

具有随机效应维纳过程的步进应力加速退化试验优化设计

刘小平, 崔德军, 吴振宇, 张立杰[†]

- (1. 燕山大学 先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室, 河北 秦皇岛 066004;
2. 燕山大学 河北省重型机械流体动力传输与控制重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘 要: 针对个体差异普遍存在于产品性能退化过程中, 而当前基于退化模型的优化设计普遍没有考虑产品个体差异的问题, 提出一种具有随机效应维纳过程的步进应力加速退化试验优化设计方法. 基于累积失效原理, 建立考虑个体差异的多应力步进加速退化模型. 在给定测量间隔的前提下, 以总试验时间和加速应力为限制条件, 通过最小化正常使用应力条件下寿命分布的 p 分位寿命渐近方差, 对试验应力水平设置、各应力水平下的测量次数进行优化. 通过 LED 灯双应力步进加速退化试验优化设计案例, 验证所提出方法的有效性. 对最优试验方案进行参数敏感性分析, 所得结果表明, 当参数在小范围变动时最优试验方案具有非常好的鲁棒性.

关键词: 维纳过程; 步进应力加速退化试验; 随机效应; 优化设计; 渐近方差

中图分类号: TB114.37

文献标志码: A

Optimal design of step-stress accelerated degradation test based on Wiener process with random effects

LIU Xiao-ping, CUI De-jun, WU Zhen-yu, ZHANG Li-jie[†]

- (1. Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science of MOE, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China; 2. Hebei Provincial Key Laboratory of Heavy Machinery Fluid Power Transmission and Control, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: Individual differences are prevalent in the process of product performance degradation. However, in the current optimal design based on the degradation model, the individual differences are almost not considered. Therefore, an optimal design method of the step-stress accelerated degradation test with random effect Wiener process is proposed. Based on the cumulative failure model, a multi-step-stress accelerated degradation model with individual variations is established. Under the given measurement interval, and subject to the constrain of the total testing time and the accelerated stress, the setting of the test stress level and the measurement times at different stress levels are optimized by minimizing the asymptotic variance of the estimated p -quantile of product lifetime distribution under the normal stress condition. The proposed method has been verified by a double-step-stress accelerated degradation test of LED lamps. The parameter sensitivity of the optimized test is investigated and the optimal test plan is found to have good robustness when the parameters changed in a small range.

Keywords: Wiener process; step stress accelerated degradation test; random effects; optimal design; asymptotic variance

0 引 言

随着生产技术的进步以及材料性能的提升, 新制造产品的可靠性与寿命大幅提高, 给传统的基于寿命试验或加速寿命试验的可靠性评估和剩余寿命预测带来了巨大挑战^[1-2]. 与基于寿命信息的可靠性分析方法相比, 基于退化信息的可靠性分析方法不需要观测到产品失效, 可以在更少的试验时间和试验费用内获得相同的估计精度^[3], 因而得到了广泛的研究和应用^[4]. 加速退化试验 (accelerated degradation

test, ADT) 在高于正常工作应力下收集产品特征参数随时间变化的退化数据外推产品可靠性, 能够进一步减少试验时间, 受到人们的广泛青睐^[5-8].

为了在有限的试验经费和试验时间的约束下, 尽可能多地获得产品性能退化信息, 降低正常应力下产品寿命与可靠性估计的误差, 有必要对 ADT 的应力设置、时间分配等变量进行优化设计. Boulanger 等^[9] 提出了恒定应力加速退化试验 (constant stress accelerated degradation test, CSADT) 优化设计方案,

收稿日期: 2018-03-26; 修回日期: 2018-06-14.

基金项目: 河北省研究生创新项目 (CXZZBS2017040, CXZZSS2018035).

责任编辑: 柴利.

[†]通讯作者. E-mail: ljzhang@ysu.edu.cn.

对应力水平、样本分配和测量次数进行了优化. Park等^[10-11]分别以正常使用应力下平均寿命估计值的渐近方差最小和 p 分位寿命估计的渐近方差最小为目标,对CSADT和步进应力加速退化试验(step stress accelerated degradation test, SSADT)进行优化设计.更多最新的ADT优化设计研究可以参见文献[12-15].然而,以上的ADT优化设计都没有考虑个体差异的影响.受生产制造过程中环境、设备以及制造误差的随机影响,产品退化过程存在着不一致性,即个体差异.针对这个普遍存在的问题,一些学者引入随机效应建模个体差异,对常见的退化模型ADT优化设计进行了深入的研究. Tsai等^[16]在试验总费用限制下,通过最小化产品寿命分布 p 分位估计渐近方差对具有随机效应的伽马过程进行了优化设计,并研究了将随机效应误用为固定效应对 p 分位寿命分布估计精度的影响. Wang等^[17]以 p 分位渐近方差最小为目标,对具有随机效应的逆高斯退化模型的SSADT优化设计进行了研究. Ye等^[18]和Wang等^[2]对具有随机效应的逆高斯退化过程的CSADT优化设计进行了研究.然而,具有随机效应的维纳过程的ADT优化设计还没有得到深入的研究.

维纳过程模型是随机过程模型中一种重要的模型,能够描述非单调的退化过程,得到了广泛的应用研究^[19-21]. Tang等^[22]以最小化试验费用为目标,对基于维纳过程的SSADT进行优化,得到了最优样本数、总的监测次数和不同应力下的监测次数. Liao等^[23]以最小化 p 分位寿命渐近方差为目标,在总试验费用限制下对基于维纳过程的SSADT优化设计进行了研究.维纳过程模型ADT优化设计的最新研究可见文献[24-27].然而,由上述可知,目前针对维纳过程模型的ADT优化设计的研究都没有考虑个体差异的影响.因此,本文提出一种基于具有随机效应线性维纳过程的SSADT优化设计方法.在试验总时间和加速应力范围限制下,以正常使用应力条件下寿命分布 p 分位寿命估计渐近方差最小为目标,对试验应力水平设置和各应力水平下的测量次数进行优化设计.最后以LED灯SSADT优化设计为例,验证本文所提出方法的有效性.

1 SSADT建模

本节基于具有随机效应的线性维纳过程建立SSADT退化模型.

1.1 退化模型

假设产品性能退化过程 $\{y(t), t \geq 0\}$ 可以用线性维纳过程描述,则产品性能退化过程如下式所示:

$$y(t) = y(0) + \lambda t + \sigma_B B(t). \quad (1)$$

其中: $y(t)$ 为 t 时刻产品性能退化量; $y(0)$ 为性能退化量初值,不失一般性,令 $y(0) = 0$; λ 为漂移系数,表征产品性能退化速度,是仅与应力相关的确定函数; σ_B 为扩散系数,描述产品退化过程中的波动性; $B(t) \sim N(0, t)$ 为标准布朗运动.

受产品制造过程中环境、设备、制造误差等随机因素的影响,产品个体之间退化速度存在着明显的差异,这种差异在可靠性评定以及剩余寿命预测中不可忽略.因此,参照Peng等^[21]将漂移系数视为服从正太分布的随机变量来表征产品之间的退化差异,令 $\lambda \sim N(\mu_\lambda, \sigma_\lambda^2)$, λ 与 $B(t)$ 之间相互独立.

考虑到产品退化过程的连续性,当产品性能退化过程首次达到预先设定的失效阈值 w 时,认为产品失效.因此,可以采用首次时产品的寿命 T 进行定义

$$T = \inf\{t : y(t) \geq w | y(0) < w\}. \quad (2)$$

线性维纳过程的首达时服从逆高斯分布,在该性质的基础上, Peng等^[21]推导出具有随机效应的线性维纳过程的首达时概率密度分布函数和累积分布函数分别为

$$f(t) = \frac{\omega}{\sqrt{2\pi t^3(\sigma_\lambda^2 t + \sigma_B^2)}} \exp\left(-\frac{(\omega - \mu_\lambda t)^2}{2t(\sigma_\lambda^2 t + \sigma_B^2)}\right), \quad (3)$$

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\mu_\lambda t - \omega}{\sqrt{\sigma_B^2 t + \sigma_\lambda^2 t^2}}\right) + \exp\left(\frac{2\mu_\lambda \omega}{\sigma_B^2} + \frac{2\sigma_\lambda^2 \omega^2}{\sigma_B^4}\right) \times \Phi\left(-\frac{2\sigma_\lambda^2 \omega t + \sigma_B^2(\omega + \mu_\lambda t)}{\sigma_B^2 \sqrt{\sigma_B^2 t + \sigma_\lambda^2 t^2}}\right). \quad (4)$$

1.2 步进加速退化模型

在加速退化试验中,单一加速应力水平的提高总是有限度的,超过这个限度就会使产品失效机理发生改变,且很多产品失效机理复杂,其性能退化往往与多个应力相关.因此,不失一般性,为接近产品真实使用环境,提高产品性能退化速度而不改变产品失效机理,本节建立具有多个加速应力共同作用的广义加速模型.

假设产品性能退化受 H 种应力影响,每种应力都取 K 个应力水平, S_{hk} ($h = 1, 2, \dots, H, k = 1, 2, \dots, K$)表示应力 h 的第 k 个阶段取值.在多应力步进加速退化试验中,所有的试验样本都经历相同的应力加载历程,每种应力都以步进方式施加,应力转换时间都相同,试验剖面如图1所示.其中: S_{h0} 表示应力 h 在正常使用条件下的应力水平, t^k 表示完成第 k 步加速应力的时间, $t^0 = 0$.

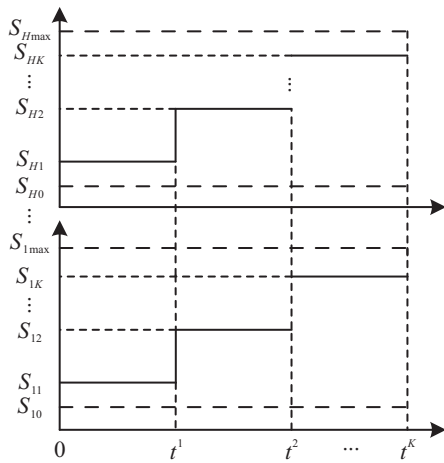


图1 H应力K水平SSADT试验剖面

式(1)中 λ 是表征产品性能退化速度的参数,是应力的函数.假设 H 种应力之间没有交互作用, $S^k = (S_{1k}, \dots, S_{hk})$ 表示SSADT中第 k 个阶段加速应力水平,加速模型^[28]可以表示为

$$\lambda(S^k) = a\psi(S^k). \tag{5}$$

其中: $\psi(S^k) = \exp\left(\sum_{h=1}^H r_h \varphi_h(S_{hk})\right)$; a, r_h 为待估计的参数; φ_h 为加速应力元素 S_{hk} 的已知函数, $h = 1, 2, \dots, H, k = 1, 2, \dots, K$.

为表示退化过程中的个体差异,令 a 为服从正态分布的随机变量 $a \sim N(\mu_a, \sigma_a^2)$,则

$$\begin{aligned} \mu_\lambda &= \mu_a \psi(S^k), \quad \sigma_\lambda^2 = \sigma_a^2 \psi^2(S^k), \\ \lambda(S^k) &\sim N(\mu_a \psi(S^k), \sigma_a^2 \psi^2(S^k)). \end{aligned}$$

由Nelson's 累积失效模型^[29]可知,下一阶段性能退化初始值是上一阶段性能退化的终止值,因此,步进应力加速退化试验性能退化过程可以描述为

$$y(t) = \begin{cases} \lambda^1 t + \sigma_B B(t), & 0 \leq t < t^1; \\ \lambda^1 t^1 + \lambda^2 (t - t^1) + \sigma_B B(t), & t^1 \leq t < t^2; \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{K-1} \lambda^k (t^k - t^{k-1}) + \lambda^K (t - t^{K-1}) + \sigma_B B(t), & t^{K-1} \leq t < t^K. \end{cases} \tag{6}$$

2 似然函数与信息矩阵

2.1 似然函数

由于步进应力加速退化试验更多地适用于内场试验,试验条件容易控制,为方便统计分析,假设 N 个试验样本的测量间隔与测量次数相同.根据第1节的退化模型,第 j 个试样在第 k 个应力阶段 S^k 下的第 i

次测量性能退化量为

$$y_{j,i}^k = a_j \Lambda(t_i^k) + \sigma_B B(t_i^k). \tag{7}$$

其中: $j = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, n_k; n_k$ 表示第 k 个应力阶段 S^k 下的测量次数;总测量次数 $m = \sum_{k=1}^K n_k; t_i^k$ 表示第 k 个应力阶段下第 i 次测量的时

间; $\Lambda(t_i^k) = \sum_{z=1}^{k-1} \psi(S^z)(t^z - t^{z-1}) + \psi(S^k)(t_i^k - t^{k-1}); t^0 = 0, t_{n_K}^K = t^K$.令 $\mathbf{P} = (\Lambda(t_1^1), \dots, \Lambda(t_{n_K}^K))^T, \mathbf{Y}_j = (y_j(t_1^1), \dots, y_j(t_{n_K}^K))^T$,则 \mathbf{Y}_j 服从均值为 $\bar{\mu}_j = \mu_a \mathbf{P}$ 、协方差为 Σ 的多变量正态分布.有

$$\Sigma = \Omega + \sigma_a^2 \mathbf{P} \mathbf{P}^T, \tag{8}$$

$$\Omega = \sigma_B^2 \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} t_1^1 & \dots & t_1^1 \\ & t_2^1 & \dots & t_2^1 \\ & & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & t_i^k & \dots & t_i^k \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_i^k & \dots & t_{n_K}^k \end{bmatrix}.$$

假设样本中各试样之间相互独立,则未知参数 θ 的对数似然函数如下:

$$\begin{aligned} L(\theta|Y) &= -\frac{Nm}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln|\Sigma| - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\mathbf{Y}_j - \mu_a \mathbf{P})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu_a \mathbf{P}). \end{aligned} \tag{9}$$

其中: $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}'_1, \dots, \mathbf{Y}'_N), \theta = (\mu_a, \sigma_a^2, \sigma_B^2, r_1, \dots, r_h)$ 为待估计参数向量,而

$$|\Sigma| = |\Omega| (1 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P}),$$

$$\Sigma^{-1} = \Omega^{-1} - \frac{\sigma_a^2}{1 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P}} \Omega^{-1} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \Omega^{-1}.$$

计算式(9)关于 μ_a 和 σ_a^2 的一阶偏导数并令其等于零,得到 μ_a 和 σ_a^2 的受限极大似然估计

$$\hat{\mu}_a(\sigma_B, \sigma_a, r_1, r_2) = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y}_j}{N \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P}}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_a^2(\sigma_B^2, r_1, r_2) &= \\ &= \frac{1}{N(\mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P})^2} \sum_{j=1}^N ((\mathbf{Y}_j - \hat{\mu}_a \mathbf{P})^T \times \\ &\quad \Omega^{-1} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \Omega^{-1} (\mathbf{Y}_j - \hat{\mu}_a \mathbf{P})) - \frac{1}{\mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P}}. \end{aligned} \tag{11}$$

将式(10)和(11)代入(9)中,得到未知参数的剖面对数似然函数为

$$L(\sigma_B^2, r_1, r_2 | \mathbf{Y}) =$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Nm}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \ln|\Omega| - \\
 & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^N \mathbf{Y}_j^T \Omega^{-1} \mathbf{Y}_j - \frac{\sum_{j=1}^N (\mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y}_j)^2}{\mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P}} \right\} - \\
 & \frac{N}{2} \ln \left\{ \frac{\sum_{j=1}^N (\mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y}_j)^2}{N \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P}} - \frac{\left(\sum_{j=1}^N \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y}_j \right)^2}{N^2 \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P}} \right\}. \tag{12}
 \end{aligned}$$

参数 σ_B^2 、 r_1 和 r_2 的极大似然估计值可采用多维搜索算法最大化剖面似然函数(12)得到. 将得到的极大似然估计值 $\hat{\sigma}_B^2$ 、 \hat{r}_1 和 \hat{r}_2 代入式(10)和(11), 便可得到 $\hat{\mu}_a$ 和 $\hat{\sigma}_a^2$.

2.2 信息矩阵

为使外推正常使用应力下寿命估计的偏差最小, 本文将渐近方差最小作为优化目标. 渐近方差的数学表达式难以直接求得, 而信息矩阵与方差-协方差矩阵互逆. 因此, 可以通过似然函数对未知参数的负二阶导数的期望来求取 Fisher 信息矩阵, 从而求取渐近方差. 为计算简单, 以两应力 SSADT 为例, 即 $H = 2$, $\theta = (\mu_a, \sigma_a^2, \sigma_B^2, r_1, r_2)$. 利用式(9)对未知参数 θ 的负二阶导数的期望可得 Fisher 信息矩阵为

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \mu_a^2}\right) = N \mathbf{P}^T \Sigma^{-1} \mathbf{P}, \\
 c_{12} &= c_{21} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \mu_a \partial \sigma_a^2}\right) = 0, \\
 c_{13} &= c_{31} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \mu_a \partial \sigma_B^2}\right) = 0, \\
 c_{14} &= c_{41} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \mu_a \partial r_1}\right) = N \mu_a \mathbf{P}_1^T \Sigma^{-1} \mathbf{P}, \\
 c_{15} &= c_{51} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \mu_a \partial r_2}\right) = N \mu_a \mathbf{P}_2^T \Sigma^{-1} \mathbf{P}, \\
 c_{22} &= E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial (\sigma_a^2)^2}\right) = \\
 & -\frac{N(\mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}{2(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}, \\
 c_{23} &= c_{32} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \sigma_a^2 \partial \sigma_B^2}\right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{N \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}}{2(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}, \\
 c_{24} &= c_{42} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \sigma_a^2 \partial r_1}\right) = \\
 & \frac{N \sigma_B^2 \mathbf{P}_1^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}}{(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}, \\
 c_{25} &= c_{52} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \sigma_a^2 \partial r_2}\right) = \\
 & \frac{N \sigma_B^2 \mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}}{(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}, \\
 c_{33} &= E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial (\sigma_B^2)^2}\right) = \\
 & -\frac{N}{2} \left(\frac{m-1}{(\sigma_B^2)^2} + \frac{1}{(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2} \right), \\
 c_{34} &= c_{43} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \sigma_B^2 \partial r_1}\right) = \\
 & -\frac{N \sigma_a^2 \mathbf{P}_1^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}}{(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}, \\
 c_{35} &= c_{53} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial \sigma_B^2 \partial r_2}\right) = \\
 & -\frac{N \sigma_a^2 \mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}}{(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}, \\
 c_{44} &= E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial r_1^2}\right) = \\
 & N \mu_a^2 \mathbf{P}_1^T \Sigma^{-1} \mathbf{P}_1 + \\
 & N \sigma_a^2 \frac{(\mathbf{P}_{11}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} + \mathbf{P}_1^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}_1)}{\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}} - \\
 & \frac{2N \sigma_a^4 \mathbf{P}_1^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}_1}{(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}, \\
 c_{45} &= c_{54} = E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial r_1 \partial r_2}\right) = \\
 & N \mu_a^2 \mathbf{P}_1^T \Sigma^{-1} \mathbf{P}_2 + \\
 & N \sigma_a^2 \frac{(\mathbf{P}_{12}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} + \mathbf{P}_1^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}_2)}{\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}} - \\
 & \frac{2N \sigma_a^4 \mathbf{P}_1^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}_2}{(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}, \\
 c_{55} &= E\left(-\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{Y})}{\partial r_2^2}\right) = N \mu_a^2 \mathbf{P}_2^T \Sigma^{-1} \mathbf{P}_2 + \\
 & N \sigma_a^2 \frac{(\mathbf{P}_{22}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} + \mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}_2)}{\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}} - \\
 & \frac{2N \sigma_a^4 \mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}_2}{(\sigma_B^2 + \sigma_a^2 \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P})^2}, \\
 \mathbf{P}_1 &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial r_1}, \mathbf{P}_2 = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial r_2}, \mathbf{P}_{11} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial r_1^2}, \\
 \mathbf{P}_{12} &= \mathbf{P}_{21} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial r_1 \partial r_2}, \mathbf{P}_{22} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial r_2^2}.
 \end{aligned}$$

3 优化设计

在这一部分,本文介绍SSADT的优化信息,包括目标函数、限制条件和优化算法.

3.1 目标函数

类似于Liao等^[23]的目标函数,本文将正常使用应力下产品寿命分布的 p 分位估计值 $\hat{\xi}_p$ 的渐近方差作为目标函数.

令 $\hat{\theta} = (\hat{\mu}_a, \hat{\sigma}_a^2, \hat{\sigma}_B^2, \hat{r}_1, \hat{r}_2)$ 为 θ 的极大似然估计值,将 $\hat{\theta}$ 代入式(4),可得正常使用应力下产品寿命 T 的分布函数 $\hat{F}_0(t)$,即

$$\begin{aligned} \hat{F}_0(t) = & \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_{\lambda_0}t - w}{\sqrt{\hat{\sigma}_B^2t + \hat{\sigma}_{\lambda_0}^2t^2}}\right) + \\ & \exp\left(\frac{2\hat{\mu}_{\lambda_0}w}{\hat{\sigma}_B^2} + \frac{2\hat{\sigma}_{\lambda_0}^2w^2}{\hat{\sigma}_B^4}\right) \times \\ & \Phi\left(-\frac{2\hat{\sigma}_{\lambda_0}^2wt + \hat{\sigma}_B^2(w + \hat{\mu}_{\lambda_0}t)}{\hat{\sigma}_B^2\sqrt{\hat{\sigma}_B^2t + \hat{\sigma}_{\lambda_0}^2t^2}}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\lambda_0} &= \hat{\mu}_a \exp(\hat{r}_1\varphi_1(S_{10}) + \hat{r}_2\varphi_2(S_{20})), \\ \hat{\sigma}_{\lambda_0}^2 &= \hat{\sigma}_a^2 \exp^2(\hat{r}_1\varphi_1(S_{10}) + \hat{r}_2\varphi_2(S_{20})). \end{aligned}$$

由式(11)可得在正常使用应力下产品的 p 分位寿命为 $\hat{\xi}_p = \hat{F}_0^{-1}(p)$. 利用 δ -method,可得产品在正常使用条件下的 p 分位寿命的渐近方差 $\text{Avar}(\hat{\xi}_p)$ ^[23]如下所示:

$$\text{Avar}(\hat{\xi}_p) = \frac{1}{(f(\hat{F}_0^{-1}(p)))^2} \text{Var}(F_0(\hat{\xi}_p)). \quad (15)$$

其中: $\text{Var}(F_0(\hat{\xi}_p)) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{H}'$, \mathbf{I}^{-1} 为Fisher信息矩阵的逆矩阵, \mathbf{H} 为 $F_0(t)$ 对待估计参数 θ 的一阶导数, \mathbf{H}' 为 \mathbf{H} 的转置,有

$$\mathbf{H} = \frac{\partial F_0(t)}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial F_0(t)}{\partial \mu_a}, \frac{\partial F_0(t)}{\partial \sigma_a^2}, \frac{\partial F_0(t)}{\partial \sigma_B^2}, \frac{\partial F_0(t)}{\partial r_1}, \frac{\partial F_0(t)}{\partial r_2}\right).$$

令

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{\sigma_B^2t + \sigma_{\lambda_0}^2t^2}, \quad c_1 = \frac{\mu_{\lambda_0}t - w}{\sqrt{\sigma_B^2t + \sigma_{\lambda_0}^2t^2}}, \\ c_2 &= \exp\left(\frac{2\mu_{\lambda_0}w}{\sigma_B^2} + \frac{2\sigma_{\lambda_0}^2w^2}{\sigma_B^4}\right), \\ c_3 &= -\frac{2\sigma_{\lambda_0}^2wt + \sigma_B^2(w + \mu_{\lambda_0}t)}{\sigma_B^2\sqrt{\sigma_B^2t + \sigma_{\lambda_0}^2t^2}}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(t)}{\partial \mu_a} &= \frac{t \exp(r_1\varphi_1(S_{10}) + r_2\varphi_2(S_{20}))}{c_0} \phi(c_1) + \frac{2w \exp(r_1\varphi_1(S_{10}) + r_2\varphi_2(S_{20}))}{\sigma_B^2} c_2 \Phi(c_3) - \\ & \frac{t \exp(r_1\varphi_1(S_{10}) + r_2\varphi_2(S_{20}))}{c_0} c_2 \phi(c_3), \\ \frac{\partial F_0(t)}{\partial \sigma_a^2} &= -\frac{t^2(\mu_{\lambda_0}t - w) \exp^2(r_1\varphi_1(S_{10}) + r_2\varphi_2(S_{20}))}{2c_0^3} \phi(c_1) + \frac{2w^2 \exp^2(r_1\varphi_1(S_{10}) + r_2\varphi_2(S_{20}))}{(\sigma_B^2)^2} c_2 \Phi(c_3) - \\ & \frac{t^2 \exp^2(r_1\varphi_1(S_{10}) + r_2\varphi_2(S_{20}))(3\sigma_B^2w + 2\sigma_{\lambda_0}^2wt - \sigma_B^2\mu_{\lambda_0}t)}{2\sigma_B^2c_0^3} c_2 \phi(c_3), \\ \frac{\partial F_0(t)}{\partial \sigma_B^2} &= -\frac{t(\mu_{\lambda_0}t - w)}{2c_0^3} \phi(c_1) - \left(\frac{2\mu_{\lambda_0}w}{(\sigma_B^2)^2} + \frac{4\sigma_{\lambda_0}^2w^2}{(\sigma_B^2)^3}\right) c_2 \Phi(c_3) + \\ & \frac{(\sigma_B^2)^2t(\mu_{\lambda_0}t + w) + 2\sigma_{\lambda_0}^2wt^2(3\sigma_B^2 + 2\sigma_{\lambda_0}^2t)}{2(\sigma_B^2)^2c_0^3} c_2 \phi(c_3), \\ \frac{\partial F_0(t)}{\partial r_1} &= \frac{\varphi_1(S_{10})t^2(\sigma_B^2\mu_{\lambda_0} + \sigma_{\lambda_0}^2w)}{c_0^3} \phi(c_1) + 2\varphi_1(S_{10})\left(\frac{\mu_{\lambda_0}w}{\sigma_B^2} + \frac{2\sigma_{\lambda_0}^2w^2}{(\sigma_B^2)^2}\right) c_2 \Phi(c_3) - \\ & \frac{\varphi_1(S_{10})t^2(3\sigma_{\lambda_0}^2\sigma_B^2w + 2(\sigma_{\lambda_0}^2)^2wt + (\sigma_B^2)^2\mu_{\lambda_0})}{\sigma_B^2c_0^3} c_2 \phi(c_3), \\ \frac{\partial F_0(t)}{\partial r_2} &= \frac{\varphi_2(S_{20})t^2(\sigma_B^2\mu_{\lambda_0} + \sigma_{\lambda_0}^2w)}{c_0^3} \phi(c_1) + 2\varphi_2(S_{20})\left(\frac{\mu_{\lambda_0}w}{\sigma_B^2} + \frac{2\sigma_{\lambda_0}^2w^2}{(\sigma_B^2)^2}\right) c_2 \Phi(c_3) - \\ & \frac{\varphi_2(S_{20})t^2(3\sigma_{\lambda_0}^2\sigma_B^2w + 2(\sigma_{\lambda_0}^2)^2wt + (\sigma_B^2)^2\mu_{\lambda_0})}{\sigma_B^2c_0^3} c_2 \phi(c_3). \end{aligned}$$

其中: $\Phi(\cdot)$ 为标准正太分布函数, $\phi(\cdot)$ 为标准正太分布概率密度函数.

3.2 SSADT的约束条件

对于加速退化试验,应力的提高不是无限制的,超过了一定的限制就会改变产品失效机理. 因此,合

理选择加速应力区间 $[S_{h1}, S_{h \max}]$ 是试验的一个限制条件. 由图1可知,应力水平取值需要满足条件 $S_{h0} < S_{h1} < \dots < S_{hK} \leq S_{h \max}$,相应的退化速率需要满足条件 $\lambda_0(S) < \lambda_1(S) < \dots < \lambda_K(S) \leq \lambda_{\max}(S)$.

由于试验费用限制或客户指定试验总时间,需

要在给定试验时间内完成SSADT. 本文中, 给定试验总时间 τ , 根据经验设定测量间隔 Δt . 每间隔 Δt 对各式性能退化进行一次测量, 总测量次数 $m = \lceil \tau/\Delta t \rceil = \sum_{k=1}^K n_k$, 于是, 不同应力下的测量时间的分配转化为不同应力水平下测量次数 n_k 的分配. 为使各退化阶段都有足够的退化信息, 退化率小的应力阶段测量次数应不小于退化率大的阶段, 且每个应力阶段下测量次数不应少于两次, 即 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_K \geq 2$.

综上, 优化问题可以描述为

$$\begin{aligned} & \min \text{Avar}(\hat{\xi}_p); \\ & \text{s.t. } S_{h0} < S_{h1} < \dots < S_{hK} \leq S_{h\max}, \\ & \lambda_0(S) < \lambda_1(S) < \dots < \lambda_K(S) \leq \lambda_{\max}(S), \\ & n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_K \geq 2, \\ & m \times \Delta t = \sum_{k=1}^K n_k \times \Delta t \leq \tau. \end{aligned}$$

3.3 优化算法

优化算法流程如图2所示.

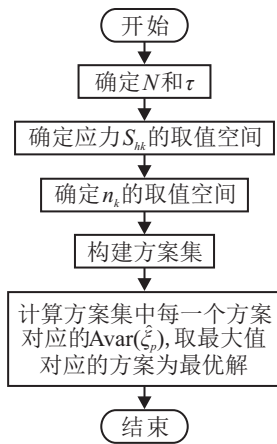


图2 优化算法流程

- 1) 根据试验费用及试验台试验能力确定样本数量 N , 再根据客户要求或试验费用确定试验总时间 τ .
- 2) 根据实际应用情况确定各应力水平和时间分配的搜索步长, 依据约束条件确定应力水平的取值空间和测量次数的取值空间.
- 3) 根据各变量的取值空间构建整个优化问题解的方案集.
- 4) 计算方案集中每一个方案对应的目标函数, 取目标函数最小的方案作为最优试验方案.

4 应用实例

LED灯是典型的高可靠长寿命产品, 基于ADT方法可以有效减少试验时间. Huang等^[8]基于维纳过

程模型建立了LED灯SSADT模型, 在不同应力下得到了LED灯的平均失效时间. 肖承地等^[30]基于双应力CSADT对LED灯进行了可靠性评估, 用相对光通量输出表征LED灯的性能退化特征, 不同应力下退化路径如图3所示. 本节在文献[30]提供的LED灯性能退化试验数据的基础上, 基于具有随机效应的维纳过程进行两应力三水平的SSADT优化设计, 以验证所提出方法的有效性.

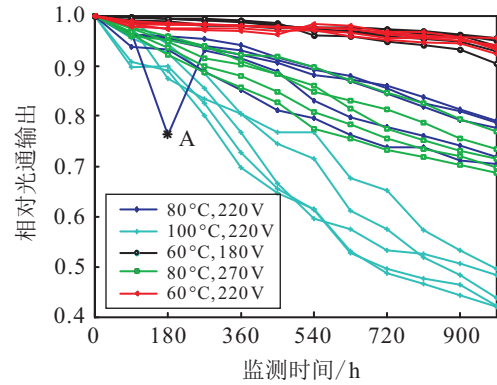


图3 不同应力下各式样的相对光通量输出退化轨迹

4.1 初始参数的获取

由图3可以看出, 不同应力下, LED灯光通量输出随时间逐渐下降. 图3中存在一个奇异点A, 该点误差明显较大. 为保持LED灯性能退化趋势, 将A点相邻两点的平均值(0.9485)代替A点的取值. 根据下式对原始数据作等效处理, 以使退化模型中的大多数参数为正数:

$$y(t) = y(0) - x. \quad (16)$$

其中: $y(t)$ 为等效性能退化量, $y(0) = 1$ 为产品性能初始值, x 为性能退化量的原始测量值.

结合文献[30], 根据式(16)可得, LED灯等效性能退化失效阈值 $w = 0.3$. 不考虑应力之间的相互影响, 加速模型 $\lambda = a \exp(r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2)$. 其中: $a \sim N(\mu_a, \sigma_a^2)$; $\varphi_1 = 1/(273.15 + S_{1k})$, S_{1k} 为温度应力; $\varphi_2 = \log(S_{2k})$, S_{2k} 为电压. 基于Tang等^[6]提出的两步极大似然估计方法对等效的LED灯CSADT数据计算可得优化设计模型的初始参数为: $\hat{\mu}_a = 11.7288$, $\hat{\sigma}_a^2 = 2.6274 \times 10^{-2}$, $\hat{\sigma}_B^2 = 2.6866 \times 10^{-6}$, $\hat{r}_1 = -6.1300 \times 10^3$, $\hat{r}_2 = 1.2002$.

4.2 LED灯SSADT优化设计

将本文方法记为M0, 文献[23]提出的基于维纳过程的SSADT优化设计方法记为M1, 二者进行对比, 以验证本文所提出方法的正确性.

与文献[30]保持一致, LED灯正常使用应力为 $S_{10} = 25^\circ\text{C}$, $S_{20} = 220\text{V}$. 加速应力 S_{1k} 取值范围

[40°C, 100°C], S_{2k} 取值范围为 [230 V, 270 V]. 为保持良好的外推性能, 令 S_{11} 取值上限不超过 60°C, S_{21} 取值上限不超过 240 V. 从最低加速应力起, 温度以 5°C 为步长, 电压以 5 V 为步长, 测量次数以 1 为步长, 搜索满足约束条件的所有可能取值, 构建应力取值空间和测量次数分配空间, 从而构建出 SSADT 优化方案集.

令样本数 $N = 5$, 根据 3.3 节的优化算法, 表 1 给出了方法 M0 在测量间隔 $\Delta t = 90$ h, 总试验时间 τ 分别为 810 h、990 h、1350 h、1800 h 和 2250 h 的

SSADT 优化结果. M1 不考虑个体差异, 模型参数为 $\hat{\mu}_a = 11.7288, \hat{\sigma}_B^2 = 2.6866 \times 10^{-6}, \hat{r}_1 = -6.1300 \times 10^3$ 和 $\hat{r}_2 = 1.2002$. 表 2 给出了与 M0 相同条件下 M1 的 SSADT 优化结果. 从表 1 和表 2 可以看出, 随着总试验时间的增加, 正常使用应力下寿命分布的 p 分位渐近方差逐渐减小. 这表明, 可以通过增加试验总时间来提高 $\hat{\xi}_p$ 的估计精度. 对比表 1 和表 2 可以发现, 在相同条件下, M0 的渐近方差小于 M1 的渐近方差, 得到的最优设计方案也不同, 因此, 在试验优化设计时有必要考虑产品的个体差异.

表 1 M0 在不同的总试验时间下的最优试验方案

序号	τ/h	m	$S_1(T)/^\circ\text{C}$			$S_2(U)/\text{V}$			n_k			$\text{Avar}(\hat{\xi}_{0.1})$	$\hat{\xi}_{0.1}$
1	810	9	60	85	100	230	235	270	4	3	2	1.01×10^6	7964
2	990	11	60	80	100	230	235	270	5	4	2	7.70×10^5	7964
3	1350	15	60	80	100	230	235	270	7	6	2	5.23×10^5	7964
4	1800	20	60	80	100	230	235	270	9	9	2	3.88×10^5	7964
5	2250	25	60	80	100	230	235	270	11	11	3	3.02×10^5	7964

表 2 M1 在不同的总试验时间下的最优试验方案

序号	τ/h	m	$S_1(T)/^\circ\text{C}$			$S_2(U)/\text{V}$			n_k			$\text{Avar}(\hat{\xi}_{0.1})$	$\hat{\xi}_{0.1}$
1	810	9	60	75	100	230	260	270	4	3	2	1.57×10^6	7965
2	990	11	60	75	100	230	260	270	5	4	2	1.18×10^6	7965
3	1350	15	60	75	100	230	260	270	7	6	2	8.13×10^5	7965
4	1800	20	60	75	100	230	260	270	9	9	2	5.97×10^5	7965
5	2250	25	60	75	100	230	260	270	11	11	3	4.72×10^5	7965

为了研究测量间隔对最优试验方案的影响, 表 3 给出了在总试验时间 $\tau = 990$ h 时不同测量间隔下的最优试验方案, 图 4 为测量间隔与 $\text{Avar}(\hat{\xi}_{0.1})$ 的关系的直观显示. 从表 3 和图 4 可以看出: 正常使用应力下的 $\text{Avar}(\hat{\xi}_{0.1})$ 随着测量间隔 Δt 的增加而减小; 同

时随着 Δt 的增加, 测量次数也会相应减少, 从而导致退化信息不足. 因此, 在试验总时间确定的情况下, 可以通过合理增大测量间隔的方式提高 $\hat{\xi}_p$ 的估计精度, 也可以将 Δt 作为待优化变量之一, 在优化设计时加以考虑.

表 3 $\tau = 990$ h 时 M0 在不同测量间隔下的最优试验方案

序号	Δt	m	$S_1(T)/^\circ\text{C}$			$S_2(U)/\text{V}$			n_k			$\text{Avar}(\hat{\xi}_{0.1})$
1	22	45	60	80	100	230	235	270	19	19	7	1.46×10^6
2	30	33	60	80	100	230	235	270	14	14	5	1.37×10^6
3	33	30	60	80	100	230	235	270	13	13	4	1.33×10^6
4	45	22	60	80	100	230	235	270	9	9	4	1.22×10^6
5	55	18	60	80	100	230	235	270	8	8	2	1.09×10^6
6	66	15	60	80	100	230	235	270	7	6	2	0.99×10^6
7	90	11	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.77×10^6

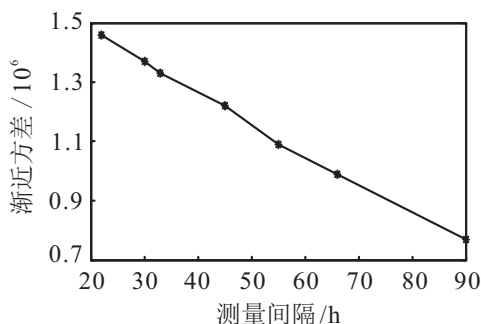


图 4 M0 最优试验方案渐近方差随测量间隔变化趋势

5 参数敏感性分析

对 SSADT 进行优化设计时, 需要明确产品退化模型及加速模型中未知参数的取值, 这些参数值是由专家知识、经验、摸底试验或同类产品试验数据计算得到的估计值. 估计值 $\hat{\theta}$ 与真实值 θ 通常存在一定的偏差, 而偏差可能会影响试验精度. 因此, 非常有必要研究偏差对试验方案的影响. 下面将研究 SSADT 最优试验方案对参数的敏感性. 不失一般性, 假设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ 分别代表参数 $\mu_a, \sigma_a^2, \sigma_B^2, r_1, r_2$ 的预

测误差,即模型参数分别为 $(1 + \varepsilon_1)\mu_a$ 、 $(1 + \varepsilon_2)\sigma_a^2$ 、 $(1 + \varepsilon_3)\sigma_B^2$ 、 $(1 + \varepsilon_4)r_1$ 、 $(1 + \varepsilon_5)r_2$. 为了减少计算次数,根据 $L_{18}(3^5)$ 正交试验策略得到了 $\tau = 990\text{ h}$ 、

$\Delta t = 90\text{ h}$ 时相同的试验限制条件下,不同参数组合的最优试验方案,如表4所示.

表4 先验参数不同偏差下的最优试验方案

序号	$\varepsilon_1/\%$	$\varepsilon_2/\%$	$\varepsilon_3/\%$	$\varepsilon_4/\%$	$\varepsilon_5/\%$	$S_1(T)/^\circ\text{C}$			$S_2(U)/\text{V}$			n_k	$\text{Avar}(\hat{\xi}_{0.1})$	$\hat{\xi}_{0.1}$		
1	5	5	5	5	5	60	85	100	230	235	270	5	4	2	0.72×10^6	9203
2	5	0	0	0	0	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.70×10^6	7831
3	5	-5	-5	-5	-5	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.31×10^6	5960
4	0	5	5	0	0	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.68×10^6	7711
5	0	0	0	-5	-5	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.33×10^6	5951
6	0	-5	-5	5	5	60	85	100	230	235	270	5	4	2	1.15×10^6	10059
7	-5	5	0	5	-5	60	85	100	230	235	270	5	4	2	1.93×10^6	10842
8	-5	0	-5	0	5	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.49×10^6	7428
9	-5	-5	5	-5	0	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.14×10^6	5056
10	5	5	-5	-5	0	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.12×10^6	5002
11	5	0	5	5	-5	60	85	100	230	235	270	5	4	2	1.47×10^6	10259
12	5	-5	0	0	5	60	85	100	230	235	270	5	4	2	0.35×10^6	6916
13	0	5	0	-5	5	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.04×10^6	4160
14	0	0	-5	5	0	60	85	100	230	235	270	5	4	2	1.69×10^6	10720
15	0	-5	5	0	-5	60	80	100	230	235	270	5	4	2	1.16×10^6	8496
16	-5	5	-5	0	-5	60	80	100	230	235	270	5	4	2	1.63×10^6	9266
17	-5	0	5	-5	5	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.05×10^6	4210
18	-5	-5	0	5	0	60	85	100	230	235	270	5	4	2	1.46×10^6	10360
19	0	0	0	0	0	60	80	100	230	235	270	5	4	2	0.77×10^6	7964

由表4数据可知,试验设计方案对参数变化具有较好的鲁棒性,模型参数的变化对SSADT各阶段的温度应力水平产生轻微的影响,对电压应力水平的设置和各阶段的测量次数没有影响.相对而言,最优试验方案对模型参数 r_1 较为敏感,而对其他参数的敏感性较小.因此,为了获得最优的加速退化试验方案,应尽可能准确地给出模型参数 r_1 的先验估计.

6 结论

本文在假设产品性能退化特征服从维纳过程的基础上,提出了考虑产品个体差异的SSADT优化设计方法.以正常使用应力下产品寿命分布的 p 分位点寿命渐近方差最小作为目标函数,在测量间隔已知的情况下,以试验总时间和应力使用范围作为限制条件,对SSADT应力水平设置、不同应力下的测量次数进行了优化设计.对LED灯双应力步进加速退化试验进行了最优化设计,与不考虑个体差异的SSADT优化结果进行对比,验证了本文所提出方法的有效性.分析了试验总时间以及测量间隔对可靠性估计精度的影响,结果表明,可以合理增加试验时间或者增加测量间隔来提高可靠性评估的精度.采用正交试验方案,对本文所提出的最优试验方案进行参数敏感性分析,分析结果表明,最优试验方案对预估模型参数的不确定性具有很好的鲁棒性.

参考文献(References)

- [1] Duan F, Wang G. Optimal step-stress accelerated degradation test plans for inverse Gaussian process based on proportional degradation rate model[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2018, 88(2): 305-328.
- [2] Wang H, Zhao Y, Ma X, et al. Optimal design of constant-stress accelerated degradation tests using the M-optimality criterion[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2017, 164: 45-54.
- [3] Meeker W Q, Escobar L A. Statistical methods for reliability data[M]. New York: Wiley, 1998: 333-336.
- [4] Shahraki A F, Yadav O P, Liao H. A review on degradation modelling and its engineering applications[J]. International Journal of Performability Engineering, 2017, 13(3): 299-314.
- [5] Hao H, Su C, Li C P. LED lighting system reliability modeling and inference via random effects Gamma process and Copula function[J]. International Journal of Photoenergy, 2015(1): 1-8.
- [6] Tang S J, Yu C Q, Wang X, et al. Remaining useful life prediction of lithium-ion batteries based on the Wiener process with measurement error[J]. Energies, 2014, 7(2): 520-547.
- [7] Si X S, Wang W, Hu C H, et al. A Wiener-process-based degradation model with a recursive filter algorithm for remaining useful life estimation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 35(1): 219-237.

- [8] Huang J, Golubovi D S, Koh S, et al. Lumen degradation modeling of white-light leds in step stress accelerated degradation test[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 154: 152-159.
- [9] Boulanger M, Escobar L A. Experimental design for a class of accelerated degradation tests[J]. *Technometrics*, 1994, 36(3): 260-272.
- [10] Park J I, Yum B J. Optimal design of accelerated degradation tests for estimating mean lifetime at the use condition[J]. *Engineering Optimization*, 1997, 28(3): 199-230.
- [11] Park S J, Yum B J. Optimal design of accelerated degradation tests under step-stress loading[J]. *Bulletin of the Int Statistical Institute*, 2001, 3: 353-354.
- [12] Pan Z Q, Sun Q. Optimal design for step-stress accelerated degradation test with multiple performance characteristics based on Gamma processes[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2014, 43(2): 298-314.
- [13] Wang Y S, Zhang C H, Zhang S F, et al. Optimal design of constant stress accelerated degradation test plan with multiple stresses and multiple degradation measures[J]. *Journal of Risk and Reliability*, 2015, 229(1): 83-93.
- [14] Wu S J, Huang S R. Planning two or more level constant-stress accelerated life tests with competing risks[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017, 158: 1-8.
- [15] Li X Y, Hu Y Q, Zhou J D, et al. Bayesian step stress accelerated degradation testing design: A multi-objective Pareto-optimal approach[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2018, 171: 9-17.
- [16] Tsai C C, Tseng S T, Balakrishnan N. Optimal design for degradation tests based on Gamma processes with random effects[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61(2): 604-613.
- [17] Wang H, Wang G J, Duan F J. Planning of step-stress accelerated degradation test based on the inverse Gaussian process[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 154: 97-105.
- [18] Ye Z S, Chen L P, Tang L C, et al. Accelerated degradation test planning using the inverse Gaussian process[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2014, 63(3): 750-763.
- [19] Ye Z S, Chen N, Shen Y. A new class of Wiener process models for degradation analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2015, 139: 58-67.
- [20] Wang X, Balakrishnan N, Guo B. Residual life estimation based on a generalized Wiener degradation process[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 124: 13-23.
- [21] Peng C Y, Tseng S T. Mis-specification analysis of linear degradation models[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2009, 58(3): 444-455.
- [22] Tang L C, Yang G Y, Xie M. Planning of step-stress accelerated degradation test[C]. 2004 Symposium on Reliability and Maintainability. *Rams: IEEE*, 2004: 287-292.
- [23] Liao C M, Tseng S T. Optimal design for step-stress accelerated degradation tests[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2006, 55(1): 59-66.
- [24] Tsai T R, Lio Y L, Jiang N. Optimal decisions on the accelerated degradation test plan under the wiener process[J]. *Quality Technology & Quantitative Management*, 2014, 11(4): 461-470.
- [25] Hu C H, Lee M Y, Tang J. Optimum step-stress accelerated degradation test for Wiener degradation process under constraints[J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 241(2): 412-421.
- [26] Sung S I, Yum B J. Optimal design of step-stress accelerated degradation tests based on the Wiener degradation process[J]. *Quality Technology & Quantitative Management*, 2016, 13(4): 367-393.
- [27] Wang H, Zhao Y, Ma X B. Mechanism equivalence in designing optimum step-stress accelerated degradation test plan under Wiener process[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 4440-4451.
- [28] 葛燕燕, 姜同敏, 韩少华, 等. 基于D优化的多应力加速退化试验设计[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 34(4): 846-853.
(Ge Z Z, Jiang T M, Han S H, et al. Design of accelerated degradation testing with multiple stresses based on D optimality[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 34(4): 846-853.)
- [29] Nelson W. *Accelerated testing: Statistical models, test plans and data analysis*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1990: 493-498.
- [30] 肖承地, 刘春军, 刘卫东, 等. 基于加速性能退化的LED灯具可靠性评估[J]. *发光学报*, 2014, 35(9): 1143-1151.
(Xiao C D, Liu C J, Liu W D, et al. Reliability assessment of LED lamp based on acceleration degradation test[J]. *Chinese Journal of Luminescence*, 2014, 35(9): 1143-1151.)

作者简介

刘小平(1989—),男,博士生,从事液压系统设计与元件可靠性的研究, E-mail: Liu_xp163@163.com;

崔德军(1994—),男,硕士生,从事可靠性与寿命预测的研究, E-mail: cuidejunysu@hotmail.com;

吴振宇(1995—),男,硕士生,从事可靠性与寿命预测的研究, E-mail: zhenyuwu5@hotmail.com;

张立杰(1969—),男,教授,博士生导师,从事液压控制及可靠性、机器人控制等研究, E-mail: ljzhang@ysu.edu.cn.

(责任编辑: 李君玲)