

简化高阶强跟踪容积卡尔曼滤波及其在组合导航中的应用

郝顺义, 卢 航[†], 魏 翔, 许明琪

(空军工程大学 航空工程学院, 西安 710038)

摘 要: 针对传统容积卡尔曼滤波(CKF)在面对系统模型失配和状态突变滤波精度下降的问题,将强跟踪滤波器(STF)和高阶容积卡尔曼滤波(HCKF)相结合,提出一种简化高阶强跟踪容积卡尔曼滤波(RHSTCKF)算法.该算法具有比传统CKF更高的滤波精度,并且利用滤波模型的特点,简化HCKF的计算步骤,同时在HCKF中引入多重渐消因子增强算法的自适应性和应对状态突变的能力.将所提算法应用到SINS/GPS组合导航系统中进行仿真实验,结果表明,RHSTCKF可以准确估计出突变状态的真实值,能够抑制滤波器状态异常的干扰,滤波性能明显优于HCKF,能够提高组合导航系统的自适应性和定位精度.

关键词: 高阶容积卡尔曼滤波; 强跟踪滤波; 多重渐消因子; SINS/GPS组合导航

中图分类号: V249.3

文献标志码: A

Reduced high-degree strong tracking cubature Kalman filter and its application in integrated navigation system

HAO Shun-yi, LU Hang[†], WEI Xiang, XU Ming-qi

(Aeronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: Focusing on the problem that the filtering precision of the traditional cubature Kalman filter (CKF) decreases under the condition that a system model mismatches and sudden changes of state happen, an algorithm called reduced high-degree strong tracking cubature Kalman filter (RHSTCKF) is proposed, which combines the strong tracking filter with high-degree cubature Kalman filter. The algorithm has higher filtering precision than the traditional CKF, simplifying calculation steps by using the characteristics of the filtering model, and strengthening adaptivity and the ability of sudden changes by introducing the suboptimal multiple fading factor. The proposed algorithm is applied to the SINS/GPS integrated navigation system, and the simulation results show that the RHSTCKF can accurately estimate true value although the state has sudden changes, restrain the interference when filters have abnormal states, obviously improve the filter performance, and enhance the adaptivity and the positional accuracy of the integrated navigation system.

Keywords: high-degree cubature Kalman filter; strong tracking filter; suboptimal multiple fading factor; SINS/GPS integrated navigation

0 引 言

在组合导航系统定位中,高精度的滤波算法对导航定位的解算精度有重要影响^[1].组合导航系统模型本质上是非线性的,它能够准确反映实际系统的性能和特点,此时传统的卡尔曼滤波(KF)已经不再适用^[2].为了解决非线性模型的状态估计问题,扩展卡尔曼滤波(EKF)提供了一种解决思路,其基本思想是计算当前状态的一阶泰勒级数展开式,对非线性系统进行线性化处理,但是其滤波精度只能达到1阶.当模型具有较强非线性时,往往存在较大的截

断误差,并且EKF需要计算繁琐的Jacobian矩阵,不利于实际工程应用^[2-3].文献[4]基于蒙特卡洛确定性采样的思想,提出了基于无迹变换(UT)的无迹卡尔曼滤波(UKF),其滤波精度可以达到2阶.但是,UKF需要合理地调节参数因子才能选择出有效的Sigma点,同时,在高维系统中UKF容易出现数值不稳定的现象,这限制了其的应用范围^[3-4];针对高维系统的状态估计问题,Arasaratnam等^[5]提出了容积卡尔曼滤波算法(CKF),其核心思想是通过3阶球面-径向容积规则选取一定数量的容积点,然后通过非线性方程传

收稿日期: 2017-11-25; 修回日期: 2018-04-19.

基金项目: 航空科学基金项目(20110896009); 陕西省自然科学基金项目(2017JQ6034); 民机专项项目(MJZ-2014-S-47).

责任编辑: 张维海.

[†]通讯作者. E-mail: 860634869@qq.com.

播这些点来进行状态估计,其精度可达3阶.与EKF和UKF相比,CKF是一种更优越的非线性滤波算法,能够满足实际工程中对精度、稳定性和实时性等方面的需求^[3-4,6].然而,CKF也存在一些缺点,其滤波精度只能达到3阶,因此许多学者在3阶球面-径向容积规则的基础上推导了高阶球面-径向容积规则,并提出了高阶容积卡尔曼滤波(HCKF)^[7-9].文献[8-9]将HCKF应用到目标跟踪等非线性模型当中,获得了比传统CKF更高的滤波精度;文献[10]将HCKF应用于SINS的非线性自对准问题中,得到了高于传统CKF的对准精度.但是,非线性滤波存在自适应性差和跟踪能力弱的问题,当系统受到模型误差、状态突变等影响时,滤波器容易出现估计精度下降甚至发散的现象.强跟踪滤波器(STF)通过在预测协方差阵中引入一个强跟踪渐消因子,实时调节滤波增益矩阵,使滤波器在面对模型不确定性、状态突变等情况时具有较强的自适应性和跟踪能力^[11-14].

对此,本文以STF作为滤波器的基本理论框架,将具有高精度的HCKF与STF相结合,采用数值稳定性更高的SVD分解代替传统的chol分解,在系统量测方程为线性时,推导出一种无需计算Jacobian矩阵的简化高阶强跟踪容积卡尔曼滤波(RHSTCKF)算法,只需进行一次容积变换即可完成全部滤波过程.最后,通过不同情况下的仿真实验验证了所提算法的有效性.

1 非线性组合导航模型

GPS/SINS组合导航系统采用松组合模型,以SINS中的姿态、速度、位置以及惯性传感器的误差方程作为非线性滤波模型的状态方程,以SINS和GPS输出的速度、位置误差作为量测值.

1.1 组合导航系统状态方程

SINS的姿态、速度、位置非线性误差方程^[10]为

$$\begin{cases} \dot{\phi} = C_{\phi}^{-1}((\mathbf{I} - C_n^p)\tilde{\omega}_{in}^n + C_n^p\delta\omega_{in}^n - C_b^p\delta\omega_{ib}^b), \\ \delta\dot{\mathbf{v}}^n = (C_n^p - \mathbf{I})C_b^n\mathbf{f}^b + C_b^p\delta\mathbf{f}^b + (2\delta\omega_{ie}^n + \\ \delta\omega_{en}^n) \times \mathbf{v}^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}^n, \\ \delta\dot{L} = \frac{\delta v_N^n}{\tilde{R}_M + \tilde{h}}, \\ \delta\dot{\lambda} = \frac{\delta v_E^n}{\tilde{R}_N + \tilde{h}} \sec L + \delta L \frac{v_E^p}{\tilde{R}_N + \tilde{h}} \tan \tilde{L} \sec \tilde{L}, \\ \delta\dot{h} = \delta v_U. \end{cases} \quad (1)$$

其中: C_{ϕ}^{-1} 的表达式为

$$C_{\phi}^{-1} =$$

$$\frac{1}{\cos \phi_x} \begin{bmatrix} \cos \phi_x \cos \phi_y & 0 & \sin \phi_y \cos \phi_x \\ \sin \phi_x \sin \phi_y & \cos \phi_x & -\sin \phi_x \cos \phi_y \\ -\sin \phi_y & 0 & \cos \phi_y \end{bmatrix}, \quad (2)$$

C_b^p 为载体系 b 到计算导航坐标系 p 的坐标变换矩阵, C_n^p 为理想导航坐标系 n 到计算导航坐标系 p 的坐标变换矩阵; $\tilde{\omega}_{in}^n$ 为导航坐标系相对于惯性坐标系的角速度在计算导航坐标系上的投影, $\delta\omega_{in}^n$ 为导航坐标系的计算误差; $\delta\omega_{ib}^b$ 为陀螺的测量误差, $\delta\omega_{ib}^b$ 由陀螺常值漂移 $\boldsymbol{\varepsilon}_b = [\varepsilon_{bx} \ \varepsilon_{by} \ \varepsilon_{bz}]^T$ 和陀螺随机漂移 $\boldsymbol{\omega}_g = [\omega_{gx} \ \omega_{gy} \ \omega_{gz}]^T$ 构成, $\boldsymbol{\omega}_g$ 为零均值的高斯白噪声; \mathbf{v}^p 为速度计算值, $\delta\mathbf{v}^n$ 为速度计算误差; $\tilde{\mathbf{f}}^b$ 为加速度计真实测量值, $\delta\mathbf{f}^b$ 为加速度计的测量误差; ω_{en}^p 为导航坐标系相对于地球坐标系的角速度在计算导航坐标系的投影, $\delta\omega_{en}^p$ 为 ω_{en}^p 的计算误差; ω_{ie}^p 为地球自转角速度在计算导航坐标系的投影, $\delta\omega_{ie}^p$ 为 ω_{ie}^p 的计算误差; $\delta\mathbf{f}^b$ 由加速度计常值零偏 $\nabla_b = [\nabla_{bx} \ \nabla_{by} \ \nabla_{bz}]^T$ 和加速度计随机漂移 $\boldsymbol{\omega}_a = [\omega_{ax} \ \omega_{ay} \ \omega_{az}]^T$ 构成, $\boldsymbol{\omega}_a$ 为零均值的高斯白噪声; δL 、 $\delta\lambda$ 、 δh 分别为纬度误差、经度误差和高度误差.

$\boldsymbol{\varepsilon}_b$ 和 ∇_b 通常由随机常数来表示,可以得到惯性器件的误差方程,表示为

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{bx} = 0, \dot{\varepsilon}_{by} = 0, \dot{\varepsilon}_{bz} = 0; \\ \dot{\nabla}_{bx} = 0, \dot{\nabla}_{by} = 0, \dot{\nabla}_{bz} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

选取15维状态向量

$$\mathbf{X} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z \ \delta v_x \ \delta v_y \ \delta v_z \ \delta L \\ \delta\lambda \ \delta h \ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \nabla_x \ \nabla_y \ \nabla_z]^T,$$

因此可由式(1)和(3)构成SINS/GPS组合导航系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{w}. \quad (4)$$

其中: $\mathbf{f}(\cdot)$ 为非线性函数, \mathbf{w} 为系统噪声.

1.2 组合导航系统量测方程

选取SINS和GPS两者输出的速度信息、位置信息的差值作为滤波器的量测值,所以

$$\mathbf{Z} = [\delta v_x \ \delta v_y \ \delta v_z \ \delta L \ \delta\lambda \ \delta h]^T,$$

则SINS/GPS组合导航系统的量测方程为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{v}. \quad (5)$$

其中:观测矩阵 $\mathbf{H} = [\mathbf{0}_{6 \times 3} \ \mathbf{I}_{6 \times 6} \ \mathbf{0}_{6 \times 6}]$, \mathbf{v} 为量测噪声.

2 简化高阶强跟踪容积卡尔曼滤波

考虑如下离散非线性系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$ 分别为系统状态向量和量测向量; $\mathbf{f}(\cdot)$ 和 $\mathbf{h}(\cdot)$ 为已知的非线性函数; \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 为不相关的零均值高斯白噪声, 满足 $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kl}$ 和 $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kl}$, δ_{kl} 为狄拉克函数; 初始状态 \mathbf{x}_0 与 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 不相关。

2.1 强跟踪滤波原理

STF 原理是通过在预测协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 中引入一个多重渐消因子阵 λ_k , 以达到在线调整增益矩阵 \mathbf{K}_k 的目的. 滤波器需要满足如下条件:

$$\begin{cases} E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T] = \min; \\ E[\boldsymbol{\varepsilon}_{k+i} \boldsymbol{\varepsilon}_k^T] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

式(7)使滤波器满足最小方差估计性能指标的同时, 强迫滤波器的残差序列时刻保持正交, 这样可以充分提取残差序列当中的有效信息, 克服了滤波器在遇到模型不确定或者状态突变等情况导致滤波器性能下降的问题^[13], 使得强跟踪滤波器对模型不确定性有较强的自适应性, 对状态突变有较强的跟踪能力。

2.2 次优渐消因子计算

由文献[15]可知, 多重渐消 EKF 的渐消因子阵次优解法如下:

$$\lambda_k = \text{diag}[\lambda_k^1 \quad \lambda_k^2 \quad \dots \quad \lambda_k^n]; \quad (8)$$

$$\lambda_k^i = \max\left(1, \frac{[\alpha_i \text{tr} \mathbf{N}_k]}{n}\right); \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{2n^2} \alpha_i \mathbf{M}_k^{ii}$$

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{V}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T - \mathbf{R}_k; \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{F}_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k|k-1}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k; \quad (11)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{k|k-1} = \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k}; \\ \mathbf{H}_k = \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}}; \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}; \quad (13)$$

$$\mathbf{V}_k = \begin{cases} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T, \quad k = 0; \\ \frac{\rho \mathbf{V}_{k-1} + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T}{1 + \rho}, \quad k > 0. \end{cases} \quad (14)$$

其中: λ_k 为渐消因子阵, λ_k 的各个元素对应各状态的渐消因子, 相比于传统的单渐消因子, 本文引入的多

重渐消因子阵包含多个渐消因子, 对不同的状态采用不同的渐消速率进行调整, 可以提高滤波的强跟踪能力^[15]; α_i 为可调参数; $\mathbf{F}_{k|k-1}$ 为 $\mathbf{f}(x)$ 在 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 处的 Jacobian 矩阵, \mathbf{H}_k 为 $\mathbf{h}(x)$ 在 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 处的雅各布矩阵, \mathbf{N}_k 、 \mathbf{M}_k 和 \mathbf{V}_k 均为计算过程参数矩阵; \mathbf{e}_k 为残差向量; ρ 为遗忘因子, 取 $\rho = 0.95$. 由式(12)可知, MSTEF 在求取次优渐消因子阵时, 分别对状态方程和量测方程进行了一阶泰勒级数展开, 这会导致计算量大幅增加. 为了在 STF 滤波框架下建立强跟踪 CKF 算法, 需要将非线性状态函数和量测函数的一阶泰勒级数展开式进行等价描述, 以寻找一种无需计算 Jacobian 矩阵的高阶强跟踪 CKF 滤波算法. 通常 \mathbf{Q}_{k-1} 为正定的对称矩阵, 则矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}^l$ 的逆矩阵一定存在, $\mathbf{P}_{k|k-1}^x$ 和 \mathbf{H}_k 可以等价表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1}^x &= \\ \mathbf{F}_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k|k-1}^T &= \\ \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{P}_{xz,k|k-1}^l]^T [\mathbf{P}_{k|k-1}^l]^{-1} \mathbf{H}_k^T. \quad (16)$$

将式(15)和(16)代入(10)和(11), \mathbf{M}_k 、 \mathbf{N}_k 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}^x [\mathbf{P}_{k|k-1}^l]^{-1} [\mathbf{P}_{xz,k|k-1}^l] \cdot \\ &[\mathbf{P}_{xz,k|k-1}^l]^T [\mathbf{P}_{k|k-1}^l]^{-1} \mathbf{H}_k^T, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_k &= \mathbf{V}_k - [\mathbf{P}_{xz,k|k-1}^l]^T [\mathbf{P}_{k|k-1}^l]^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{Q}_{k-1} \cdot \\ &[\mathbf{P}_{k|k-1}^l]^{-1} [\mathbf{P}_{xz,k|k-1}^l] - \mathbf{R}_k, \end{aligned} \quad (18)$$

将式(17)、(18)分别代替式(10)、(11), 即可得到 STF 算法在非线形系统中多重渐消因子阵的次优解法。

2.3 RHSTCKF 算法

在高斯近似贝叶斯滤波框架下, HCKF 相比于 3 阶 CKF 在容积点的数量、权值和选取策略这 3 个方面存在不同, HCKF 算法的具体推导过程可以参见文献[9]. 在很多导航系统应用中, 量测方程通常为线性方程, 鉴于此, 本文在状态方程为非线性, 量测方程为线性的基础上, 提出了简化高阶 CKF 算法 (RHCKF), RHCKF 的具体推导过程如下。

1)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T &= \mathbf{P}_{k|k-1}^l, \\ \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T &= \\ \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{S}_{k|k-1}^l \boldsymbol{\xi}_i) (\mathbf{S}_{k|k-1}^l \boldsymbol{\xi}_i)^T &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \omega_0(\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_1)(\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_1)^T + \sum_{i=1}^{n(n-1)} \omega_1(\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i)(\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i)^T + \\ & \sum_{i=n(n-1)+1}^{2n(n-1)} \omega_1(\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i)(\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i)^T + \sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} \omega_2(\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i)(\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i)^T = \\ & \underbrace{\mathbf{S}_{k|k-1}^l \left[\omega_0(\xi_1 \xi_1^T) + \sum_{i=1}^{n(n-1)} \omega_1(\xi_i \xi_i^T) + \sum_{i=n(n-1)+1}^{2n(n-1)} \omega_1(\xi_i \xi_i^T) + \sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} \omega_2(\xi_i \xi_i^T) \right]}_{\mathbf{A}} \mathbf{S}_{k|k-1}^{lT}. \end{aligned}$$

\mathbf{A} 可以进一步表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \omega_0(\xi_1 \xi_1^T) + \sum_{i=1}^{n(n-1)} \omega_1(\xi_i \xi_i^T) + \sum_{i=n(n-1)+1}^{2n(n-1)} \omega_1(\xi_i \xi_i^T) + \sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} \omega_2(\xi_i \xi_i^T) = \\ & \omega_1 \sum_{i=1}^{n(n-1)} (\xi_i \xi_i^T) + \omega_1 \sum_{i=n(n-1)+1}^{2n(n-1)} (\xi_i \xi_i^T) + \omega_2 \sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} (\xi_i \xi_i^T) = \\ & \omega_1 \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (\sqrt{n+2} s_i^+) (\sqrt{n+2} s_i^+)^T + \omega_1 \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{n(n-1)} (-\sqrt{n+2} s_{i-\frac{n(n-1)}{2}}^+) (-\sqrt{n+2} s_{i-\frac{n(n-1)}{2}}^+)^T + \\ & \omega_1 \sum_{i=n(n-1)+1}^{\frac{3n(n-1)}{2}} (\sqrt{n+2} s_{i-n(n-1)}^-) (\sqrt{n+2} s_{i-n(n-1)}^-)^T + \\ & \omega_1 \sum_{i=\frac{3n(n-1)}{2}+1}^{2n(n-1)} (-\sqrt{n+2} s_{i-\frac{3n(n-1)}{2}}^-) (-\sqrt{n+2} s_{i-\frac{3n(n-1)}{2}}^-)^T + \\ & \omega_2 \sum_{i=2n(n-1)+1}^{n(2n-1)} (\sqrt{n+2} e_{i-2n(n-1)}) (\sqrt{n+2} e_{i-2n(n-1)})^T + \\ & \omega_2 \sum_{i=n(2n-1)+1}^{2n^2} (-\sqrt{n+2} e_{i-n(2n-1)}) (-\sqrt{n+2} e_{i-n(2n-1)})^T = \\ & \omega_1(n+2) \left(\sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (s_i^+) (s_i^+)^T + \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{n(n-1)} (s_{i-\frac{n(n-1)}{2}}^+) (s_{i-\frac{n(n-1)}{2}}^+)^T \right) + \\ & \omega_1(n+2) \left(\sum_{i=n(n-1)+1}^{\frac{3n(n-1)}{2}} (s_{i-n(n-1)}^-) (s_{i-n(n-1)}^-)^T + \sum_{i=\frac{3n(n-1)}{2}+1}^{2n(n-1)} (s_{i-\frac{3n(n-1)}{2}}^-) (s_{i-\frac{3n(n-1)}{2}}^-)^T \right) + \\ & \omega_2(n+2) \left(\sum_{i=2n(n-1)+1}^{n(2n-1)} (e_{i-2n(n-1)}) (e_{i-2n(n-1)})^T + \sum_{i=n(2n-1)+1}^{2n^2} (e_{i-n(2n-1)}) (e_{i-n(2n-1)})^T \right) = \\ & 2\omega_1(n+2) \underbrace{\sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (s_i^+) (s_i^+)^T}_{\mathbf{B}} + 2\omega_1(n+2) \underbrace{\sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (s_i^-) (s_i^-)^T}_{\mathbf{C}} + 2\omega_2(n+2) \underbrace{\sum_{i=1}^n (e_i) (e_i)^T}_{\mathbf{D}} = \\ & 2\omega_1(n+2)(\mathbf{B} + \mathbf{C}) + 2\omega_2(n+2)\mathbf{D}, \end{aligned}$$

$\mathbf{B} + \mathbf{C}$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} + \mathbf{C} &= \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (s_i^+) (s_i^+)^T + \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (s_i^-) (s_i^-)^T = \\ & \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} ((s_i^+) (s_i^+)^T + (s_i^-) (s_i^-)^T), \end{aligned}$$

\mathbf{D} 可以表示为

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^n e_i e_i^T.$$

由式(26)可知,点集 $\{s_j^+\}$ 和 $\{s_j^-\}$ 分别为

$$\{s_i^+\} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}}(e_l + e_k) : l < k, l, k = 1, 2, \dots, n \right\},$$

$$\{s_i^+\} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}}(e_l + e_k) : l < k, l, k = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

其中: e_l 为 n 维单位矢量, 第 l 元素为 1; e_k 为 n 维单位矢量, 第 k 个元素为 1.

进一步可以得到

$$D = \sum_{i=1}^n e_i e_i^T = E_{n \times n},$$

$$B + C =$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[\frac{(e_l + e_k)(e_l + e_k)^T(e_l - e_k)(e_l - e_k)^T}{2} \right].$$

其中

$$e_l + e_k = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1^l \\ \vdots \\ 1^k \\ \vdots \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

$$(e_l - e_k)(e_l - e_k)^T = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1^l \\ \vdots \\ -1^k \\ \vdots \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

可得

$$(e_l + e_k)(e_l + e_k)^T = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1^l \\ \vdots \\ 1^k \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & 1^l & \dots & 1^k & \dots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1^{(l,l)} & & 1^{(l,k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{(k,l)} & & 1^{(k,k)} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$(e_l - e_k)(e_l - e_k)^T = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1^l \\ \vdots \\ -1^k \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & 1^l & \dots & -1^k & \dots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1^{(l,l)} & & -1^{(l,k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1^{(k,l)} & & 1^{(k,k)} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$(e_l + e_k)(e_l + e_k)^T + (e_l - e_k)(e_l - e_k)^T =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 2^{(l,l)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 2^{(k,k)} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

因此有

$$B + C = \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1^{(l,l)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1^{(k,k)} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

其中 $l < k (l, k = 1, 2, \dots, n)$, 此时 l, k 共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 种选择方案, 等于 i 点的个数. 本文计算 i, l, k 的策略为

$$i = \frac{k^2 - k + 2}{2} - l.$$

可以发现, 当满足上式的计算策略时, $B + C = (n - 1)E_{n \times n}$, 则此时

$$\begin{aligned} A &= 2\omega_1(n+2)(B+C) + 2\omega_2(n+2)D = \\ &= \frac{2}{(n+2)^2}(n+2)(n-1)E_{n \times n} + \\ &= \frac{2(4-n)}{2(n+2)^2}(n+2)E_{n \times n} = E_{n \times n}. \end{aligned}$$

即可得证

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T = \\ &\mathbf{S}_{k|k-1}^l \mathbf{A} \mathbf{S}_{k|k-1}^{lT} = \\ &\mathbf{S}_{k|k-1}^l \mathbf{S}_{k|k-1}^{lT} = \mathbf{P}_{k|k-1}^l. \end{aligned}$$

2) 量测方程为线性时

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} &= \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \\ \mathbf{P}_{zz,k|k-1} &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^l \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k, \\ \mathbf{P}_{xz,k|k-1} &= \mathbf{P}_{k|k-1}^l \mathbf{H}_k^T. \end{aligned}$$

已知滤波模型的量测方程为

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1}^l = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l.$$

计算 k 时刻的量测预测值 $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}$ 为

$$\begin{aligned}
\hat{z}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^l = \mathbf{H}_k \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l = \\
&\mathbf{H}_k \omega_0 \mathbf{X}_{0,k|k-1}^l + \mathbf{H}_k \sum_{i=1}^{2n(n-1)} \omega_1 \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l + \mathbf{H}_k \sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} \omega_2 \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l = \\
&\mathbf{H}_k \frac{2}{n+2} \mathbf{X}_{0,k|k-1}^l + \mathbf{H}_k \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{i=1}^{2n(n-1)} \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l + \mathbf{H}_k \frac{4-n}{2(n+2)^2} \sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l = \\
&\mathbf{H}_k \frac{2}{n+2} (\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_0 + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{i=1}^{2n(n-1)} (\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \\
&\mathbf{H}_k \frac{4-n}{2(n+2)^2} \sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} (\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) = \\
&\mathbf{H}_k \frac{2}{n+2} (\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_0 + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k \frac{1}{(n+2)^2} \left(\sum_{i=1}^{2n(n-1)} (\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i) + \sum_{i=1}^{2n(n-1)} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) + \\
&\mathbf{H}_k \frac{4-n}{2(n+2)^2} \left(\sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} (\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i) + \sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) = \\
&\mathbf{H}_k \left(\frac{2}{n+2} (\mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_0 + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{i=1}^{2n(n-1)} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \frac{4-n}{2(n+2)^2} \sum_{i=2n(n-1)+1}^{2n^2} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) = \\
&\mathbf{H}_k \left(\frac{2}{n+2} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \frac{2n(n-1)}{(n+2)^2} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \frac{2n(4-n)}{2(n+2)^2} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}.
\end{aligned}$$

结合1)中证明结论,可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{xz,k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1})^T = \\
&\sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{H}_k \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T = \\
&\left(\sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \right) \mathbf{H}_k^T = \mathbf{P}_{k|k-1}^l \mathbf{H}_k^T, \\
\mathbf{P}_{zz,k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}) (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1})^T + \mathbf{R}_k = \\
&\sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{H}_k \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{z}_{k|k-1}) (\mathbf{H}_k \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{z}_{k|k-1})^T + \mathbf{R}_k = \\
&\sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{H}_k \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{H}_k \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + \mathbf{R}_k = \\
&\sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{H}_k \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{H}_k \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + \mathbf{R}_k = \\
&\mathbf{H}_k \left(\sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \right) \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k = \\
&\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^l \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k.
\end{aligned}$$

综上, k 时刻的量测预测值 $\hat{z}_{k|k-1}$ 、量测误差协方差阵 $\mathbf{P}_{zz,k|k-1}$ 和预测互相关协方差阵 $\mathbf{P}_{xz,k|k-1}$ 可以简单地表示为

$$\hat{z}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{2n} \omega_i \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^l = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_{zz,k|k-1} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k, \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T. \quad (21)$$

结合2.2节中次优渐消因子的计算公式,RHSTCKF算法流程可以总结如下.

Step 1: 滤波器初始化.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{X}_0], \\ \mathbf{P}_0 = \mathbf{E}[(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)^T]. \end{cases} \quad (22)$$

Step 2: 时间更新过程.

Step 2.1: 计算容积点 $\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}, i = 0, \dots, 2n^2$,

采用具有更高数值稳定性的 SVD 分解代替传统的 chol 分解. 该方法没有要求协方差矩阵满足对称性和正定性的条件, 这样可以更好地解决协方差矩阵病态条件的问题, 使得整个算法具有更高的数值稳定性和滤波精度. 对协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 使用 SVD 分解, 即

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{U}_{k-1} \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^T, \quad (23)$$

$$\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{U}_{k-1|k-1} \sqrt{s_i} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}. \quad (24)$$

其中: $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}, \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_r), s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots \geq s_r \geq 0$, 均表示矩阵 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 的奇异值. ξ_i 表示求积分点集, 当采用五阶容积准则时, 共有 $2n^2 + 1$ 个求积分点, 其具体表达式^[8-9]为

$$\begin{cases} [0, \dots, 0^T], i = 0; \\ \sqrt{(n+2)}s_i^+, i = 1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}; \\ -\sqrt{(n+2)}s_{i-\frac{n(n-1)}{2}}^+, \\ i = \frac{n(n-1)}{2} + 1, \dots, n(n-1); \\ \sqrt{(n+2)}s_{i-n(n-1)}^-, \\ i = n(n-1) + 1, \dots, \frac{3n(n-1)}{2}; \\ \sqrt{(n+2)}s_{i-\frac{3n(n-1)}{2}}^-, \\ i = \frac{3n(n-1)}{2} + 1, \dots, 2n(n-1); \\ \sqrt{(n+2)}e_{i-2n(n-1)}, \\ i = 2n(n-1) + 1, \dots, n(2n-1); \\ -\sqrt{(n+2)}e_{i-n(2n-1)}, \\ i = n(2n-1) + 1, \dots, 2n^2; \end{cases} \quad (25)$$

e_i 表示 n 维单位向量, 第 i 个元素为 1, n 为系统的状态维数; s_i^+, s_i^- 的具体表达式为

$$s_i^+ = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_l + e_k), s_i^- = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_l - e_k), \quad l < k, l, k = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

Step 2.2: 计算经状态方程传递后的容积点

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}). \quad (27)$$

Step 2.3: 计算 k 时刻的状态一步预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^*), \quad (28)$$

其中 ω_i 为容积点的权值, 表示为

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{2}{n+2}, i = 0; \\ \omega_1 = \frac{1}{(n+2)^2}, i = 1, 2, \dots, 2n(n-1); \\ \omega_2 = \frac{4-n}{2(n+2)^2}, i = 2n(n-1) + 1, \dots, 2n^2. \end{cases} \quad (29)$$

Step 2.4: 计算 k 时刻未引入渐消因子的预测误差协方差阵

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^l = \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (30)$$

Step 3: 量测更新过程.

Step 3.1: 计算更新后的状态容积点

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1}^l = \mathbf{S}_{k|k-1}^l \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad (31)$$

其中 $\mathbf{P}_{k|k-1}^l = \mathbf{S}_{k|k-1}^l (\mathbf{S}_{k|k-1}^l)^T$.

Step 3.2: 计算经过量测方程传递的容积点

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1}^l = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_{i,k|k-1}^l. \quad (32)$$

Step 3.3: 计算 k 时刻的测量预测值

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n^2} \omega_i \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^l = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}. \quad (33)$$

Step 3.4: 计算 k 时刻未引入渐消因子的量测误差协方差阵 $\mathbf{P}_{z,z,k|k-1}^l$ 和未引入渐消因子的预测互相关协方差阵 $\mathbf{P}_{xz,k|k-1}^l$:

$$\mathbf{P}_{z,z,k|k-1}^l = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^l \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k, \quad (34)$$

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1}^l = \mathbf{P}_{k|k-1}^l \mathbf{H}_k^T. \quad (35)$$

Step 3.5: 计算次优渐消因子. 由矩阵论知识可知, 对角元素不相等的对角矩阵左乘对称正定矩阵的结果不一定为对称矩阵. 文献[15]在预测误差协方差阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 中引入了一个多重渐消因子阵, 随着滤波迭代次数的增加, $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 将会逐渐失去对称正定性. 为了解决这个问题, 本文在 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 中引入两个多重渐消因子阵, 形式如下:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \lambda_k \mathbf{P}_{k|k-1}^x \lambda_k' + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (36)$$

当滤波模型的量测方程为线性, 结合 2.2 节提出的次优渐消因子求解方法, 得到 RHSTCKF 算法中的渐消因子阵次优解法为

$$\lambda_k^i = \max\left(1, \frac{\alpha_i \text{tr}[\mathbf{N}_k]}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{M}_k^{ii}\right), \quad (37)$$

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{V}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T - \mathbf{R}_k, \quad (38)$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}^x \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k. \quad (39)$$

Step 3.6: 计算 k 时刻引入渐消因子的量测误差协

方差阵 $P_{zz,k|k-1}$ 和引入渐消因子的预测互相关协方差阵 $P_{xz,k|k-1}$:

$$P_{zz,k|k-1} = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k, \quad (40)$$

$$P_{xz,k|k-1} = P_{k|k-1} H_k^T. \quad (41)$$

Step 4: 滤波更新过程. 计算 k 时刻的滤波增益矩阵 K_k 、滤波状态值 $\hat{x}_{k|k}$ 和协方差阵 $P_{k|k}$:

$$K_k = P_{xz,k|k-1} P_{zz,k|k-1}^{-1}, \quad (42)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}), \quad (43)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{zz,k|k-1} K_k^T. \quad (44)$$

值得说明的是,文献[15]在求得引入渐消因子的状态预测协方差阵 $P_{k|k-1}$ 后,需要再一次进行UT变换,以求得引入渐消因子的量测误差协方差阵 $P_{zz,k|k-1}$ 和预测互相关协方差阵 $P_{xz,k|k-1}$,计算量迅速增大,不便于工程应用.文献[13]指出,文献[16-17]中强跟踪UKF存在无法满足式(9)的问题,并提出了一种改进的强跟踪UKF算法,整个算法只需要进行两次UT变换,减少了计算量的同时还满足式(9)的要求.文献[12]在文献[13]的基础上进一步分析了当量测方程为线性时,其算法中的次优渐消因子作用效果与文献[13]所提算法是一致的,同样满足STF的两个条件.根据上述结论,本文所提的RHSTCKF只需进行一次容积点变换即可满足STF算法的两个条件,同时还保留了HCKF高精度的优势.

3 仿真实验

设置载体的初始位置为东经 108° , 北纬 34° , 高度 400m ; 载体初始速度大小为 0m/s , 方向正北; SINS 的初始位置误差为 10m , 初始速度误差为 0.5m/s , 东向、北向初始失准角为 1° , 天向失准角为 10° . GPS 的水平位置误差均方根为 10m , 高度误差均方根为 10m , 速度误差均方根为 0.5m/s . SINS 的解算周期为 0.01s , GPS 信号采样周期为 0.1s . 载体经过加速、匀速、右转、左盘旋、爬升、下降、减速等机动,陀螺和加速度计的参数如表1所示.

表1 惯性测量组件主要性能参数

| 参数项 | 参数值 |
|--------------------------------|-----------|
| 陀螺常值漂移 / ($^\circ/\text{h}$) | 0.03 |
| 陀螺随机漂移 / ($^\circ/\text{h}$) | 0.001 |
| 陀螺动态范围 / ($^\circ/\text{s}$) | ± 200 |
| 加速度计常值漂移 / μg | 100 |
| 加速度计随机漂移 / μg | 5 |
| 加速度计动态范围 / g | ± 30 |

现从3种情况对所提RHSTCKF进行实验,分析结果如下.

情况1 分别采用RCKF和RHCKF两种算法对SINS/GPS组合导航系统进行仿真,以组合导航系统

的定位误差作为滤波精度指标,纬度误差 δL 、经度误差 $\delta \lambda$ 、高度误差 δh 曲线如图1所示.

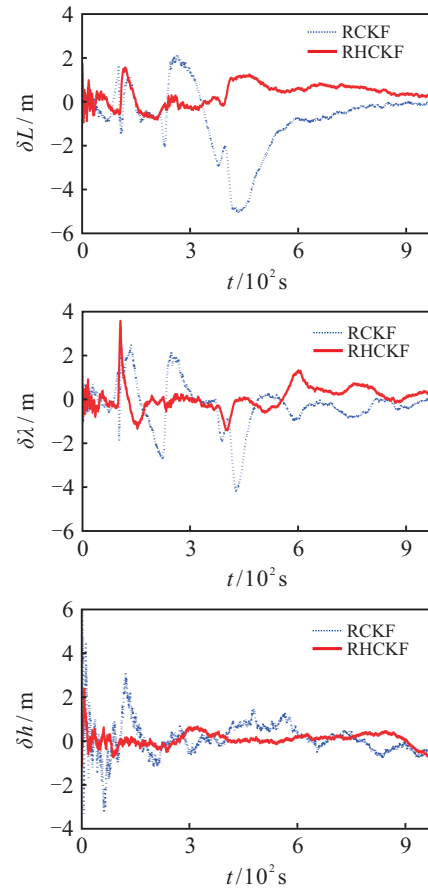


图1 RCKF和RHCKF算法定位误差对比

从图1的仿真结果可以看出:200s后采用RCKF算法得到的纬度定位误差所在区间为 $[-5.5\text{m}, 2\text{m}]$, 经度定位误差所在区间为 $[-1.2\text{m}, 1.5\text{m}]$, 高度定位误差所在区间为 $[-3.3\text{m}, 3.1\text{m}]$; 而采用RHCKF的定位误差区间分别为 $[-0.8\text{m}, 1.8\text{m}]$ 、 $[-0.3\text{m}, 0.8\text{m}]$. 由此可知,采用高阶容积采样规则 RHCKF 表现优于采用三阶容积规则的CKF.

情况2 由1.1节的建模过程可知,SINS/GPS组合导航系统通常将陀螺常值漂移和加速度计常值漂移也加入到系统状态中进行估计,以提高组合导航的滤波精度.然而在实际SINS工作时,加速度计常值零偏可能会受到SINS运行环境中温度变化、元器件故障等不确定性因素的影响而发生突变.因此,为了进一步验证RHSTCKF的自适应性和跟踪能力,假设组合导航系统在400s时,加速度计零偏由原先的 $100\mu\text{g}$ 突变为 $150\mu\text{g}$, 分别采用RHCKF和RHSTCKF进行仿真实验,结果如图2所示.

由图2可以看到,RHCKF在900s后对加速度计零偏估计值约为 $135\mu\text{g}$, 系统模型在400s发生突变,RHCKF失去了对加速度计零偏的跟踪能力,而加入渐消因子的RHSTCKF在400s后体现出更强的自适

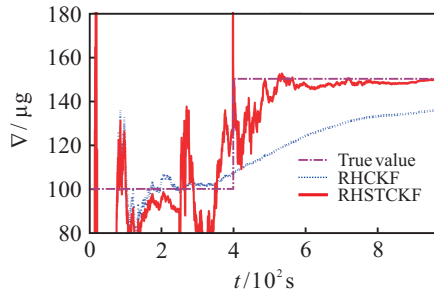


图2 RHCKF和RHSTCKF跟踪加速度计零偏对比

应性,最终对加速度计零偏估计得到更好的效果. 实验结果说明,STF理论在RHCKF滤波中起到了一定的作用,增强了RHCKF的跟踪能力和自适应性,这与理论分析是一致的.

情况3 为了进一步比较RHCKF和RHSTCKF两种算法在系统状态发生突变时的自适应性,假设组合导航系统工作到400s时,速度、位置状态变量产生一个时长为100s的突变

$$\Delta \mathbf{X} = [001 \text{ m/s} \quad 0.001 \text{ m/s} \quad 0.001 \text{ m/s} \rightarrow \\ \leftarrow 0.01 \text{ m} \quad 0.01 \text{ m} \quad 0.01 \text{ m}],$$

其余状态变量表现正常,采用RHCKF和RHSTCKF进行仿真实验,纬度误差 δL 、经度误差 $\delta \lambda$ 、高度误差 δh 的结果如图3所示.

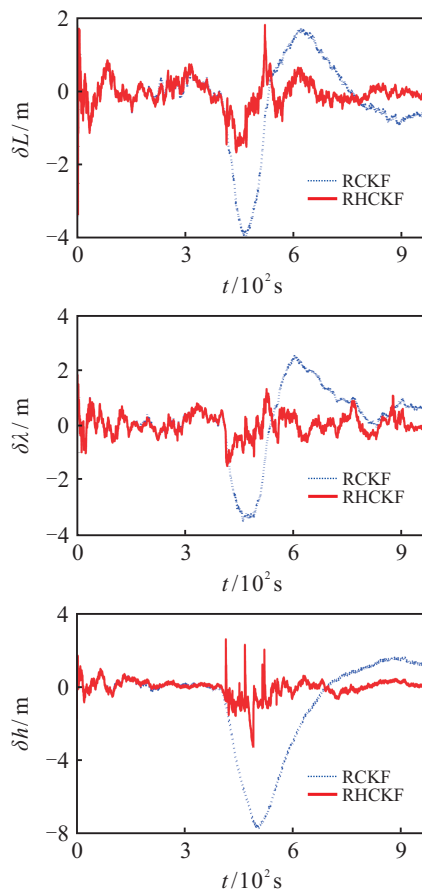


图3 状态变量突变时,RHCKF和RHSTCKF的效果对比

由图3不难看出,组合导航系统在400s ~ 500s内的定位误差均受到了一定程度的影响. 当系统的

状态变量产生异常时,文中所建立的滤波模型和真实的动力学模型已经不再匹配,没有加入强跟踪渐消因子的RHCKF面对失配的系统模型无法表现出良好的自适应性,此时纬度误差最大达到4m左右,经度误差最大达到3m左右,高度误差达到8m左右. 然而,RHSTCKF在400s ~ 500s内的纬度误差保持在[-2m, 2m]以内,经度误差保持在[-1.5m, 1.5m]以内,高度误差保持在[-3m, 2m]以内,表现明显优于RHCKF. 这是因为,当系统的状态发生异常时,多重渐消因子阵以不同的渐消速率作用于系统的状态协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}$,这样可以更好地调整系统增益矩阵 \mathbf{K}_k ,克服了普通滤波器到达稳态时,因为系统增益矩阵 \mathbf{K}_k 趋于稳定造成滤波器无法迅速跟踪真实状态的问题,所以RHSTCKF可以保证每个状态的滤波性能,得到更加精确和稳定的估计结果^[13].

4 结论

本文提出了一种简化高阶强跟踪容积卡尔曼滤波算法,该算法采用高阶容积规则,当量测方程为线性并且容积点的3个参数满足文中给出的计算策略时,推导了简化量测更新过程. 算法中强跟踪渐消因子的解法无需计算Jacobian矩阵,从而提高了算法的实用性. 将该算法应用到SINS/GPS组合导航系统中进行仿真实验,结果显示,该算法可以降低导航参数的估计误差,提高组合导航系统的定位精度,同时克服了模型参数突变或滤波器状态异常导致滤波精度下降的问题,滤波性能明显优于未做改进的CKF算法,更适用于SINS/GPS组合导航系统. 值得一提的是,利用状态方程部分线性化的结构,可以采取边缘滤波的方法,进一步减小计算量,提高系统的实时性^[18].

参考文献(References)

- [1] Gao S S, Zhong Y M, Li W. Robust adaptive filtering method for SINS/SAR integrated navigation system[J]. Aerospace Science and Technology, 2011, 15(6): 425-430.
- [2] 赵琳, 王小旭, 丁继成, 等. 组合导航系统非线性滤波算法综述[J]. 中国惯性技术学报, 2009, 17(1): 46-58. (Zhao L, Wang X X, Ding J C, et al. Overview of nonlinear filter methods applied in integrated navigation system[J]. J of Chinese Inertial Technology, 2009, 17(1): 46-58.)
- [3] 孙枫, 唐李军. 基于cubature Kalman filter的INS/GPS组合导航算法[J]. 控制与决策, 2012, 27(7): 1032-1036. (Sun F, Tang L J. INS/GPS integrated navigation filter algorithm based on cubature Kalman filter[J]. Control

- and Decision, 2012, 27(7): 1032-1036.)
- [4] 孙枫, 唐李军. Cubature卡尔曼滤波与Unscented卡尔曼滤波估计精度比较[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 303-308.
(Sun F, Tang L J. Estimation precision comparison of cubature Kalman filter and unscented Kalman filter[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 303-308.)
- [5] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filter[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [6] 王硕, 宋申民, 于滢, 等. 基于组合导航系统的非线性高斯滤波算法[J]. 控制与决策, 2016, 31(9): 1645-1653.
(Wang S, Song S M, Yu H, et al. Gaussian non-linear filter algorithm based on integrated navigation system[J]. Control and Decision, 2016, 31(9): 1645-1653.)
- [7] Jia B, Xin M, Cheng Y. High-degree cubature Kalman filter[J]. Automatica, 2013(49): 510-518.
- [8] 崔乃刚, 张龙, 王小刚, 等. 自适应高阶容积卡尔曼滤波在目标跟踪中的应用[J]. 航空学报, 2015, 36(12): 3885-3895.
(Cui N G, Zhang L, Wang X G, et al. Application of adaptive high-degree cubature Kalman filter in target tracking[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(12): 3885-3895.)
- [9] 张文杰, 王世元, 冯亚丽, 等. 基于Huber的高阶容积卡尔曼跟踪算法[J]. 物理学报, 2016, 65(8): 088401(1)-088401(9).
(Zhang W J, Wang S Y, Feng Y L, et al. Huber-based high-degree cubature Kalman tracking algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(8): 088401(1)-088401(9).)
- [10] 黄湘远, 汤霞清, 武萌. 5阶CKF在捷联惯导非线性对准中的应用研究[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(3): 633-638.
(Huang X Y, Tang X Q, Wu M. Application of 5th-degree CKF in SINS nonlinear initial alignment[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(3): 633-638.)
- [11] Chang G. Kalman filter with both adaptivity and robustness[J]. J of Process Control, 2014, 24: 81-87.
- [12] 薛海建, 王解, 郭晓松, 等. SINS非线性自对准中的强跟踪UKF算法设计[J]. 上海交通大学学报, 2015, 49(9): 1429-1434.
(Xue H J, Wang J, Guo X S, et al. Design of a strong tracking UKF for nonlinear self-alignment of SINS[J]. J of Shanghai Jiao Tong University, 2015, 49(9): 1429-1434.)
- [13] 郭泽, 缪玲娟, 赵洪松. 一种改进的强跟踪UKF算法及其在SINS大方位失准角初始对准中的应用[J]. 航空学报, 2014, 35(1): 203-214.
(Guo Z, Miao L J, Zhao H S. An improved strong tracking UKF algorithm and its application in SINS initial alignment under large azimuth misalignment angles[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2014, 35(1): 203-214.)
- [14] Wang L, Wu L, Guan Y, et al. Online sensor fault detection based on an improved strong tracking filter[J]. Sensors, 2015, 15(2): 4578-4591.
- [15] 杜占龙, 李小民. 基于多渐消因子强跟踪UKF和约束AR模型的故障估计与预测[J]. 控制与决策, 2014, 29(9): 1667-1672.
(Du Z L, Li X M. Fault estimation and prediction based on multiple fading factors strong tracking UKF and constrained AR model [J]. Control and Decision, 2014, 29(9): 1667-1672.)
- [16] 陈业, 胡昌华, 周志杰, 等. 一种改进的SR-CDKF算法及其在早期微小故障检测中的应用[J]. 自动化学报, 2012, 38(9): 1063-1074.
(Chen Y, Hu C H, Zhou Z J, et al. Method of improving square-root center difference Kalman filter with application to incipient failure detection[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(9): 1063-1074.)
- [17] 王小旭, 赵琳, 夏全喜, 等. 基于Unscented变换的强跟踪滤波器[J]. 控制与决策, 2010, 25(7): 1063-1068.
(Wang X X, Zhao L, Xia Q X, et al. Strong tracking filter based on unscented transformation[J]. Control and Decision, 2010, 25(7): 1063-1068.)
- [18] Chang G. Loosely coupled INS/GPS integration with constant lever arm using marginal unscented kalman filter[J]. The J of Navigation, 2014, 67: 419-436.

作者简介

郝顺义(1973—), 男, 教授, 博士, 从事惯性导航与组合导航等研究, E-mail: inslab888@126.com;

卢航(1993—), 男, 硕士生, 从事惯性导航与组合导航的研究, E-mail: 860634869@qq.com;

魏翔(1994—), 男, 硕士生, 从事惯性导航与组合导航的研究, E-mail: 1776138874@qq.com;

许明琪(1994—), 男, 硕士生, 从事惯性导航与组合导航的研究, E-mail: 272140950@qq.com.

(责任编辑: 齐 霖)