;\\
&e_g^p, w_q^p > 0,\ g = 1,2,\cdots,l,\ q = 1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

其中:上标p表示方案A_p作为最优方案时对应的含义,如e_g^p和w_q^p分别表示方案A_p为最优方案时专家E_g的权重和属性C_q的权重;Q_{pq}^g表示$\tilde{S}_{pq}^g$对应的得分值.

取$\gamma = 0.5$,利用Lingo 11.0求解模型M_1得,方案A_p为最优方案时对应的专家权重为$e^p = (e_1^p, \cdots, e_l^p)$,属性权重为$w^p = (w_1^p, \cdots, w_n^p)$. 此时,方案$A_p$的最大化综合评估值为

$$
\begin{aligned}
\max A_p = \Big(&\sum_{g=1}^{l}\sum_{q=1}^{n} e_g^p \cdot w_q^p \cdot \Delta^{-1}(S_{i_{pq}}^g),\\
&\sum_{g=1}^{l}\sum_{q=1}^{n} e_g^p \cdot w_q^p \cdot \Delta^{-1}(S_{j_{pq}}^{*g})\Big).
\end{aligned} \tag{18}
$$

定理1 若方案A_p为最优方案,则上述模型一定有解.

证明 当p的取值确定时,模型M_1为单目标规划问题,由约束条件可以看出,当方案A_p为最优方案时,模型可行域存在且有界. 根据最优解存在定理[22],若可行域有界,则线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优. 即,若方案A_p为最优方案,则上述模型一定有解. □

定理2 若上述模型无解,则说明该方案一定不是最优方案.

证明 定理2为定理1的逆否命题,因而成立. □

本文给出详细的求解步骤如下.

Step 1: 根据定义12,将矩阵$X_g = (\tilde{S}_{pq}^g)_{m\times n}$标准化为矩阵$\tilde{X}_g = (N_{\tilde{S}_{pq}^g})_{m\times n}$.

Step 2: 依次假设方案$A_p(p = 1,2,\cdots,m)$为最优方案,依据模型M_1构建模型M_2直至M_{m+1}等m个模型,并利用Lingo 11.0分别求解这m个模型,得到方案A_p为最优时对应的专家权重和属性权重以及O_p的值.

若这m个模型中至少有$m-1$个模型有解,则进行Step 3;否则,若仅模型$M_{p+1}(p = t_1, t_2, \cdots, t_l)$有解($l$表示这$m$个模型中有解模型的个数),则在备选方案集中去掉有解的方案$A_p(p = t_1, t_2, \cdots, t_l)$,此时的方案集为$\{A_p \,|\, p = 1, \cdots, m, 且\ p \neq t_1, \cdots, t_l\}$,依照Step 2的原理对新的模型再次进行求解,直至模型中至多有一个模型无解时停止.

Step 3: 依据模型的求解结果,由式(18)得到各方案最优时的最大综合评价值为$\max A_p$. 若根据每个方案的最大综合评价值进行选择,可得到一组方案的排序,$\max A_p$值对应的方案为最优方案;若同时考虑方案的最大化综合评价值和专家一致性,即根据O_p对方案进行择优,也可得到方案的排序,最大的O_p值对应的方案为最优方案.

Step 4: 根据决策的需要选择合适的标准对方案进行排序与择优. 若依据目标函数值O_p的大小对方案进行择优,则根据以下原则对方案进行排序:

1) 模型求解中有解的方案一定优于无解的方案;

2) 将有解的方案按照O_p的大小进行排序;

3) 前一次有解的方案一定大于后一次求解中有解的方案.

为了更好地说明本文的决策方法,给出决策流程和方案排序分别如图1和图2所示.

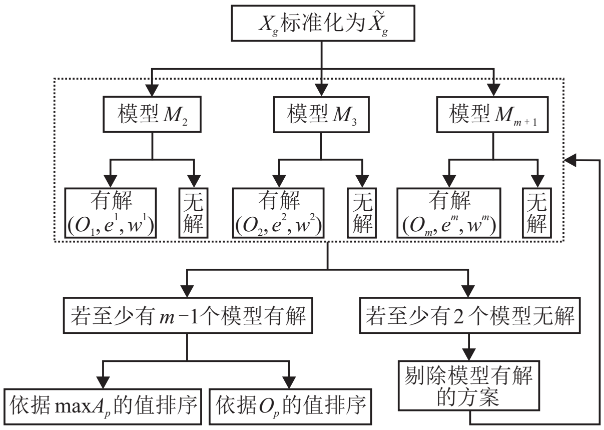

图1 决策流程

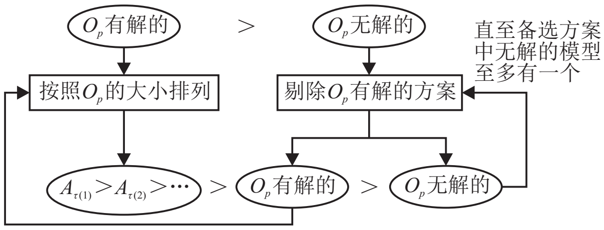

图2 方案排序

图2中:圆形代表方案集;$\{\tau(1), \tau(2), \cdots\}$是$\{1, 2, \cdots\}$的一种排列,使得$\max A_{\tau(1)} > \max A_{\tau(2)} > \cdots$.

3 算例分析

好的推荐系统可以满足用户的个性化需求,提高信息服务的质量,因而带来巨大的商业价值. 为了

进一步推动“互联网+”时代的发展,需要对现有的推荐系统作出准确的评估. 现邀请3个有关方面的专家E_1、E_2、E_3,对4个最具代表性的推荐系统A_1、A_2、A_3、A_4,分别从以下5个方面进行评估: 准确度C_1、覆盖率C_2、隐私管理C_3、时效性C_4、多样性和新颖性C_5. 评价等级的语言评价集为$S = \{S_0 =$ 很差$, S_1 =$ 差$, S_2 =$ 较差$, S_3 =$ 一般$, S_4 =$ 较好$, S_5 =$ 好$, S_6 =$ 很好$\}$,确信度的语言评价集为$S^* = \{S_0^* =$ 很贫乏$, S_1^* =$ 比较贫乏$, S_2^* =$ 一般$, S_3^* =$ 比较充分$, S_4^* =$ 很充分$\}$,其中属性权重和专家权重均未知. 3位专家就不同的推荐系统分别给出评估矩阵如表1～表3所示.

表 1　专家E_1给出的评估矩阵X_1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(S_5, S_3^*)	(S_4, S_2^*)	(S_3, S_2^*)	(S_5, S_2^*)	(S_4, S_1^*)
A_2	(S_4, S_2^*)	(S_5, S_3^*)	(S_5, S_2^*)	(S_3, S_2^*)	(S_3, S_3^*)
A_3	(S_4, S_3^*)	(S_4, S_2^*)	(S_4, S_2^*)	(S_3, S_1^*)	(S_5, S_3^*)
A_4	(S_5, S_2^*)	(S_4, S_1^*)	(S_3, S_3^*)	(S_3, S_2^*)	(S_2, S_3^*)

表 2　专家E_2给出的评估矩阵X_2

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(S_4, S_3^*)	(S_4, S_2^*)	(S_3, S_3^*)	(S_2, S_1^*)	(S_5, S_3^*)
A_2	(S_5, S_2^*)	(S_3, S_2^*)	(S_2, S_3^*)	(S_5, S_2^*)	(S_3, S_2^*)
A_3	(S_4, S_3^*)	(S_3, S_2^*)	(S_2, S_1^*)	(S_4, S_3^*)	(S_3, S_2^*)
A_4	(S_3, S_2^*)	(S_3, S_3^*)	(S_5, S_2^*)	(S_2, S_1^*)	(S_4, S_2^*)

表 3　专家E_3给出的评估矩阵X_3

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(S_5, S_3^*)	(S_5, S_2^*)	(S_4, S_3^*)	(S_3, S_2^*)	(S_3, S_2^*)
A_2	(S_3, S_3^*)	(S_4, S_3^*)	(S_4, S_3^*)	(S_3, S_1^*)	(S_4, S_2^*)
A_3	(S_4, S_2^*)	(S_5, S_3^*)	(S_3, S_1^*)	(S_3, S_2^*)	(S_3, S_3^*)
A_4	(S_4, S_3^*)	(S_3, S_2^*)	(S_3, S_2^*)	(S_5, S_1^*)	(S_3, S_3^*)

Step 1: 利用式(8)对矩阵X_1、X_2、X_3进行标准化,分别得到矩阵$\tilde{X}_1$、$\tilde{X}_2$、$\tilde{X}_3$,如表4～表6所示.

表 4　专家E_1给出的标准化后的评估矩阵$\tilde{X}_1$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(5/6, 3/4)	(4/6, 2/4)	(3/6, 2/4)	(5/6, 2/4)	(4/6, 1/4)
A_2	(4/6, 2/4)	(5/6, 3/4)	(5/6, 2/4)	(3/6, 2/4)	(3/6, 3/4)
A_3	(4/6, 3/4)	(4/6, 2/4)	(4/6, 2/4)	(3/6, 1/4)	(5/6, 3/4)
A_4	(5/6, 2/4)	(4/6, 1/4)	(3/6, 3/4)	(3/6, 2/4)	(2/6, 3/4)

表 5　专家E_2给出的标准化后的评估矩阵$\tilde{X}_2$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(4/6, 3/4)	(4/6, 2/4)	(3/6, 3/4)	(2/6, 1/4)	(5/6, 3/4)
A_2	(5/6, 2/4)	(3/6, 2/4)	(2/6, 3/4)	(5/6, 2/4)	(3/6, 2/4)
A_3	(4/6, 3/4)	(3/6, 2/4)	(2/6, 1/4)	(4/6, 3/4)	(3/6, 2/4)
A_4	(3/6, 2/4)	(3/6, 3/4)	(5/6, 2/4)	(2/6, 1/4)	(4/6, 2/4)

表 6　专家E_3给出的标准化后的评估矩阵$\tilde{X}_3$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(5/6, 3/4)	(5/6, 2/4)	(4/6, 3/4)	(3/6, 2/4)	(3/6, 2/4)
A_2	(3/6, 3/4)	(4/6, 3/4)	(4/6, 3/4)	(3/6, 1/4)	(4/6, 2/4)
A_3	(4/6, 2/4)	(5/6, 3/4)	(3/6, 1/4)	(3/6, 2/4)	(3/6, 3/4)
A_4	(4/6, 3/4)	(3/6, 2/4)	(3/6, 2/4)	(5/6, 1/4)	(3/6, 3/4)

Step 2: 假设方案A_1为最优方案,构建模型M_2如下:

$$\max\ O_1 = \sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5} e_g^1 w_q^1 Q_{1q}^g - \sum_{\substack{g_1,g_2=1\\ g_1\neq g_2}}^{3}\sum_{p=1}^{4}\sum_{q=1}^{5} d_O(\tilde{S}_{pq}^{g_1},\ \tilde{S}_{pq}^{g_2}).$$

$$\text{s.t.} \sum_{g=1}^{3} e_g^1 = 1,\ \sum_{q=1}^{5} w_q^1 = 1;$$
$$\sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5} e_g^1 w_q^1 Q_{1q}^g - \sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5} e_g^1 w_q^1 Q_{p'q}^g > 0,$$
$$p' = 2, 3, 4;$$
$$e_g^1 = \frac{1/E_{E_g^1}}{\sum_{p=1}^{4} 1/E_{E_g^p}},\ g = 1, 2, 3;$$
$$e_g^1, w_q^1 > 0,\ g = 1, 2, 3,\ q = 1, 2, \cdots, 5.$$

取$\gamma = 0.5$,利用Lingo 11.0求解模型M_2得

$$O_1 = 0.099\,1,$$
$$e_g^1 = (0.328\,9, 0.329\,3, 0.341\,8),$$
$$w_q^1 = (0.242\,9, 0.215\,0, 0.150\,4, 0.191\,2, 0.200\,5).$$

Step 3: 假设方案A_2为最优方案,构建模型M_3如下:

$$\max\ O_2 = \sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5} e_g^2 w_q^2 Q_{2q}^g - \sum_{\substack{g_1,g_2=1\\ g_1\neq g_2}}^{3}\sum_{p=1}^{4}\sum_{q=1}^{5} d_O(\tilde{S}_{pq}^{g_1},\ \tilde{S}_{pq}^{g_2}).$$

$$\text{s.t.} \sum_{g=1}^{3} e_g^2 = 1,\ \sum_{q=1}^{5} w_q^2 = 1;$$
$$\sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5} e_g^2 w_q^2 Q_{2q}^g - \sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5} e_g^2 w_q^2 Q_{p'q}^g > 0,$$
$$p' = 1, 3, 4;$$
$$e_g^2 = \frac{1/E_{E_g^2}}{\sum_{p=1}^{4} 1/E_{E_g^p}},\ g = 1, 2, 3;$$
$$e_g^2, w_q^2 > 0,\ g = 1, 2, 3,\ q = 1, \cdots, 5.$$

取 $\gamma=0.5$,利用Lingo 11.0 求解模型 M_3 得

$O_2=0.105\,5$,

$e_g^2=(0.329\,1,0.330\,0,0.340\,9)$,

$w_q^2=(0.192\,1,0.241\,5,0.178\,5,0.207\,9,0.180\,0)$.

Step 4: 假设方案 A_3 为最优方案,构建模型 M_4 如下:

$$\max\ O_3=\sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5}e_g^3w_q^3Q_{3q}^g-\sum_{\substack{g_1,g_2=1\\ g_1\neq g_2}}^{3}\sum_{p=1}^{4}\sum_{q=1}^{5}d_O(\tilde{S}_{pq}^{g_1},\tilde{S}_{pq}^{g_2}).$$

$$\text{s.t.}\sum_{g=1}^{3}e_g^3=1,\ \sum_{q=1}^{5}w_q^3=1;$$

$$\sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5}e_g^3w_q^3Q_{3q}^g-\sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5}e_g^3w_q^3Q_{p'q}^g>0,$$

$$p'=1,2,4;$$

$$e_g^3=\frac{1/E_{E_g^3}}{\sum_{p=1}^{4}1/E_{E_g^p}},\ g=1,2,3;$$

$$e_g^3,w_q^3>0,\ g=1,2,3,\ q=1,2,\cdots,5.$$

取 $\gamma=0.5$,利用Lingo 11.0求解模型 M_4 得

$O_3=0.056\,3$,

$e_g^3=(0.330\,7,0.327\,8,0.341\,5)$,

$w_q^3=(0.200\,4,0.248\,7,0.036\,0,0.220\,8,0.294\,1)$.

Step 5: 假设 A_4 为最优方案,则构建模型 M_5 如下:

$$\max\ O_4=\sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5}e_g^4w_q^4Q_{4q}^g-\sum_{\substack{g_1,g_2=1\\ g_1\neq g_2}}^{3}\sum_{p=1}^{4}\sum_{q=1}^{5}d_O(\tilde{S}_{pq}^{g_1},\tilde{S}_{pq}^{g_2}).$$

$$\text{s.t.}\sum_{g=1}^{3}e_g^4=1,\ \sum_{q=1}^{5}w_q^4=1;$$

$$\sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5}e_g^4w_q^4Q_{4q}^g-\sum_{g=1}^{3}\sum_{q=1}^{5}e_g^4w_q^4Q_{p'q}^g>0,$$

$$p'=1,2,3;$$

$$e_g^4=\frac{1/E_{E_g^4}}{\sum_{p=1}^{4}1/E_{E_g^p}},\ g=1,2,3;$$

$$e_g^4,w_q^4>0,\ g=1,2,3,\ q=1,2,\cdots,5.$$

取 $\gamma=0.5$,利用Lingo 11.0求解模型 M_5 得

$O_4=-0.257\,8$,

$e_g^4=(0.343\,7,0.321\,8,0.334\,5)$,

$w_q^4=(0.176\,3,0.1\times10^{-4},0.111\,6,0.156\,6,0.555\,5)$.

Step 6: 依据模型 M_2、M_3、M_4、M_5 的求解结果,由式(18)得到各方案最优时的最大化综合评价值为

$$\max A_1=((S_4,0.006\,5),(S_2^*,0.281\,0)),$$
$$\max A_2=((S_4,-0.250\,7),(S_2^*,0.335\,4)),$$
$$\max A_3=((S_4,-0.280\,5),(S_2^*,0.389\,9)),$$
$$\max A_4=((S_3,0.294\,2),(S_2^*,0.234\,2)).$$

若根据每个方案的最大化综合评价值进行选择,则方案的排序为 $A_1\succ A_3\succ A_2\succ A_4$,方案 A_1 为最优方案;若同时考虑方案的最大化综合评价值和专家一致性,即根据目标函数值 O_p 的大小对方案进行择优,则方案的排序为 $A_2\succ A_1\succ A_3\succ A_4$,方案 A_2 为最优方案.

Step 7: 综合考虑两种方案择优与排序方法,认为专家意见的一致性不容忽视,因此方案排序为 $A_2\succ A_1\succ A_3\succ A_4$,选择方案 A_2 为最优方案,且专家的权重为 $e_g=(0.329\,1,0.330\,0,0.340\,9)$,属性的权重为 $w_q=(0.192\,1,0.241\,5,0.178\,5,0.207\,9,0.180\,0)$.

4 方法比较分析

为了进一步说明本文所提出方法的合理性和优越性,分别从以下3个方面进行比较分析.

1) 二维二元语义的比较与距离.

本文以二维二元语义 $((S_4,-0.2),(S_3^*,0.2))$ 和 $((S_3,0.2),(S_4^*,-0.2))$ 为例,以文中定义13提出的方法分别与文献[10-12,14,21]中二维二元语义的比较方法进行对比,结果如表7所示.

表 7 不同二维二元语义比较方法的结果对比

文献	$((S_4,-0.2),(S_3^*,0.2))$ 与 $((S_3,0.2),(S_4^*,-0.2))$
文献[10]	$((S_4,-0.2),(S_3^*,0.2))\succ((S_3,0.2),(S_4^*,-0.2))$
文献[11]	$((S_4,-0.2),(S_3^*,0.2))=((S_3,0.2),(S_4^*,-0.2))$
文献[12]	$((S_4,-0.2),(S_3^*,0.2))=((S_3,0.2),(S_4^*,-0.2))$
文献[14]	当 $0\leqslant\delta\leqslant0.45$ 时,两者无法比较
文献[21]	$((S_4,-0.2),(S_3^*,0.2))=((S_3,0.2),(S_4^*,-0.2))$
本文方法	$\gamma=0.5$ 时,$((S_4,-0.2),(S_3^*,0.2))\prec((S_3,0.2),(S_4^*,-0.2))$

本文方法得出的结果与文献[10-12,14,21]得出的结果有所不同:文献[10]首先通过第一维信息的优劣去判断整个二维二元语义信息的优劣,具有片面性;文献[11]和文献[12]不能区分出一二维信息互

换时的情形; 文献[14]虽然相较于前面的方法更为合理, 但还是存在无法比较的情况; 文献[21]在对信息进行比较时, 没有考虑到两个不同维度的语言信息之间的相对重要性, 该比较结果只有在两个维度的信息都采用同一粒度的集合去评价时才成立. 实际上, 当两个维度的信息同等重要, 即$\gamma = 0.5$时, 前者中第二维信息$(S_4^*, -0.2)$较之后者中第一维信息$(S_4, -0.2)$更为优等, 因此$((S_3, 0.2), (S_4^*, -0.2))$优于$((S_4, -0.2), (S_3^*, 0.2))$是符合决策者思维的. 因而本文提出的比较方法能够克服上述缺点, 更为有效地对二维二元语义的优劣进行比较.

针对二维二元语义之间的距离, 沿用表7中所采用的例子, 以文中定义14提出的方法分别与文献[8, 11-12, 14, 21]中的方法进行对比, 结果如表8所示.

当$\gamma = 0.5$时, 本文结果和文献[14]的结果相同, 说明了本文方法的合理性, 但本文方法不仅能在权重信息均未知的情况下获取最优方案, 还能够反映出二维二元语义信息中, 第一维、第二维语言信息的相对重要性比重变化对二维二元语义之间的距离测度带来的影响, 进而反映出对方案最终的排序与择优带来的影响. 同时, 与文献[8, 11-12, 21]相比, 定义14不仅考虑了两个维度信息的相对重要性, 同时还适合于不同粒度的语言评价集, 因而更为合理有效.

表8　不同二维二元语义距离测量的结果对比

文献	$d(((S_4, -0.2), (S_3^*, 0.2)), ((S_3, 0.2), (S_4^*, -0.2)))$
文献[8]	0.6
文献[11]	0
文献[12]	0
文献[14]	0.15
文献[21]	1.2
本文方法	0.15(当$\gamma = 0.5$时)

2) 参数γ对于决策结果的影响.

为了探讨参数γ的变化对于方案的最大化综合评价值以及目标函数值的影响, 下面给出表9和表10分别说明这些变化对于方案排序和择优的影响.

表9　不同γ水平下方案的最大化综合评价值及排序

γ	$\max A_p$	排序
$\gamma = 0$	$\max A_1 = ((S_4, -0.0820), (S_2^*, 0.3354))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2164), (S_2^*, 0.3956))$, $\max A_3 = ((S_3, -0.2926), (S_2^*, 0.3226))$, $\max A_4 = ((S_3, 0.4080), (S_2^*, 0.2774))$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
$\gamma = 0.1$	$\max A_1 = ((S_4, 0.1617), (S_2^*, 0.3819))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2184), (S_2^*, 0.3770))$, $\max A_3 = ((S_4, -0.3096), (S_2^*, 0.3122))$, $\max A_4 = ((S_3, 0.4383), (S_2^*, 0.2984))$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
$\gamma = 0.2$	$\max A_1 = ((S_4, -0.0442), (S_2^*, 0.3513))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2184), (S_2^*, 0.3770))$, $\max A_3 = ((S_4, -0.3101), (S_2^*, 0.3226))$, $\max A_4 = ((S_3, 0.4557), (S_2^*, 0.2983))$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
$\gamma = 0.3$	$\max A_1 = ((S_4, -0.0200), (S_2^*, 0.3622))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2333), (S_2^*, 0.3524))$, $\max A_3 = ((S_4, -0.3021), (S_2^*, 0.3432))$, $\max A_4 = ((S_3, 0.4622), (S_2^*, 0.3047))$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
$\gamma = 0.4$	$\max A_1 = ((S_4, 0.0215), (S_2^*, 0.3588))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2423), (S_2^*, 0.3417))$, $\max A_3 = ((S_4, -0.2871), (S_2^*, 0.3726))$, $\max A_4 = ((S_3, 0.4316), (S_2^*, 0.3167))$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
$\gamma = 0.5$	$\max A_1 = ((S_4, 0.0065), (S_2^*, 0.2810))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2507), (S_2^*, 0.3354))$, $\max A_3 = ((S_3, -0.2805), (S_2^*, 0.3899))$, $\max A_4 = ((S_3, 0.2942), (S_2^*, 0.2342))$	$A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$
$\gamma = 0.6$	$\max A_1 = ((S_4, -0.0093), (S_2^*, 0.2426))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2555), (S_2^*, 0.3234))$, $\max A_3 = ((S_4, -0.3776), (S_2^*, 0.3181))$, $\max A_4$无解	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
$\gamma = 0.7$	第1次求解: $\max A_1 = ((S_4, 0.0276), (S_2^*, 0.2425))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2600), (S_2^*, 0.3008))$, $\max A_3$无解, $\max A_4$无解; 第2次求解: $\max A_3 = ((S_4, -0.3941), (S_2^*, 0.1538))$, $\max A_4 = ((S_4, -0.4923), (S_2^*, 0.1091))$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
$\gamma = 0.8$	$\max A_1 = ((S_4, 0.0740), (S_2^*, 0.2426))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2604), (S_2^*, 0.2932))$, $\max A_3$无解, $\max A_4 = ((S_4, -0.2900), (S_2^*, 0.3166))$	$A_1 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3$
$\gamma = 0.9$	$\max A_1 = ((S_4, 0.1295), (S_2^*, 0.2727))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2567), (S_2^*, 0.2928))$, $\max A_3$无解; $\max A_4 = ((S_4, -0.2516), (S_2^*, 0.3256))$	$A_1 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3$
$\gamma = 1.0$	第1次求解: $\max A_1 = ((S_4, 0.2215), (S_3^*, -0.3903))$, $\max A_2 = ((S_4, -0.2288), (S_2^*, 0.3432))$, $\max A_3$无解, $\max A_4$无解; 第2次求解: $\max A_3 = ((S_4, -0.1423), (S_3^*, -0.3212))$, $\max A_4 = ((S_4, -0.2727), (S_2^*, 0.1619))$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$

表 10 不同γ水平下方案的目标函数值及排序

γ	O_p	排序
0	$O_1 = 0.3963, O_2 = 0.4399, O_3 = 0.3475, O_4 = 0.0767$	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
0.1	$O_1 = 0.2631, O_2 = 0.3035, O_3 = 0.2386, O_4 = 0.0371$	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
0.2	$O_1 = 0.1790, O_2 = 0.2195, O_3 = 0.1676, O_4 = 0.0047$	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
0.3	$O_1 = 0.1192, O_2 = 0.1604, O_3 = 0.1152, O_4 = -0.0244$	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
0.4	$O_1 = 0.0881, O_2 = 0.1229, O_3 = 0.0794, O_4 = -0.0667$	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
0.5	$O_1 = 0.0991, O_2 = 0.1055, O_3 = 0.0563, O_4 = -0.2578$	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
0.6	$O_1 = 0.1127, O_2 = 0.0969, O_3 = -0.0921, O_4$无解	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
0.7	第1次求解: $O_1 = 0.1458, O_2 = 0.0883, O_3$无解; O_4无解; 第2次求解: $O_3 = 0.3047, O_4 = 0.3164$	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.8	$O_1 = 0.2053, O_2 = 0.1032, O_3$无解, $O_4 = -0.7035$	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.9	$O_1 = 0.2970, O_2 = 0.1407, O_3$无解, $O_4 = -0.3964$	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
1.0	第1次求解: $O_1 = 0.4258, O_2 = 0.2121, O_3$无解; O_4无解; 第2次求解: $O_3 = 0.4763, O_4 = 0.5.$	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$

当$\gamma = 0.7$和$\gamma = 1$时,在第1次模型求解中有$A_1 \succ A_2$,而分别假设方案A_3和A_4最优时,模型均无解,说明A_3和A_4不可能为最优方案. 在第2次模型求解中,仅考虑A_3和A_4两个备选方案,求解后发现$A_4 \succ A_3$,因而$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$. 从表9和表10可以看出,当按照方案的最大化综合评价值进行方案的择优时,随着γ的增大,方案A_1始终为最优方案,表现出该方法的稳定性;当按照目标函数值进行方案的择优时,随着γ的增大,各方案的目标函数值均呈现出先减小后增大的趋势. 当$\gamma \leqslant 0.5$时,方案A_2为最优方案,当$\gamma > 0.5$时,方案A_1为最优方案,说明对于方案A_2,专家给出的第二维语义较优,即确信程度更高,而对于方案A_1,专家给出的第一维语义较优,即对方案本身的评价更高.

3) 权重的求解方法.

与以往研究方法不同的是,本文将未知的权重信息视为决策结果的更多可能性,采用逆向思维方法,将每个方案分别视为最优方案,建立相应的模型去获知相应的专家权重和属性权重. 根据得到的权重信息计算方案的最大化综合评价值,但最终通过目标函数值的大小去判断方案的优劣. 该方法的最大优点是:在获得最优方案以及方案排序的过程中,不仅研究了最优方案的产生过程,还关注了非最优方案自身最优时的权重分配情况,为决策者提供了更多有用的决策信息.

5 结 论

本文针对二维二元语义的多属性群决策问题,在考虑到不同维度语言信息相对重要性的前提下,提出了一种新的二维二元语义比较方法和距离公式,并在此基础上构建了一种专家权重信息和属性权重信息均未知的权重求解模型,该模型能够针对两种权重信息同时进行求解. 本文方法的优势在于将未知的权重信息视为更多的决策可能性,在获知最优方案以及方案排序的同时,还能够得到其余各备选方案作为最优方案或是自身最优时相匹配的权重信息. 该方法的模型求解较为方便,且评价结果更为客观合理. 算例分析表明了本文方法的有效性和科学性,为求解权重未知的不确定语言多属性群决策问题提供了一种新的途径. 在下一步的研究中,可以考虑属性权重部分已知情形下的二维二元语义多属性群决策问题及其应用,以及对方案有偏好的二维二元语义多属性群决策方法及其应用.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.

[2] Herrera F, Martínez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 746-752.

[3] Wei G W. A method for multiple attribute group decision making based on the ET-WG and ET-OWG operators with 2-tuple linguistic information[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(12): 7895-7900.

[4] 索玮岚. 基于二元语义TAC积分算子的语言型多属性群决策方法[J]. 运筹与管理, 2016, 25(2): 63-70.
(Suo W L. Linguistic multiple attribute group decision making method based on 2-tuple linguistic TAC integral operator[J]. Operations Research and Management Science, 2016, 25(2): 63-70.)

[5] Martínez L, Herrera F. An overview on the 2-tuple linguistic model for computing with words in decision making: Extensions, applications and challenges[J]. Information Sciences, 2012, 207(1): 1-18.

[6] Rodríguez R M, Martínez L, Herrera F. A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term

sets[J]. Information Sciences, 2013, 241(12): 28-42.

[7] 朱卫东, 周光中, 杨善林. 基于二维语言评价信息的群体决策方法[J]. 系统工程, 2009, 27(2): 113-118.
(Zhu W D, Zhou G Z, Yang S L. An approach to group decision making based on 2-dimension linguistic assessment information[J]. Systems Engineering, 2009, 27(2): 113-118.)

[8] 张晨, 周光中, 朱卫东. 基于两维语义证据推理的科学基金项目专家评议系统研究[J]. 中国软科学, 2011, 2: 176-182.
(Zhang C, Zhou G Z, Zhu W D. Research on peer review system for the national science foundation based on two-dimensional semantics evidence reasoning[J]. China Soft Science, 2011, 2: 176-182.)

[9] Liu P D. An approach to group decision making based on 2-dimension uncertain linguistic information[J]. Technological & Economic Development of Economy, 2012, 18(3): 424-437.

[10] Yu X H, Xu Z S, Liu S S, et al. Multi-criteria decision making with 2-dimension linguistic aggregation techniques[J]. Int J of Intelligent Systems, 2012, 27(6): 539-562.

[11] Liu P D, Qi X F. Some generalized dependent aggregation operators with 2-dimension linguistic information and their application to group decision making[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 27(4): 1761-1773.

[12] Liu P D, Yu X C. 2-dimension uncertain linguistic power generalized weighted aggregation operator and its application in multiple attribute group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 57(2): 69-80.

[13] Liu P D, He L, Yu X C. Generalized hybrid aggregation operators based on the 2-dimension uncertain linguistic information for multiple attribute group decision making[J]. Group Decision and Negotiation, 2016, 25(1): 103-126.

[14] Zhu H, Zhao J B, Xu Y. 2-dimension linguistic computational model with 2-tuples for multi-attribute group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 103(7): 132-142.

[15] 卫贵武. 权重信息不完全的二元语义多属性群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(2): 273-277.
(Wei G W. Two-tuple linguistic multiple attribute group decision making with incomplete attribute weight information[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(2): 273-277.)

[16] 丁勇, 梁昌勇, 朱俊红, 等. 群决策中基于二元语义的主客观权重集成方法[J]. 中国管理科学, 2010, 18(5): 165-170.
(Ding Y, Liang C Y, Zhu J H, et al. A subjective and objective weights integrated method based on 2-tuple linguistic for group decision making[J]. Chinese J of Management Science, 2010, 18(5): 165-170.)

[17] 耿秀丽, 肖子涵, 孙绍荣. 基于双层专家权重确定的风险型大群体决策[J]. 控制与决策, 2017, 32(5): 885-891.
(Geng X L, Xiao Z H, Sun S R. Risky large group decision-maing based on two-lawyer expert weight information[J]. Control and Decision, 2017, 32(5): 885-891.)

[18] 张娜, 方志耕, 朱建军, 等. 基于等信息量转换的区间二元语义多属性群决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(3): 403-409.
(Zhang N, Fang Z G, Zhu J J, et al. Multiple attribute group decision making with interval two-tuple linguistic information based on the amount of information convert[J]. Control and Decision, 2015, 30(3): 403-409.)

[19] 徐选华, 孙倩. 基于属性多粒度的双层权重大群体决策方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1908-1914.
(Xu X H, Sun Q. Two-layer weight large group decision-making method based on multi-granularity attributes[J]. Control and Decision, 2016, 31(10): 1908-1914.)

[20] 郝晶晶, 朱建军, 刘思峰. 基于双重语言信息联动的多阶段决策模型[J]. 控制与决策, 2014, 29(1): 99-106.
(Hao J J, Zhu J J, Liu S F. Multi-stage decision model for aggregating dual linguistic evaluation information[J]. Control and Decision, 2014, 29(1): 99-106.)

[21] 吴良刚, 文丽. 基于二维二元语义和模糊AHP-TODIM的低碳供应商选择方法[J]. 运筹与管理, 2017, 26(3): 7-16.
(Wu L G, Wen L. Low carbon supplier selection method based on 2-dimension 2-tuple linguistic information and fuzzy AHP-TODIM[J]. Operations Research and Management Science, 2017, 26(3): 7-16.)

[22] Winston W L. Operations research application and algorithms[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 144-207.

作者简介

王泽林 (1992−), 女, 博士生, 从事决策理论与方法的研究, E-mail: wangzelinok@163.com;

王应明 (1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与方法、数据包络分析、证据推理等研究, E-mail: msymwang@hotmail.com.

(责任编辑：齐　霁)