

## 概率盒框架下多响应模型确认度量方法

张保强<sup>1†</sup>, 苏国强<sup>1</sup>, 展 铭<sup>2</sup>, 郭勤涛<sup>2</sup>

(1. 厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361005; 2. 南京航空航天大学 机电学院, 南京 210016)

**摘要:** 在随机和认知混合不确定性表征的概率盒框架下, 提出一种多响应模型确认度量方法. 概率盒框架下的模型确认度量主要采用面积方法量化仿真与实验结果的一致程度, 但传统面积度量方法并不适用于多个相关响应的多输出确认度量问题. 不确定性条件下多响应量模型确认度量问题, 实质上是量化计算模型的多个响应量的联合概率分布与实验观测数据所服从的联合概率分布之间的差异程度. 对此, 引入马氏距离的概念对多响应量模型确认度量问题进行降维, 以马氏距离作为转换的统计量, 将多响应量的多指标确认度量问题转化为马氏距离的综合指标度量问题. 数值仿真算例验证了所提出方法的正确性和稳定性, 并将该方法应用于“2014年圣地亚验证与确认挑战问题”的研究. 研究表明, 基于概率盒和马氏距离的确认度量方法可以有效解决多相关响应量多输出模型确认度量问题.

**关键词:** 模型确认; 确认度量; 多相关响应量; 概率盒; 马氏距离; 面积度量

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Model validation metrics with multiple correlated responses under the frame of probability box

ZHANG Bao-qiang<sup>1†</sup>, SU Guo-qiang<sup>1</sup>, ZHAN Ming<sup>2</sup>, GUO Qin-tao<sup>2</sup>

(1. School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China; 2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** A model validation metric for multiple response is presented under the framework of probability box that characterized by mixed aleatory and epistemic uncertainties. Area metric is mainly used to quantify the measurement of agreement between the simulation results and experimental observations under the framework of the probability box. However, the traditional area metric is not suitable for validation activities with multiple outputs when the responses are related with each other. Multi-response model validation metric considering uncertainty conditions, actually returns the quantification of the difference between joint probability distribution functions of simulation results and experimental observations. The Mahalanobis distance is introduced to convert the multi-dimensional samples into Mahalanobis distance values. Then, the cumulative probability distribution function of Mahalanobis distance is defined, and probability box of the simulation and experimental observations is obtained by double-deck Monte Carlo sampling. As a result, the validation metric for multiple responses is converted into the calculation of the area of the Mahalanobis distance. A simulation example verifies the effectiveness and stability of the proposed method, and it is applied to study the “2014 Sandia Verification and Validation Challenge” engineering problem. The research demonstrates that the proposed validation metric for multiple related responses based on the Mahalanobis distance and probability box is feasible and effective.

**Keywords:** model validation; validation metrics; multiple responses; probability box; Mahalanobis distance; area metrics

## 0 引言

在工程研究中, 科研人员试图利用日益成熟的计算机技术进行建模与仿真, 通过对所建模型的计算来代替复杂且昂贵的真实物理实验. 但是, 大型工程系

统运行机理复杂, 参数和结构存在不确定性, 而且在建模过程中因受到限制而对模型进行简化, 或者受建模人员的认知所限而导致所建模型与实际模型有一定的偏差. 例如, 在设备系统的故障预测过程中存在

收稿日期: 2018-03-16; 修回日期: 2018-05-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51505398); 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金项目(U1530122); 航空科学基金项目(20150968003); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(20720170044); 江苏省高校自然科学基金项目(16KJD110007).

责任编辑: 刘宝碇.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: bqzhang@xmu.edu.cn.

大量的不确定性问题<sup>[1]</sup>, 计算模型的准确性和可信度对预测结果尤为重要, 因此, 需要通过模型确认方法对模型输出与真实情况之间的差异进行量化<sup>[2-4]</sup>.

模型确认度量是指准确定量地描述计算模型与实验数据之间的差异, 目前已经引起众多学者的关注与研究<sup>[5-9]</sup>. 现有的模型确认度量方法主要有 4 种<sup>[10]</sup>: 经典假设检验法、贝叶斯因子法、频率指标法和面积度量法. 经典假设检验法和贝叶斯因子法的确认度量结果为接受或拒绝该模型, 并没有给出对模型准确性的定量评估. 而频率指标法虽然给出了模型与实验结果之间差异的定量量化, 但是只考虑了样本均值这一特征量, 没有考虑反映不确定情况下样本离散程度等其他特征量. 以上 3 种方法均无法完全满足确认度量的要求. Ferson 等<sup>[11]</sup>以模型仿真输出的累积分布函数(Cumulative distribution function, CDF)与实验观测数据的经验分布函数之间所夹面积作为度量结果, 提出了面积度量法以及用于“多点”确认度量的 u-pooling 方法.

面积度量方法可以客观定量地描述仿真计算与实验观测数据之间的差异, 但只适用于单输出模型, 无法适用于实际工程系统中存在的多输出模型的模型确认问题. 在此方法的基础上, Li 等<sup>[12]</sup>提出了基于概率积分转换(Probability integral transformation, PIT)的面积度量法方法; 赵亮等<sup>[13]</sup>提出了基于概率分布距离的多响应模型确认度量; Zhao 等<sup>[14]</sup>提出了基于马氏距离转换的多输出模型确认方法; 胡嘉蕊等<sup>[9]</sup>和 Li 等<sup>[15]</sup>提出了基于核主成分分析的多输出模型确认方法. 这些方法将面积度量方法扩展到了含有多个相关输出量的模型确认度量领域.

概率盒(Probability box, p-box)在处理不确定性问题时能有效地同时表征随机和认知不确定性, 并有更大的工程应用潜力, 近年来备受关注. 在模型确认度量方面, 概率盒的面积确认度量已经扩展至区间值<sup>[16]</sup>. 然而, 现有的概率盒方法针对的大多是单响应量模型确认度量问题. 为了让概率盒方法适用于具有多个相关响应量的模型确认度量问题, 本文将在概率盒的区间值面积度量的基础上引入马氏距离(Mahalanobis distance, MD), 通过求取马氏距离将多维的随机概率分布转化为一维的马氏距离概率分布, 进而将多维联合概率分布的概率盒转化为一维马氏距离的概率盒, 在获得马氏距离的概率盒之后, 通过计算仿真概率盒与实验概率盒之间的面积度量获得面积度量的区间值.

### 1 相关理论和方法

#### 1.1 概率盒理论

概率盒是传统概率论与现代区间理论相结合的一种混合概率模型, 可以通过定义上下边界的两个累

积分分布函数来表示.

若  $F_x^I$  为在实定义域  $\mathfrak{R}$  上的累积分布函数空间, 则不确定参数  $X$  的 p-box 可定义为

$$F_X^I = \{F(X) : \forall X \in \mathfrak{R}, \underline{F}_X(x) \leq F_X(x) \leq \overline{F}_X(x)\}, \tag{1}$$

其中  $\overline{F}_X(x) = \overline{P}(X \leq x)$  和  $\underline{F}_X(x) = \underline{P}(X \leq x)$  分别为 p-box 的上下边界.  $F_X(x)$  为  $\underline{F}_X(x)$  与  $\overline{F}_X(x)$  之间所有可能的 CDF<sup>[17]</sup>. 概率盒的形式如图 1(d) 所示, 可以看出: 在给定概率值的情况下, 概率盒反映的是一个参数可能的取值区间; 而在给定确切的参数值的情况下, 则反映的是该参数出现概率的一个区间. p-box 除了可以直观地表征混合不确定性模型外, 还可以表征确定性、随机不确定性和认知不确定性模型<sup>[2, 17-18]</sup>. 考虑确定性问题的概率盒为图 1(a) 所示的标量; 只考虑认知不确定性的概率盒为图 1(b) 中的区间; 只考虑随机不确定性的概率盒为图 1(c) 中所示的一条确定的累积分布函数.

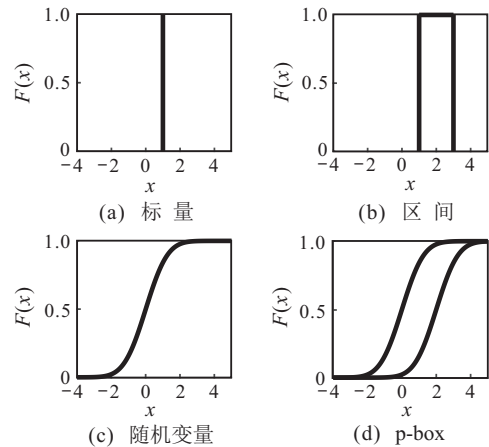


图 1 p-box 用于表征确定性、认知不确定性、随机不确定性和混合不确定性模型的表现形式

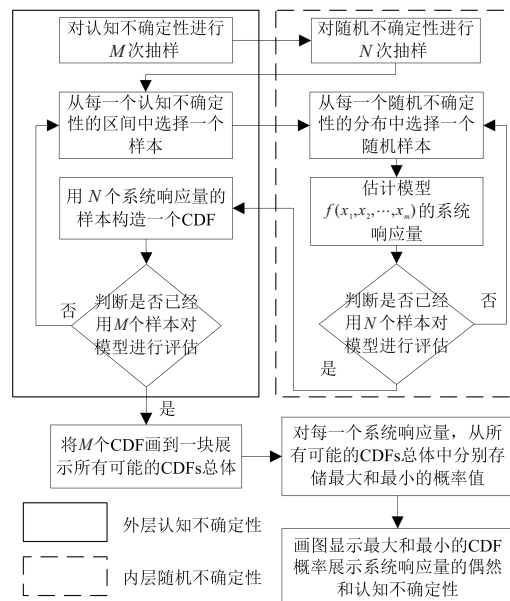


图 2 双层蒙特卡罗抽样算法

概率盒可以通过双层抽样方法进行求取,大致的思路是:将参数的认知不确定性归为外层,将参数的随机不确定性归为内层,先进行一次外层抽样再进行  $N$  次内层抽样,如此重复,直到进行  $M$  次外层抽样,最终获得  $M$  条累积分布函数.图2给出了 p-box 的双层蒙特卡罗抽样算法.

1.2 概率盒的面积度量方法

目前,主要的确认度量方法可以分为两类:假设检验类型和距离类型<sup>[13]</sup>.经典假设检验法和贝叶斯因子法<sup>[19-21]</sup>是较常用的假设检验法,但是这两种方法一个是以“接受模型”为确认结果,一个是以“拒绝模型”为确认结果,并不能给出反映模型响应与实验观测之间差异的客观量化结果.相比之下,距离类型的度量方法是以模型响应与实验观测数据的均值<sup>[6,22-23]</sup>(或其他统计量)或概率分布之间的距离<sup>[11]</sup>来反映两者的差异,更符合确认度量所要求的客观量化差异的性质.

面积度量方法是一种基于概率分布距离的确认度量方法,如图3所示,通过计算模型响应与实验观测的经验累积分布函数之间的面积(图3中阴影部分),可以给出对模型准确性的量化结果<sup>[11]</sup>.

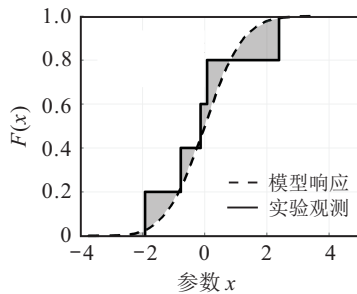


图3 基于概率分布距离的面积度量方法示意

面积度量的数学定义为

$$d(F^m, S^e) = \int_{-\infty}^{\infty} \|F^m(x) - S^e(x)\| dx. \quad (2)$$

其中:  $F^m(x)$  为模型输出量  $x$  的累积分布函数,  $S^e(x)$  为实验数据的经验分布函数.

在模型响应概率盒与实验观测数据概率盒比较的情形下,经典的面积度量定义为两个概率盒之间所夹的最小面积<sup>[2]</sup>,如图4中深色阴影部分所示,这将严重地低估模型形式不确定性.文献[24]修改了这一定义,将概率盒的面积度量扩展到区间值;文献[16]对此概念的内涵进行了详细讨论,并提出了两种计算面积度量区间的算法.一种是基于嵌套抽样的抽样算法,算法的具体步骤为从预测概率盒和实验概率盒中任意分别抽取一条概率分布曲线配对,根据前述单一值面积度量算法计算其面积度量值,如此反复,直到获得大量面积度量样本值,取其上下界便可以构成

区间.另一种是基于区间运算的区间算法,具体计算过程由下式给出:

$$\underline{d}(F, S) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\underline{\Delta}([F_L^{-1}(p_i), F_R^{-1}(p_i)], [S_L^{-1}(p_i), S_R^{-1}(p_i)])|, \quad (3)$$

$$\bar{d}(F, S) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{\Delta}([F_L^{-1}(p_i), F_R^{-1}(p_i)], [S_L^{-1}(p_i), S_R^{-1}(p_i)])|. \quad (4)$$

其中:  $\underline{d}(F, S)$  和  $\bar{d}(F, S)$  分别为面积度量区间的最小值(下界)和最大值(上界);  $[F_L^{-1}(p_i), F_R^{-1}(p_i)]$  和  $[S_L^{-1}(p_i), S_R^{-1}(p_i)]$  分别为点  $p_i$  处仿真概率盒和实验概率盒的概率区间;  $\underline{\Delta}$  和  $\bar{\Delta}$  为区间的减法运算,即

$$\underline{\Delta}(A, B) = \min_{a \in A, b \in B} \|a - b\|, \quad (5)$$

$$\bar{\Delta}(A, B) = \max_{a \in A, b \in B} \|a - b\|. \quad (6)$$

式(5)、(6)分别表示当  $a$  为区间  $A$  中任意值、 $b$  为区间  $B$  中任意值时,  $\|a - b\|$  的最小值和最大值.

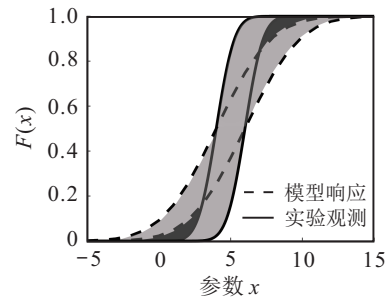


图4 概率盒面积度量示意

抽样算法可以给出更为准确的结果,但对于仅给出概率盒边界、难以抽样的情形并不适用,且计算量较大.相对而言,区间算法的适应面更广,计算量更小,但给出的结果往往比抽样算法的结果保守<sup>[16]</sup>.本文采用区间算法求取面积度量区间.首先将概率轴均匀划分为  $N$  等份,每个小区间取中点获取相应的预测概率盒区间  $[F_L^{-1}(p_i), F_R^{-1}(p_i)]$  和实验概率盒区间  $[S_L^{-1}(p_i), S_R^{-1}(p_i)]$ ;然后,对每一对区间值变量相减并求绝对值以获得对应的区间;最后,将获得的所有区间上下界分别平均即可得到区间值面积度量的上下界  $[\underline{d}(F, S), \bar{d}(F, S)]$ .图4直观地给出了该区间值上下界的几何意义,上界值为图中浅色阴影部分的面积,下界值为图中深色阴影部分的面积.

1.3 概率盒框架下的多响应量确认度量

图5(a)是一个二维概率盒的实例,上下两个累积分布函数曲面构成了一个封闭的盒状空间.根据上述对概率盒理论的介绍,不难理解该空间内表示的是无数个可能的累积分布函数.再结合概率盒的面积

度量方法和理论,便可以对二维联合分布概率盒进行模型确认度量. 只不过此时的度量值不再是一维概率盒情形下的两个概率盒之间的面积差异,而是两个概率盒之间的体积差异.

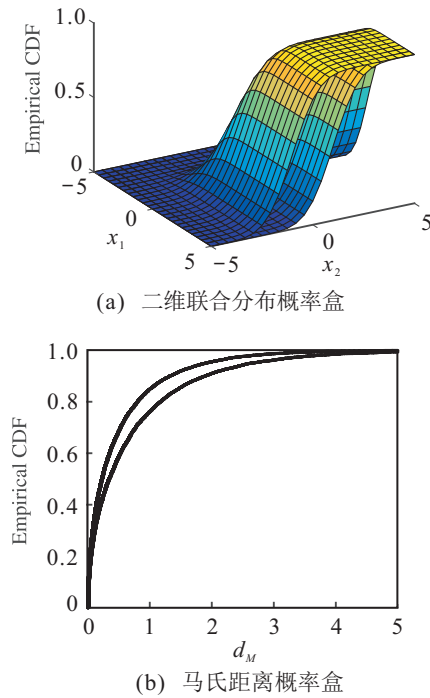


图 5 多维联合分布概率盒转化为马氏距离概率盒示意

同理,当概率盒扩展到三维、四维甚至更高维的情形下,仍可以通过求多重积分的方法直接求得面积度量值. 然而,此种方法求高维概率盒的确认度量值时,所求得的度量值难以直观地理解,计算效率低且数值算法难以实现.

本文引入马氏距离的概念对多响应量模型确认问题进行降维. 马氏距离是 Mahalanobis 提出的计算两个未知样本集相似度的方法. 与欧氏距离相比,马氏距离有很多优点: 1) 它不受量纲的影响,即两点之间的马氏距离与原始数据的测量单位无关; 2) 由标准化数据和中心化数据(即原始数据与均值之差)计算出的二点之间的马氏距离相同,而且马氏距离能考虑到各种特性之间的联系,因此,可以排除变量之间相关性的干扰<sup>[25]</sup>.

不确定性条件下多响应量模型确认度量问题,实质上就是量化计算模型的多个响应量的联合概率分布与实验观测数据所服从的联合概率分布之间的差异程度<sup>[21,26]</sup>. 利用上述马氏距离的特性,可以采用马氏距离作为转换的统计量,将多响应量的多指标确认度量问题转化为马氏距离的综合指标度量问题<sup>[14]</sup>.

设  $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  是一个  $m$  维的随机变量,其均值向量和协方差矩阵分别为  $\mu = (\mu_1, \mu_2,$

$\dots, \mu_m)$  和  $\Sigma$ , 可以根据马氏距离的计算公式构造统计量

$$D_M(X) = \sqrt{(X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)}. \quad (7)$$

设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  为  $X$  的一个采样样本,则相应的  $D_M(x)$  的样本值为

$$d_M(x) = \sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)}. \quad (8)$$

通过定义累积分布函数

$$F_{D_M}(d_M) = P(D_M \leq d_M), \quad (9)$$

将多维的联合分布函数转换为一维马氏距离的分布,获得一个以马氏距离为统计量的累积分布函数. 因此,可以在二维概率盒所围成的二维联合分布空间内进行蒙特卡洛抽样,并将每一个可能的联合分布进行马氏距离的转化,获得多个马氏距离 CDF,最后获得图 5(b) 所示的马氏距离概率盒. 该方法将二维联合分布概率盒转化为马氏距离概率盒的形式,可以利用马氏距离的概率盒对模型进行一个综合的确认度量. 马氏距离转换方法相对于 PIT 方法,可以不必获得多响应量的完整联合分布函数,该方法只需获取响应量的多维样本值,并将其转化为马氏距离,获得马氏距离的经验累积分布函数即可. 这种转换思想可以避免更多维的联合分布难以获取的问题,大大降低了计算成本.

在概率盒框架下运用马氏距离进行确认度量的步骤如下:

Step 1: 对模型进行  $m \times n$  的双层抽样,获得  $m$  组模型输出的多维样本;

Step 2: 对每组样本进行马氏距离的转换,获得  $m$  组马氏距离的样本;

Step 3: 对马氏距离样本值进行统计,获得  $m$  个马氏距离的经验分布函数,并提取其 p-box 边界;

Step 4: 计算两个概率盒之间的面积度量区间.

## 2 算例分析

### 2.1 数值算例

假设数值算例的实验输出如下:

$$\begin{cases} y_1^e = \theta \cos(2\pi x_1) + \sin x_2; \\ y_2^e = \cos(0.5\pi x_1 + 1) + \theta \cos x_2. \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $y_1^e$  和  $y_2^e$  表示两个具有相关性的实验输出;  $x_1$  和  $x_2$  为两个含有混合不确定性的输入变量,  $x_1 \sim N([1, 4], 4)$ ,  $x_2 \sim N([-3, 4], 4)$ ;  $\theta$  为模型参数,真值为 2,表征了模型形式不确定性. 另外,假设 3 个备选的计算模型列于表 1,对本文所述方法能否准确反映模型形式误差和方法的稳定性方面进行验算.

表1 数值算例的3组备选模型

模型	公式	模型参数
1	$y_1^{m_1} = \theta \cos(2\pi x_1) + \sin x_2$ $y_2^{m_1} = \cos(0.5\pi x_1 + 1) + \theta \cos x_2$	$\theta = 2$
2	$y_1^{m_2} = \theta \cos(2\pi x_1) + \sin x_2$ $y_2^{m_2} = \cos(0.5\pi x_1 + 1) + \theta \cos x_2$	$\theta = 8$
3	$y_1^{m_3} = \theta \cos(2\pi x_1) + \sin x_2$ $y_2^{m_3} = \cos(0.5\pi x_1 + 1) + \theta \cos x_2$	$\theta = 16$

2.2 正确性验算

首先通过此算例验证所提出方法的正确性. 模型1与实验完全一致, 是正确的模型, 模型2和模型3与实验的认知不确定性依次增大. 所以模型确认度量预期结果应是模型1优于模型2, 而模型2优于模型3. 由于实验样本数量的多寡会影响到面积度量值的求解, 本文同时研究3组模型随着实验样本数量的增加, 其确认度量值的变化情况, 结果如图6所示.

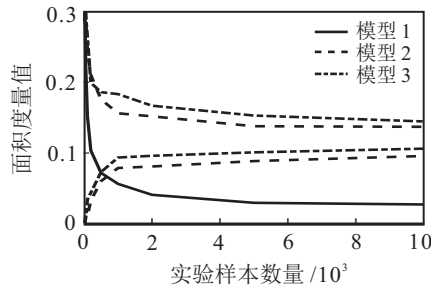


图6 3组模型度量结果随实验样本量的变化

从图6中可以看出, 3组模型的度量值随着实验样本量的增加逐渐收敛, 即计算模型与实验模型之间的误差不再随着样本量的增加而变化, 此时的收敛值才真正体现出各个模型的模型形式误差. 表2给出了

实验样本量为5000时, 3个模型的确认度量结果.

表2 3组计算模型的确认度量结果

模型	1	2	3
度量区间	[0.000 0, 0.030 9]	[0.090 3, 0.141 2]	[0.102 0, 0.148 2]

结合图6和表2的结果可以看出, 模型1的度量区间小于模型2, 而模型2的度量区间小于模型3, 结论与预期定性分析相符, 验证了该指标的正确性和有效性. 此外, 尽管模型1与实验模型完全一致, 但其面积度量上限值仍不为零. 通过进一步计算发现, 该上限值的大小正好等于仿真(或实验)概率盒所围成的面积. 这是由于概率盒理论在进行参数不确定性传播时并没有排除参数的认知不确定性而是将其保留, 模型与实验可能仍然存在一定差异性. 真正的理想情形应当是随着计算和实验认知不确定性的缩小, 计算概率盒与实验概率盒将收敛到相同的概率分布曲线.

2.3 稳定性验算

为了验证该方法的稳定性, 由实验模型分别生成100组、1000组实验数据, 表1中的3组模型通过仿真生成1000组仿真响应数据, 按照本文所述方法进行模型确认度量区间的求解. 在实验数据样本量分别为100、1000的情况下, 将程序运行100次, 观察度量区间上下界的离散程度, 同时观察是否会有模型确认度量结果的优劣排序出现错误的情况.

计算这100次度量区间上下界的标准差和错误率, 计算结果见表3.

表3 数值算例的100、1000组实验数据与1000组模型数据确认结果对比

实验样本量	标准差						错误率 %
	模型1		模型2		模型3		
	区间下界	区间上界	区间下界	区间上界	区间下界	区间下界	
100组	0.000 0	0.005 5	0.004 8	0.006 2	0.005 3	0.005 1	4
1000组	0.000 0	0.003 1	0.003 6	0.004 1	0.003 9	0.003 5	0

从表3结果可以看出, 用此方法求得的3组模型的确认度量区间标准差都非常小. 值得注意的是, 实验样本数为100组时的确认度量仍有一定的出错率, 由此表明, 只有实验样本量足够大时, 才能保证获得准确的模型形式不确定性.

2.4 工程算例

采用2014年美国圣地亚国家试验室提出的模型验证与确认挑战问题<sup>[27]</sup>来验证本文方法在工程问题上的可行性. 该挑战问题以特定环境、载荷下储罐的最大正应力和最大正应变为输出对象, 研究模型验证

与确认过程中需要解决的关键问题. 图7给出了储罐的几何信息.

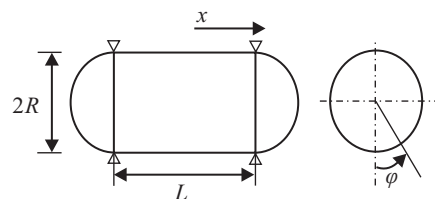


图7 储罐的主视图和侧视图

将仿真计算模型视为一黑箱, 可用下式描述:

$$[w, \sigma] = M(x, \varphi, P, H, \chi, E, \nu, L, R, T, m). \quad (11)$$

其中:  $x$ 、 $\varphi$  表示罐体上点的位置坐标,  $P$  为罐内的压力,  $H$  为罐内液体的高度,  $\chi$  为液体组分,  $E$  为材料弹性模量,  $\nu$  为材料泊松比,  $L$  为罐体长度,  $R$  为罐体半径,  $T$  为罐壁厚,  $m$  为网格尺度,  $w$  为最大正应变,  $\sigma$  为最大正应力. 各个输入参数均带有一定的不确定性, 在模型计算过程中会通过不确定性的传播表现为所关心响应的不确定性. 根据概率盒求解的双层蒙特卡罗抽样方法, 前期对各个参数及样本进行相关研究, 将各参数分为 3 类: 随机不确定性、认知不确定性以及混合不确定性, 并通过 Bootstrap 方法对样本参数进行估计, 获得各个参数的具体分布; 之后进行抽样, 获得不确定性的量化结果.

本文使用储罐模型对所提出的确认度量方法进行验证: 考虑到实际工程问题中实验样本量受到限制, 对实验样本和仿真计算抽样次数进行限定. 首先, 在表 4 所给参数的条件下运行  $50 \times 20$  次的双层抽样, 作为获取实验概率盒的样本数据; 之后, 另设 3 组不同的输入参数, 保持其他参数不变, 改变认知不确定性参数  $\chi$  的认知不确定性分别为  $[0.95, 1]$ ,  $[0.75, 1]$  和  $[0.55, 1]$ , 进行  $50 \times 2000$  的双层抽样, 获得仿真概率盒的样本数据; 最后, 运用本文方法对这 3 组模型进行确认度量区间的求取. 通过对比 3 组度量区间的大小, 判断此方法是否具有反映模型认知不确定性大小的能力.

表 4 不确定性参数的分类及其分布

参数	表征类型
$\chi$	$[0.95, 1]$
$H/2R_1$	$[0.90, 0.96]$
$P(\text{Psig})$	$N(73.5, 3.38)$
$L(\text{in})$	$N(60.0, 0.36)$
$\nu$	$N(0.27, 0.012)$
$E(\text{psi})$	$N([2.81e+7, 3.0e+7], 3.6e+4)$
$R(\text{in})$	$N([30.0, 31.15], 0.81)$
$T(\text{in})$	$N([0.23, 0.25], 5.6e-5)$
$m$	4

通过运行本文提出的模型确认度量方法和步骤, 得到每一个模型的确认度量区间, 结果如表 5 所示.

表 5 3 组模型的确认度量结果

模型	1	2	3
度量区间	$[0.0010, 0.4291]$	$[0.0010, 0.4296]$	$[0.0000, 0.4307]$

从表 5 中 3 组模型确认度量区间的变化趋势上看, 模型 1 优于模型 2, 模型 2 优于模型 3. 确认度量结果可以反映仿真计算中认知不确定性大小的变化, 这一点符合文献 [10] 中关于确认度量性质的综述, 再次表明了本文所述方法的正确性和可行性.

同时还可以发现, 尽管模型 1 的数据与实验数据来自同一个模型, 确认度量区间的上界仍是一个较大的值, 并且进一步计算发现, 该值略大于仿真概率盒的面积. 结合上述实验样本个数与面积度量值之间关系以及文献 [2] 中关于面积确认度量方法的论述, 这表明在实验样本缺乏的情形下, 面积度量方法对模型形式不确定性偏于保守估计, 只有实验样本量足够的情况下, 面积度量值才会收敛到模型形式不确定性的真值.

### 3 结 论

1) 将多维模型概率盒和实验概率盒转化为一维的马氏距离概率盒, 并用概率盒的面积度量区间思想对模型的马氏距离概率盒和实验的马氏距离概率盒进行比较, 获取面积度量区间.

2) 通过数值算例和 2014 年美国圣地亚国家试验室发布的模型验证与确认挑战问题, 证实了该方法的正确性和有效性, 同时通过多次运行算法程序, 证实了所提出方法具有较好的稳定性.

3) 相比于基于 PIT 转换的面积度量方法, 该方法避免了求解多输出的联合分布函数, 大大提高了计算效率; 同时通过马氏距离转化, 在降维过程中很好地保存了多个输出量之间的相关性信息, 对于具有高维强相关性的多输出模型确认问题, 可以大大降低分析的复杂度.

4) 此外, 所提出的方法仍有一定的局限性. 首先, 通过马氏距离转化进行降维, 会对原来样本所包含的信息进行一定的压缩, 这对后续的可靠性评估带来很大的困难; 其次, 概率盒虽然能够简单有效地处理混合不确定性问题, 但是通过双层抽样算法进行概率盒的求解计算量过大, 在运算效率上仍待改进.

### 参考文献(References)

[1] 孙强, 岳继光. 基于不确定性的故障预测方法综述[J]. 控制与决策, 2014, 29(5): 769-778.  
(Sun Q, Yue J G. Review on fault prognostic method based on uncertainty[J]. Control and Decision, 2014, 29(5): 769-778.)

[2] Oberkampf W L, Roy C J. Verification and validation in scientific computing[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010: 183-198.

[3] 郭勤涛, 张令弥, 费庆国. 结构动力学有限元模型修正的发展——模型确认[J]. 力学进展, 2006, 36(1): 36-42.  
(Guo Q T, Zhang L M, Fei Q G. From FE model updating to model validation: Advances in modeling of dynamic structures[J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(1): 36-42.)

[4] 刘翠翠. 建模与仿真的 VV&A 方法研究[D]. 哈尔滨:

- 哈尔滨工程大学自动化学院, 2012.  
(Liu C C. Research on VV&A methods of the modeling and simulation[D]. Harbin: College of Automation, Harbin Engineering University, 2012.)
- [5] Oberkampf W L, Barone M F. Measures of agreement between computation and experiment: Validation metrics[J]. *J of Computational Physics*, 2006, 217(1): 5-36.
- [6] Oberkampf W L, Trucano T G, Hirsch C. Verification, validation, and predictive capability in computational engineering and physics[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2004, 57(5): 345-384.
- [7] Schwer L E. An overview of the PTC 60/V&V 10: Guide for verification and validation in computational solid mechanics[J]. *Engineering with Computers*, 2007, 23(4): 245-252.
- [8] Sornette D, Davis A B, Ide K, et al. Algorithm for model validation: Theory and applications[J]. *Proc of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2007, 104(16): 6562-6567.
- [9] 胡嘉蕊, 吕震宙. 基于核主成分分析的多输出模型确认方法[J]. *北京航空航天大学学报*, 2017, 43(7): 1470-1480.  
(Hu J R, Lyu Z Z. Model validation method with multivariate output based on kernel principal component analysis[J]. *J of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2017, 43(7): 1470-1480.)
- [10] Liu Y, Chen W, Arendt P, et al. Toward a better understanding of model validation metrics[J]. *J of Mechanical Design*, 2011, 133(7): 071005-1-13.
- [11] Ferson S, Oberkampf W L, Ginzburg L. Model validation and predictive capability for the thermal challenge problem[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2008, 197(29/30/31/32): 2408-2430.
- [12] Li W, Chen W, Jiang Z, et al. New validation metrics for models with multiple correlated responses[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 127(6): 1-11.
- [13] 赵亮, 杨战平. 基于概率分布距离的多响应模型确认度量[J]. *控制与决策*, 2015, 30(6): 1014-1020.  
(Zhao L, Yang Z P. Multiple response model validation metric based on distance of probability distribution[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(6): 1014-1020.)
- [14] Zhao L, Lu Z, Yun W, et al. Validation metric based on Mahalanobis distance for models with multiple correlated responses[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017, 159: 80-89.
- [15] Li L, Lu Z. A new method for model validation with multivariate output[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2018, 169: 579-592.
- [16] 刘信恩, 何琴淑, 陈学前. 区间值面积度量算法研究[C]. *中国力学大会——2015论文摘要集*. 上海, 2015: 324-329.  
(Liu X E, He Q S, Chen X Q. Numerical algorithm of interval-value area metric[C]. *The Chinese Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. Shanghai, 2015: 324-329.)
- [17] 肖钊. 基于概率盒理论的结构不确定性传播分析[D]. 长沙: 湖南大学机械与运载工程学院, 2016.  
(Xiao Z. Uncertainty propagation analysis of structures using probability box theory[D]. Changsha: College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, 2016.)
- [18] Aughenbaugh J M, Paredis C J J. The value of using imprecise probabilities in engineering design[J]. *J of Mechanical Design*, 2005, 128(4): 969-979.
- [19] Hills R G, Trucano T G. Statistical validation of engineering and scientific models: Background[R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1999.
- [20] Rebba R, Mahadevan S. Computational methods for model reliability assessment[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2008, 93(8): 1197-1207.
- [21] Rebba R, Mahadevan S. Validation of models with multivariate output[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017, 91(8): 861-871.
- [22] Oberkampf W L, Trucano T G. Verification and validation benchmarks[J]. *Nuclear Engineering & Design*, 2008, 238(3): 716-743.
- [23] Oberkampf W L, Barone M F. Measures of agreement between computation and experiment: Validation metrics[J]. *J of Computational Physics*, 2006, 217(1): 5-36.
- [24] Ferson S, Oberkampf W L. Validation of imprecise probability models[J]. *Int J of Reliability and Safety*, 2009, 3(1/2/3): 3-22.
- [25] 秦庆强, 张晓安, 李艾华, 等. 马氏距离在模拟电路硬故障检测中的应用研究[J]. *电子测量与仪器学报*, 2009, 23(7): 41-45.  
(Qin Q Q, Zhang X A, Li A H, et al. Research on the application of mahalanobis distance in catastrophic faults detection of analog circuits[J]. *J of Electronic Measurement and Instrument*, 2009, 23(7): 41-45.)
- [26] 赵录峰, 吕震宙, 张磊刚, 等. 多输出模型确认中的混合矩指标[J]. *国防科技大学学报*, 2015, 37(6): 61-68.  
(Zhao L F, Lyu Z Z, Zhang L G, et al. Mixed moment validation metric for models with multivariate output[J]. *J of National University of Defense Technology*, 2015, 37(6): 61-68.)
- [27] Hu K T, Carnes B, Romero V J. Introduction: The 2014 Sandia verification and validation challenge workshop[J]. *J of Verification, Validation & Uncertainty Quantification*, 2016, 1(1): 010301-1-4.

### 作者简介

张保强(1981—), 男, 讲师, 博士, 从事飞行器结构仿真模型确认方法的研究, E-mail: bqzhang@xmu.edu.cn;

苏国强(1993—), 男, 硕士生, 从事模型确认方法的研究, E-mail: 32020161151390@stu.xmu.edu.cn;

展铭(1989—), 男, 博士生, 从事模型修正与确认方法的研究, E-mail: zhanming@nuaa.edu.cn;

郭勤涛(1970—), 男, 副教授, 博士, 从事有限元模型修正与确认方法等研究, E-mail: guo\_qintao@nuaa.edu.cn.

(责任编辑: 李君玲)