

# 基于 IMU/UWB 的两轮自平衡车轨迹跟踪控制器设计与实现

宁一高, 岳明<sup>†</sup>, 许媛, 于紫龙

(大连理工大学汽车工程学院, 辽宁大连 116024)

**摘要:** 两轮自平衡车的精确轨迹跟踪技术是实现其自主运动控制的基础. 为此, 采用拉格朗日法建立两轮自平衡车的动力学模型, 并据此提出基于非奇异终端滑模 (NTSM) 和线性二次型调节器 (LQR) 的两轮自平衡车轨迹跟踪控制器. 在 Matlab/Simulink 环境下, 对所设计的轨迹跟踪控制器进行性能仿真, 结果显示, 两轮自平衡车能够精确跟踪所给定的参考轨迹, 初步表明了所提出轨迹跟踪控制器的有效性. 在此基础上, 使用 STM32F103C8T6 单片机, 并结合惯性测量组件 (IMU) 和超宽带 (UWB) 定位技术对所设计的轨迹跟踪控制器进行硬件实现. 实验结果表明, 两轮自平衡车能够对给定的参考轨迹进行良好跟踪, 横坐标偏差小于 0.2 m, 纵坐标偏差小于 0.2 m, 转向角偏差小于 0.07 rad, 车身倾角除了初始时的波动外均小于 0.05 rad.

**关键词:** 两轮自平衡车; 自主运动控制; 轨迹跟踪; 非奇异终端滑模; 线性二次型调节器; IMU/UWB

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Design and implementation of trajectory tracking controller for two-wheeled self-balancing vehicles based on IMU/UWB

NING Yi-gao, YUE Ming<sup>†</sup>, XU Yuan, YU Zi-long

(School of Automotive Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** Trajectory tracking is the technology foundation for the autonomous motion control of two-wheeled self-balancing vehicles. Therefore, a dynamical model of a two-wheeled self-balancing vehicle is established using the Lagrangian approach, and a trajectory tracking controller based on the non-singular terminal sliding mode (NTSM) and linear quadratic regulator (LQR) is proposed. Then, a simulation analysis is conducted for the proposed trajectory tracking controller in Matlab/Simulink, and the results show that the vehicle can track the reference trajectory accurately, which validates the effectiveness of the trajectory tracking controller preliminarily. On that basis, combining the inertial measurement unit (IMU) and the ultra wide band (UWB) location technology, the hardware implementation of the controller is presented with the single chip STM32F103C8T6. And the experimental results show that the vehicle can track the reference trajectory well, the horizontal axis deviation is less than 0.2 m, the vertical axis deviation is less than 0.2 m, the steering angle deviation is less than 0.07 rad, and the tilt angle of the vehicle body is less than 0.05 rad except the fluctuation at the start.

**Keywords:** two-wheeled self-balancing vehicles; autonomous motion control; trajectory tracking; non-singular terminal sliding mode (NTSM); linear quadratic regulator (LQR); IMU/UWB

## 0 引言

两轮自平衡车以其结构紧凑、转向灵活和耗能低等诸多优点, 在家居服务、交通运输和空间探测等领域具有重要的实用价值, 而精确的轨迹跟踪能力是实现其自主运动并执行相应任务的技术基础<sup>[1-4]</sup>. 然而, 不同于普通的轮式移动机器人, 两轮自平衡车属于典型的欠驱动、非线性和强耦合系统, 同时受制于非完整约束, 这导致其轨迹跟踪控制的实现极具挑战性<sup>[5-7]</sup>.

目前, 国内外针对两轮自平衡车控制问题已经进行了广泛研究. 动态面控制<sup>[8]</sup>、非线性优化控制<sup>[9]</sup>等方法很好地实现了两轮自平衡车的车身平衡控制, 但未涉及运动控制. 终端滑模控制<sup>[10]</sup>、能量成形<sup>[11]</sup>等方法, 在保证车身平衡的同时, 成功地解决了两轮自平衡车的前向控制问题, 但并未进行转向控制的研究. 另外, 文献 [12] 采用极点配置的方法设计状态反馈控制器, 能有效控制两轮自平衡车的前行和转向, 实现对电磁导引线的路径跟踪. 然而, 两轮自平衡车

收稿日期: 2018-03-27; 修回日期: 2018-08-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61573078, 61873047); 辽宁省自然科学基金项目 (20170540171).

责任编辑: 郭戈.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: yueming@dlut.edu.cn.

的轨迹跟踪,是指跟踪一条以时间为参数的几何曲线(参考轨迹),不仅对路径有要求,同时具有时间要求,也即在特定的时间到达特定的位置<sup>[13]</sup>.为此,自适应反步控制<sup>[3]</sup>、终端滑模控制<sup>[7]</sup>、基于模糊基函数网络的自适应反步滑模控制<sup>[14]</sup>、基于滑模和直接模糊的复合控制<sup>[15]</sup>以及模型预测控制<sup>[16]</sup>等多种方法被用于两轮自平衡车的轨迹跟踪控制.但这些研究侧重于理论探索,并未开展相关的实验研究.另外,传统终端滑模控制存在奇异性问题<sup>[17]</sup>,而模型预测控制需要滚动优化,计算量大,在实际应用时难度较大.

基于以上研究,本文提出一种结合线性二次型调节器(Linear quadratic regulator, LQR)和非奇异终端滑模(Non-singular terminal sliding mode, NTSM)的两轮自平衡车轨迹跟踪控制器,可有效克服传统终端滑模控制的奇异性问题,而且计算简单,易于实现.采用惯性测量组件(Inertial measurement unit, IMU)和超宽带(Ultra wide band, UWB)定位技术对两轮自平衡车位姿进行测量,并以STM32F103C8T6单片机为核心编写控制程序,实现两轮自平衡车的轨迹跟踪控制.

## 1 动力学模型的建立

首先建立大地坐标系 $\Sigma oxyz$ ,并对实验用两轮自平衡车进行合理的抽象和简化<sup>[7]</sup>,如图1所示.其中: $x_v = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi$ 为两轮自平衡车的前向位移, $x, y$ 为位置坐标, $\varphi$ 为转向角, $\theta$ 为车身倾角, $\tau_l, \tau_r$ 分别为左、右电机的输出扭矩,测量或计算出的相关结构参数如表1所示(各参数的数值均为国际单位).

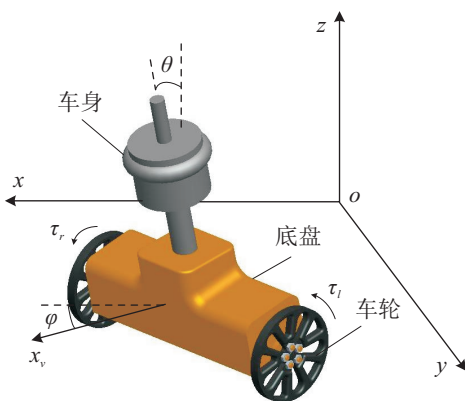


图1 两轮自平衡车简化模型

假设车轮与地面间没有滑动,两轮自平衡车满足非完整约束

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0. \quad (1)$$

由于拉格朗日建模法不需考虑系统内力,建模过程简洁,非常适合于多变量、非线性系统动力学模型

表1 两轮自平衡车结构参数

参数	符号	数值
车轮质量	$m_w$	0.037
底盘质量	$m_c$	0.350
车身质量	$m_b$	0.440
车轮半径	$r$	0.0325
轮距	$d$	0.192
车身质心到轮轴的距离	$L$	0.060
车轮绕其直径的转动惯量	$I_1$	0.000 019 5
车轮绕其轮轴的转动惯量	$I_2$	0.000 039 1
底盘绕过其质心垂线的转动惯量	$I_3$	0.000 588 1
底盘绕轮轴的转动惯量	$I_4$	0.000 053 6
车身绕过其质心垂线的转动惯量	$I_5$	0.000 968 2
车身绕轮轴的转动惯量	$I_6$	0.001 6

的建立<sup>[18-19]</sup>.本文采用拉格朗日法推导出两轮自平衡车的动力学模型,即

$$\dot{q} = S(q)v, \quad (2)$$

$$M(v)\dot{v} + V(v, \dot{v})v + G(v) = B(v)\tau. \quad (3)$$

其中: $q \in R^{4 \times 1}$ 为系统状态的广义坐标向量, $S(q) \in R^{4 \times 3}$ 为转换矩阵, $v \in R^{3 \times 1}$ 为速度矩阵, $M(v) \in R^{3 \times 3}$ 为惯性矩阵, $V(v, \dot{v}) \in R^{3 \times 3}$ 为科氏矩阵, $G(v) \in R^{3 \times 1}$ 为重力矩阵, $B(v) \in R^{3 \times 2}$ 为输入转换矩阵, $\tau \in R^{2 \times 1}$ 为控制输入矩阵,并且有

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \\ \theta \end{bmatrix}, S(q) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix},$$

$$M(v) = \begin{bmatrix} 2m_v & 0 & m_b L \cos \theta \\ 0 & 2J_1 & 0 \\ m_b L \cos \theta & 0 & 2J_2 \end{bmatrix},$$

$$B(v) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -d & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_b g L \sin \theta \end{bmatrix},$$

$$V(v, \dot{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_b L \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} \tau_l \\ \tau_r \end{bmatrix}.$$

这里: $m_v = I_2/r^2 + m_w + m_c/2 + m_b/2$ ,  $J_1 = I_1 + I_3/2 + I_5/2 + (m_w + I_2/r^2)d^2/4$ ,  $J_2 = I_4/2 + I_6/2 + m_b L^2/2$ .

## 2 轨迹跟踪控制器设计

设由参考轨迹所确定的状态向量为 $p_r = [x_r, y_r, \varphi_r]^T$ ,两轮自平衡车实际状态向量为 $p = [x, y, \varphi]^T$ ,于是,轨迹跟踪误差可以表达为 $p_e = [e_x, e_y,$

$e_\varphi]^T = [x_r - x, y_r - y, \varphi_r - \varphi]^T$ . 为充分考虑两轮自平衡车的非完整特性, 需要对轨迹跟踪偏差进行适当变换, 为此, 取误差向量  $e = [e_1, e_2, e_3]^T$ , 其中各分量满足

$$\begin{cases} e_1 = e_x \cos \varphi + e_y \sin \varphi, \\ e_2 = e_y \cos \varphi - e_x \sin \varphi, \\ e_3 = e_\varphi. \end{cases} \quad (4)$$

同时设计如下的轨迹生成器<sup>[7]</sup>:

$$\begin{cases} v_d = v_r \cos e_3 + \lambda_1 \tanh e_1, \\ \omega_d = \omega_r + \frac{\lambda_2 v_r e_2 \sin e_3}{(1 + e_1^2 + e_2^2)e_3} + \lambda_3 \tanh e_3. \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\sin e_3/e_3 = \int_0^1 \cos(z \cdot e_3) dz$ , 而  $v_r = \dot{x}_r \cos \varphi_r + \dot{y}_r \sin \varphi_r$ 、 $\omega_r = \dot{\varphi}_r$  分别为依据参考轨迹所确定的参考前向速度和转向角速度,  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  为正的设计参数.

**定理1** 当前向速度  $v$  和转向角速度  $\omega$  分别收敛于轨迹生成器(5)产生的  $v_d$  和  $\omega_d$  时, 对于任意初始误差  $e$ , 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} (|e_x(t)| + |e_y(t)| + |e_\varphi(t)|) = 0$ .

**证明** 定义如下的李雅普诺夫函数:

$$V_1 = \frac{\lambda_2}{2} \log(1 + e_1^2 + e_2^2) + \frac{1}{2} e_3^2. \quad (6)$$

对式(6)求导, 可得

$$\dot{V}_1 = \frac{\lambda_2(e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2)}{1 + e_1^2 + e_2^2} + e_3 \dot{e}_3. \quad (7)$$

对式(4)求导, 并结合非完整约束(1), 可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \omega e_2 - v + v_r \cos e_3, \\ \dot{e}_2 = -\omega e_1 + v_r \sin e_3, \\ \dot{e}_3 = \omega_r - \omega. \end{cases} \quad (8)$$

将式(5)和(8)代入(7), 可得

$$\dot{V}_1 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 e_1 \tanh e_1}{1 + e_1^2 + e_2^2} - \lambda_3 e_3 \tanh e_3. \quad (9)$$

考虑到双曲正切函数的性质, 对于任意  $e_1$  和  $e_3$ , 有  $e_1 \tanh e_1 \geq 0$ ,  $e_3 \tanh e_3 \geq 0$ , 故对于任意初始  $p_e$ , 有  $\dot{V}_1 \leq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (|e_1(t)| + |e_2(t)| + |e_3(t)|) = 0$ , 进而, 根据式(4)有  $\lim_{t \rightarrow \infty} (|e_x(t)| + |e_y(t)| + |e_\varphi(t)|) = 0$ .  $\square$

另外, 考虑到  $|\tanh(\cdot)| < 1$ ,  $\left| \frac{e_2}{1 + e_1^2 + e_2^2} \right| < 1$ ,  $\left| \frac{\sin e_3}{e_3} \right| < 1$ , 根据式(5)及不等式性质, 有

$$|v_d| \leq |v_r \cos e_3| + |\lambda_1 \tanh e_1| < |v_r| + \lambda_1, \quad (10)$$

$$|\omega_d| \leq |\omega_r| + \left| \frac{\lambda_2 v_r e_2 \sin e_3}{(1 + e_1^2 + e_2^2)e_3} \right| + |\lambda_3 \tanh e_3| <$$

$$|\omega_r| + \lambda_2 |v_r| + \lambda_3. \quad (11)$$

由式(10)和(11)可以看出, 通过选取不同的  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $\lambda_3$ , 可以使  $v_d$  和  $\omega_d$  具有不同的取值范围, 从而使

系统满足相应的速度约束要求.

经过上述处理, 即可在保证非完整约束(1)的情况下, 将两轮自平衡车对参考状态向量  $p_r$  的跟踪问题, 转化为对期望前向速度  $v_d$  和转向角速度  $\omega_d$  的跟踪问题. 为方便设计系统控制器, 本文将两轮自平衡车系统解耦为欠驱动前向子系统和全驱动转向子系统分别进行控制. 在此设计思路下, 整体控制系统如图2所示.

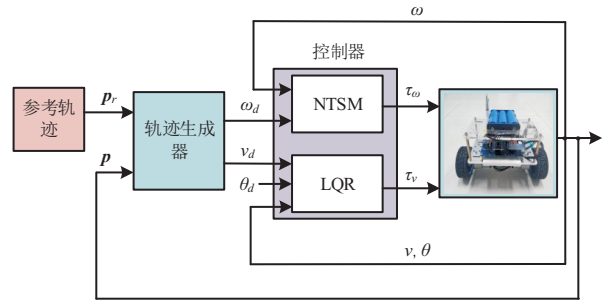


图2 整体控制系统

### 2.1 全驱动转向子系统控制

本文采用NTSM控制方法, 可以较好地实现全驱动转向子系统控制. 根据动力学模型(3), 可得二阶转向子系统

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{2J_1 r} \tau_\omega, \quad (12)$$

其中  $\tau_\omega = \tau_r - \tau_l$  为转向控制力矩.

令  $e_\varphi = \varphi - \varphi_d$ ,  $\dot{e}_\varphi = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_d = \omega - \omega_d$ , 则非奇异终端滑模面可以表示为

$$s = e_\varphi + \frac{1}{\beta} \dot{e}_\varphi^{\frac{p}{q}}. \quad (13)$$

转向系统控制律可以设计为

$$\tau_\omega = \frac{2J_1 r}{d} \left[ \dot{\omega}_d - \beta \frac{q}{p} \dot{e}_\varphi^{\frac{2-p}{q}} - \eta \cdot \text{sat}(s) \right]. \quad (14)$$

其中:  $\beta > 0$ ;  $\eta > 0$ ;  $p, q$  均为正奇数, 且满足  $1 < p/q < 2$ . 对于任意  $\phi > 0$ , 饱和函数满足

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} 1, & s/\phi \geq 1; \\ s/\phi, & |s/\phi| < 1; \\ -1, & s/\phi \leq -1. \end{cases}$$

**定理2** 控制律(14)可以保证  $e_\varphi$  和  $\dot{e}_\varphi$  在有限时间内到达滑模面  $s = 0$ , 并收敛于零.

**证明** 定义李雅普诺夫函数

$$V_2 = \frac{1}{2} s^2. \quad (15)$$

对式(15)求导, 并结合式(12)、(13)和(14), 可得

$$\dot{V}_2 = s \dot{s} = -\frac{1}{\beta} \frac{p}{q} \dot{e}_\varphi^{\frac{p}{q}-1} \eta s \cdot \text{sat}(s). \quad (16)$$

当  $\dot{e}_\varphi \neq 0$  时,  $\dot{e}_\varphi^{\frac{p}{q}-1} > 0$ , 又因  $s \cdot \text{sat}(s) \geq 0$ , 故此时  $\dot{V}_2 \leq 0$ . 根据李雅普诺夫稳定性判据可知,  $e_\varphi$  和  $\dot{e}_\varphi$

在有限时间内到达滑模面  $s = 0$ .

当  $\dot{e}_\varphi = 0$  时, 式(13)变为  $s = e_\varphi$ , 将式(14)代入(12)可得  $\ddot{e}_\varphi = -\eta \cdot \text{sat}(s)$ . 这意味着, 对于很小的正数  $\delta$ , 存在  $\dot{e}_\varphi = 0$  的  $\delta$  邻域, 满足: 当  $s = e_\varphi > 0$  时,  $\dot{e}_\varphi < 0$ ; 当  $s = e_\varphi < 0$  时,  $\dot{e}_\varphi > 0$ . 因此, 状态轨迹不可能停留在  $(e_\varphi \neq 0, \dot{e}_\varphi = 0)$ , 而必将穿过  $\dot{e}_\varphi = 0$ , 且此过程在有限时间内发生. 因  $\dot{e}_\varphi \neq 0$  时,  $e_\varphi$  和  $\dot{e}_\varphi$  在有限时间内到达滑模面  $s = 0$ , 故相平面  $e_\varphi - \dot{e}_\varphi$  内任意一点都可以在有限时间内到达滑模面  $s = 0$ <sup>[17, 20]</sup>.

当系统状态到达滑模面  $s = 0$  后, 式(13)变为

$$\dot{e}_\varphi + \beta \frac{a}{r} e_\varphi = 0. \quad (17)$$

因  $e_\varphi = 0$  是系统(17)的终端吸引子, 故  $e_\varphi$  和  $\dot{e}_\varphi$  能够在有限时间内收敛到零.  $\square$

## 2.2 欠驱动前向子系统控制

相比于全驱动转向子系统, 欠驱动前向子系统的控制更为困难<sup>[1, 15-16]</sup>. 为此, 本文首先将前向子系统在平衡点附近近似线性化, 然后采用 LQR 实现欠驱动前向子系统的有效控制.

根据动力学模型(3), 可得到如下欠驱动前向子系统:

$$\begin{cases} \ddot{x}_v = \frac{1}{4m_v J_2 - m_b^2 L^2 \cos^2 \theta} \left[ 2J_2 m_b L \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_b^2 g L^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{2J_2(\tau_l + \tau_r)}{r} \right], \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{4m_v J_2 - m_b^2 L^2 \cos^2 \theta} \left[ 2m_v m_b g L \sin \theta - m_b^2 L^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{m_b L(\tau_l + \tau_r) \cos \theta}{r} \right]. \end{cases} \quad (18)$$

在前向控制力矩  $\tau_v = \tau_l + \tau_r$  的作用下, 平衡车车身在小范围内摆动, 近似有  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\dot{\theta}^2 \approx 0$ , 并代入表1中的相关结构参数, 式(18)可转化为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\tau_v. \quad (19)$$

其中:  $\mathbf{X} = [x_v, v, \theta, \dot{\theta}]^T$ ,  $v = \dot{x}_v$ , 而

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.9379 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 104.3829 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 42.6367 \\ 0 \\ -349.3954 \end{bmatrix}.$$

令  $\xi_1 = x_v - x_{vd}$ ,  $\xi_2 = v - v_d$ ,  $\xi_3 = \theta$ ,  $\xi_4 = \dot{\theta}$ , 其中  $x_{vd}$ 、 $v_d$  分别为期望的前向位移和前向速度, 则有  $\dot{\xi}_1 = \xi_2$ ,  $\dot{\xi}_2 = -2.9379\xi_3 + 42.6367\tau_v - \dot{v}_d$ ,  $\dot{\xi}_3 = \xi_4$ ,  $\dot{\xi}_4 = 104.3829\xi_3 - 349.3954\tau_v$ . 考虑到  $-1 < \tanh e_1 < 1$ , 在 NTSM 作用下,  $e_3$  可以快速收敛于零, 故当  $\lambda_1$  足够小时, 由式(5)可得  $v_d \approx v_r$ .

综上, 当参考前向速度  $v_r$  为匀速时,  $\dot{v}_d = 0$ , 若设

$\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^T$ , 则有

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}\tau_v. \quad (20)$$

因为能控性矩阵  $\mathbf{W} = (\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B})$  满秩, 所以误差系统(20)是可控的, 于是问题转化为: 求取状态反馈控制律

$$\tau_v = -\mathbf{K}\xi, \quad (21)$$

使性能指标  $J = \int_0^\infty (\xi^T \mathbf{Q}\xi + \mathbf{R}\tau_v^2) dt$  最小<sup>[21]</sup>. 其中:  $\mathbf{Q}$  为半正定的状态加权矩阵, 其相应元素越大, 越有利于减小对应状态的控制误差;  $\mathbf{R}$  为正定的控制加权矩阵, 其值越大, 越有利于降低能量损耗. 根据此原理, 通过试凑可以获得具有良好控制效果的  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$ , 而状态反馈矩阵  $\mathbf{K}$  可以通过调用 Matlab 中的 `lqr()` 函数求得.

## 3 轨迹跟踪控制仿真研究

为了检验所设计轨迹跟踪控制器的性能, 同时考虑实验场地大小的限制以方便后续实验研究, 选择如下圆形轨迹作为参考轨迹:

$$\begin{cases} x_r = 2.1 + 1.5 \cos(-0.1t), \\ y_r = 2.7 + 1.5 \sin(-0.1t). \end{cases} \quad (22)$$

设两轮自平衡车从点(3.6, 2.7)出发, 初始位姿误差为  $e_1 = 0.01$ ,  $e_2 = 0.01$ ,  $e_3 = 0.01$ , 车身初始倾角为  $\theta = 0.1$ ; NTSM 设计参数为  $\beta = 100$ ,  $\eta = 300$ ,  $p = 5$ ,  $q = 3$ ,  $\phi = 0.1$ ,  $\lambda_1 = 0.000001$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 1$ ; LQR 设计参数为  $\mathbf{Q} = \text{diag}(70000, 10, 40000, 1)$ ,  $\mathbf{R} = 1$ , 通过调用 Matlab 中的 `lqr()` 函数可求得  $\mathbf{K} = [-264.5751, -114.6468, -243.5403, -15.5260]$ , 仿真时间设为 70 s, Matlab/Simulink 环境下的仿真结果如图3所示.

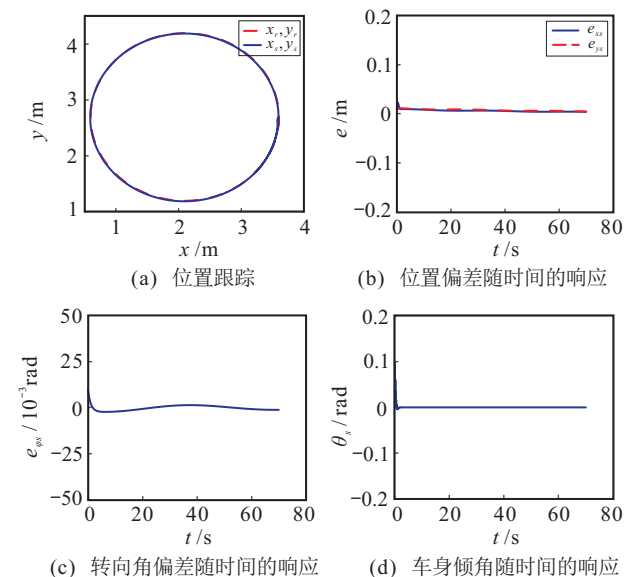


图3 仿真结果

由图3(a)可以看出,即使存在一定的初始偏差,平衡车仍然能够对参考轨迹进行良好的跟踪,仿真得到的位置曲线 $(x_s, y_s)$ 与参考位置曲线 $(x_r, y_r)$ 重合度较高;由图3(b)和图3(c)可以看出,两轮自平衡车的位置偏差 $e_{x_s}$ 和 $e_{y_s}$ 以及转向角偏差 $e_{\varphi_s}$ 能够随时间迅速收敛于零;同时,由图3(d)可以看出,车身倾角 $\theta_s$ 能够快速从初始值收敛至零,并在整个运动过程中保持稳定.从而初步证明,采用本文所提出的基于NTSM和LQR的轨迹跟踪控制器,能够对两轮自

平衡车的全驱动转向子系统和欠驱动前向子系统进行有效控制,实现对给定轨迹的良好跟踪.

## 4 轨迹跟踪控制实验研究

为进一步验证所提出轨迹跟踪控制器的有效性,本文设计了相关硬件系统,并对两轮自平衡车的轨迹跟踪控制进行实验研究.

### 4.1 硬件系统设计

整个硬件系统主要包括微控制器、传感器和执行器3部分,如图4所示,下面分别进行介绍.

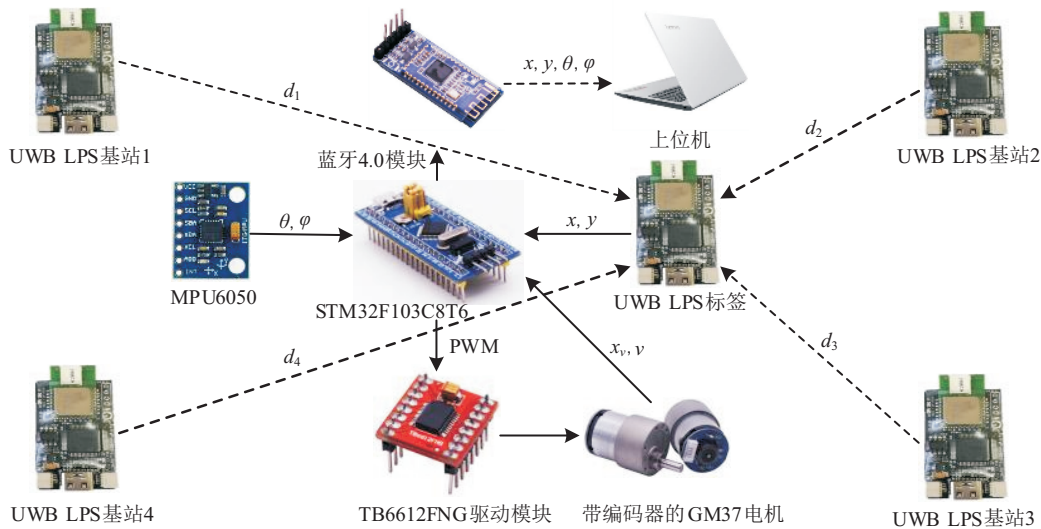


图4 两轮自平衡车硬件系统

#### 4.1.1 微控制器

微控制器采用意法半导体公司生产的32位单片机STM32F103C8T6,其工作频率可达72 MHz,并拥有64 KB程序存储器、20 KB数据存储器及多个定时器等资源,可以满足两轮自平衡车的控制需要.

#### 4.1.2 传感器

1) 两轮自平衡车UWB定位系统采用无穷超宽带局部定位系统(INF ultra wide band local positioning system, I-UWB LPS),其最大通信距离可达35 m左右,定位更新频率50 Hz,典型最大误差0.1 m.通过测量已知坐标的基站与安装于平衡车上的标签之间的距离 $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$ 和 $d_4$ ,解算出平衡车的实际坐标 $(x, y)$ ,并通过串口传送给微控制器.理论上,只需要3个基站即可实现平衡车的定位,但本文中为进一步提高定位精度,采用4个基站,分别取其中3个与标签的距离进行坐标解算,最后求其平均值得到最终的平衡车坐标.

2) 两轮自平衡车IMU采用InvenSense公司推出的整合性6轴运动处理组件MPU6050,该组件集成了一个3轴加速度计和一个3轴陀螺仪,以

及一个可扩展的数字运动处理器(Digital motion processor, DMP).其中:陀螺仪和加速度计的量程都是用户可控的,不同的量程决定了不同的测量分辨率,陀螺仪的最小量程为 $\pm 250^\circ/\text{s}$ ,最大量程为 $\pm 2000^\circ/\text{s}$ ;加速度计的最小量程为 $\pm 2\text{g}$ ,最大量程为 $\pm 16\text{g}$ .DMP通过融合加速度计和陀螺仪的数据可以得到稳定的车身倾角 $\theta$ 及转向角 $\varphi$ .

3) 编码器采用AB双相增量式磁性霍尔编码器,配有11线强磁码盘,车轮旋转一圈对应的脉冲数可达1320,从而根据测得的脉冲数可精确求得平衡车的前向位移 $x_v$ 和前向速度 $v$ .

#### 4.1.3 执行器

两轮自平衡车的执行器为两个与车轮固联的GM37-520永磁有刷直流减速电机,在阶跃电压作用下,其转速随时间的变化规律<sup>[22]</sup>为

$$\Omega(t) = V_a K_m (1 - e^{-\frac{t}{T_m}}). \quad (23)$$

其中: $\Omega(t)$ 为电机转速, $V_a$ 为施加在电机上的阶跃电压, $K_m$ 为电机增益系数, $T_m$ 为电机时间常数.

分析式(23)可知,电机运动分为两个阶段:第1阶

段是加速阶段,第2阶段是恒速阶段.在加速阶段,输出扭矩近似与施加在电机上的电压成正比,其持续时间取决于时间常数 $T_m$ ,一般为十几到几百个毫秒.而平衡车的控制周期一般只有几个毫秒,因此可以认为控制电压与电机的输出扭矩成正比,通过脉冲宽度调制(Pulse width modulation, PWM)技术实现对电机输出扭矩的控制.

#### 4.2 实验过程与结果分析

基于所设计的硬件系统,将所设计的轨迹跟踪控制器在Keil软件中编写为C语言程序,编译后通过Jlink烧录到微控制器中,对所设计的轨迹跟踪控制器进行实验研究,如图5所示.在实验过程中,通过蓝牙技术将两轮自平衡车的实时位姿传送到上位机进行分析,如图6所示.

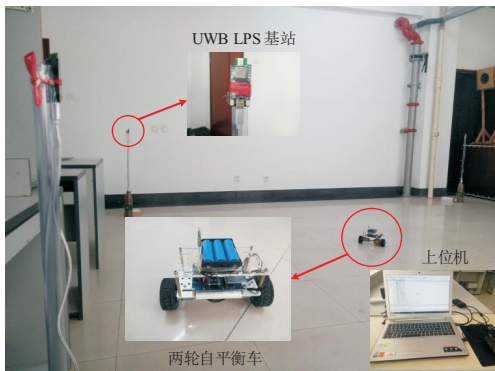


图5 实验环境

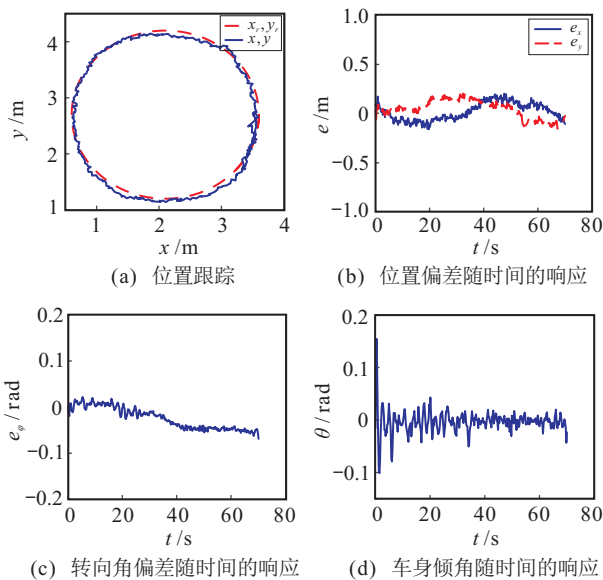


图6 实验结果

由图6(a)可以看出,实验得到的位置曲线 $(x, y)$ 能够较好地跟踪参考曲线 $(x_r, y_r)$ ,跟踪偏差保持在合理的范围之内.

由图6(b)可以看出,实验得到的 $x$ 和 $y$ 坐标的跟踪偏差 $e_x$ 和 $e_y$ 的最大值都接近于0.2m,明显大于图3(b)中仿真结果的跟踪偏差 $e_{x_s}$ 和 $e_{y_s}$ .这主要是由

于UWB定位系统的定位误差可达0.1m,而且建模误差、前向子系统线性化所引起的误差以及其他传感器的测量误差等因素都会造成实验结果进一步偏离.

由图6(c)可以看出,在实验中,转向角偏差具有随时间增大的趋势,这主要是由于转向角与重力方向正交,无法用加速度计测量得到,使得陀螺仪测得的转向角不能通过稳定值不断校正,转向角的漂移误差会被逐步积累,进而导致转向角偏差呈逐渐增大的趋势.但同时可以看到,实验过程中的转向角跟踪偏差整体上较小,最大值不到0.07rad,可以满足本研究的需要.

由图6(d)可以看出,车身倾角除了在初始时具有较大波动外,6s以后车身倾角就稳定在0.05rad以内了,从而表明了所设计的两轮自平衡车轨迹跟踪控制器的有效性.

## 5 结论

1) 采用拉格朗日法建立了两轮自平衡车动力学模型,然后据此模型设计了基于NTSM和LQR的轨迹跟踪控制器. Matlab/Simulink环境下的仿真结果表明,所提出的控制器能够对两轮自平衡车系统进行有效控制,实现对给定轨迹的良好跟踪.

2) 以STM32单片机为控制核心,基于IMU和UWB技术对所设计控制器进行硬件实现.实验结果表明,平衡车能够实现对参考轨迹的良好跟踪,横、纵坐标偏差均小于0.2m,转向角偏差小于0.07rad,车身倾角除了初始时的波动外小于0.05rad.

可见,文中所设计的两轮自平衡车轨迹跟踪控制器具有良好的可行性和有效性.

#### 参考文献(References)

- [1] Li Z J, Yang C G, Fan L P. Advanced control of wheeled inverted pendulum systems[M]. London: Springer, 2012: 1-10.
- [2] 张晓华, 张志军. 自平衡式两轮电动车耦合控制研究[J]. 控制工程, 2013, 20(1): 26-29. (Zhang X H, Zhang Z J. Research of coupling control of self-equilibrium two wheels electric vehicle[J]. Control Engineering of China, 2013, 20(1): 26-29.)
- [3] Cui R X, Guo J, Mao Z Y. Adaptive backstepping control of wheeled inverted pendulums models[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 79(1): 501-511.
- [4] 武俊峰, 孙雷. 两轮自平衡机器人的控制方法研究[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2014, 19(6): 22-26. (Wu J F, Sun L. Two-wheeled self-balancing robot control method study[J]. J of Harbin University of Science and Technology, 2014, 19(6): 22-26.)
- [5] Ye W Q, Li Z J, Yang C G. Vision-based human tracking control of a wheeled inverted pendulum robot[J]. IEEE

- Trans on Control Cybernetics, 2016, 46(11): 2423-2434.
- [6] 张一淳, 张雪波, 方勇纯, 等. 基于主动偏心轮的全方位移动机器人航位推算与跟踪控制[J]. 机器人, 2015, 37(3): 361-368.  
(Zhang Y C, Zhang X B, Fang Y C, et al. Dead reckoning and tracking control of omnidirectional mobile robots with active caster wheels[J]. Robot, 2015, 37(3): 361-368.)
- [7] 安聪. 两轮自平衡车轨迹跟踪控制关键技术研究[D]. 大连: 大连理工大学汽车工程学院, 2016.  
(An C. Research on for a two-wheeled self-balancing vehicle trajectory tracking key technology[D]. Dalian: School of Automotive Engineering, Dalian University of Technology, 2016.)
- [8] 李成革, 黄剑, 王永骥. 轮式倒立摆系统的动态面控制研究[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2013, 41(S1): 25-28.  
(Li S Y, Huang J, Wang Y J. Dynamic surface control of mobile wheeled inverted pendulum[J]. J of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2013, 41(S1): 25-28.)
- [9] Kim S, Kwon S J. Nonlinear optimal control design for underactuated two-wheeled inverted pendulum mobile platform[J]. IEEE/ASME Trans on Mechatronics, 2017, 22(6): 2803-2808.
- [10] Huang J, Ding F, Fukuda T, et al. Modeling and velocity control for a novel narrow vehicle based on mobile wheeled inverted pendulum[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2013, 21(5): 1607-1617.
- [11] Yokoyama K, Takahashi M. Dynamics-based nonlinear acceleration control with energy shaping for a mobile inverted pendulum with a slider mechanism[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2016, 24(1): 40-55.
- [12] 谭苗, 吴益飞, 陈扬, 等. 电磁导引的两轮自平衡移动机器人设计[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2013, 41(S1): 249-253.  
(Tan M, Wu Y F, Chen Y, et al. Design of two-wheeled self-balancing mobile robot guided by electromagnetism[J]. J of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2013, 41(S1): 249-253.)
- [13] 于浩, 宿浩, 杨雪, 等. 基于引导角的轮式移动机器人轨迹跟踪控制[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 635-639.  
(Yu H, Su H, Yang X, et al. Guidance angle based trajectory tracking for wheeled mobile robots[J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 635-639.)
- [14] Tsai C C, Wang Z Z. Intelligent adaptive trajectory tracking using fuzzy basis function networks for self-balancing two-wheeled mobile robots[C]. Int Conf on System Science and Engineering. Macau: IEEE, 2011: 143-148.
- [15] Yue M, Wang S, Sun J Z. Simultaneous balancing and trajectory tracking control for two-wheeled inverted pendulum vehicles: A composite control approach[J]. Neurocomputing, 2016, 191: 44-54.
- [16] Yue M, An C, Li Z J. Constrained adaptive robust trajectory tracking for WIP vehicles using model predictive control and extended state observer[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(5): 733-742.
- [17] Feng Y, Yu X H, Man Z Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. Automatica, 2002, 38(12): 2159-2167.
- [18] 张晓华. 系统建模与仿真[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2015: 69-75.  
(Zhang X H. System modeling and simulation[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2015: 69-75.)
- [19] 杨兴明, 段举. 两轮自平衡车的自适应模糊滑模控制[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2016, 39(2): 184-189.  
(Yang X M, Duan J. Adaptive fuzzy sliding mode control for two-wheeled self-balancing cart[J]. J of Hefei University of Technology: Natural Science Edition, 2016, 39(2): 184-189.)
- [20] 穆朝絮, 余星火, 孙长银. 非奇异终端滑模控制系统相轨迹和暂态分析[J]. 自动化学报, 2013, 39(6): 902-908.  
(Mu C X, Yu X H, Sun C Y. Phase trajectory and transient analysis for nonsingular terminal sliding mode control systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(6): 902-908.)
- [21] 刘文东, 范世鹏, 李华滨. 闭环两尺度系统负荷LQR控制建模与设计方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(4): 741-745.  
(Liu W D, Fan S P, Li H B, et al. Modelling and design of composite LQR with close-loop two time scales[J]. Control and Decision, 2017, 32(4): 741-745.)
- [22] 刘二林, 姜香菊. 基于PD算法的两轮自平衡车直立控制[J]. 自动化与仪器仪表, 2015(1): 203-206.  
(Liu E L, Jiang X J. Two wheeled self-balanced vehicle vertical control based on PD algorithm[J]. Automation and Instrumentation, 2015(1): 203-206.)

## 作者简介

宁一高(1990—), 男, 博士生, 从事两轮自平衡车动力学与控制的研究, E-mail: ningyigao@mail.dlut.edu.cn;

岳明(1975—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能车辆、轮式移动机器人和多智能体编队控制等研究, E-mail: yueming@dlut.edu.cn;

许媛(1995—), 女, 硕士生, 从事轮式移动机器人编队控制的研究, E-mail: xysdta123@mail.dlut.edu.cn;

于紫龙(1998—), 男, 本科生, 从事车辆工程的研究, E-mail: yuzilong@mail.dlut.edu.cn.

(责任编辑: 李君玲)