基于深度学习的四旋翼无人机地面效应补偿降落控制设计

鲜 斌†, 耿向威

(天津大学 电气自动化与信息工程学院, 天津 300072)

摘 要: 本文针对四旋翼无人机在降落控制过程中地面效应对控制性能有较大影响的问题, 在地面效应复杂, 难以建立机理模型的约束下, 提出了一种基于深度学习的新型非线性鲁棒控制策略. 利用深度神经网络的学习能力, 建立了无人机降落过程中未知地面效应的补偿模型; 结合 super–twisting 控制设计, 实现了对降落过程中未知地面效应的快速抑制和无人机降落的精确控制. 通过 Lyapunov 分析法和谱归一化法, 证明了降落过程中闭环系统的稳定性和无人机位置误差的有限时间收敛特性. 实时飞行实验结果表明, 本文中提出的控制策略取得了较好的控制效果.

关键词: 四旋翼无人机；自主降落；地面效应补偿；非线性控制；深度学习；鲁棒控制

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0184

Robust Landing Controller Design for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehcile Ground Effects Compensation via Deep Learning

XIAN Bin†, GENG Xiang-wei

(School of Electrical and Information Engineering，Tianjin University，Tianjin 300072，China)

Abstract: In this paper, we propose a novel control strategy based on deep learning for a quadrotor to suppress the unknown ground effects during the landing procedure. Due to the complexity of the grounds effects, it is very difficult to obtain the accurate dynamic model. To solve this issue, we set up a compensation model for the ground effects in the landing procedure by using the learning ability of the deep neural network (DNN). Then the super–twisting method is combined with the DNN to formulate a nonlinear robust adaptive landing control strategy which is able to suppress the ground effects and drive the quadrotor to its desired landing point accurately. The Lyapunov based stability analysis and the spectral normalization are employed to prove the stability of the closed loop system, and finite–time convergence of landing error is also achieved. Real–time flight experimental results are included to show the good landing control performance of the proposed control strategy.

Keywords: quadrotor；autonomous landing；ground effects compensation；nonlinear control；deep learning；robust control

0 引 言

无人机回收技术是航空领域的关键技术, 可以应用于航母舰载机着舰, 无人机全自动物流等军用、民用场景中. 在各种回收方式中, 垂直着陆回收占地面积小且不易受地形限制, 具有一定优势. 四旋翼无人机具有能垂直起降、结构简单与灵活度高的特点, 可以实现垂直着陆回收. 因此, 四旋翼无人机的精准自主降落回收受到了很多研究人员的关注. 国内外均有团队进行了四旋翼的自主着陆系统的设计[1–3].

降落控制器是四旋翼无人机降落系统中的重要部分, 其控制效果直接影响整个系统的性能. 但是由于旋翼无人机在靠近地面时, 旋翼产生的气流与地面相互作用, 会产生较大的地面效应, 对无人机的降落控制产生较大干扰[4]. 因此, 地面效应的存在对降落控制器的设计提出了较大的挑战. 目前被广泛使用的地面效应模型为 Cheeseman–Bennett 模型, 但该模型主要针对旋翼以恒定速率旋转的大型直升机. 而四旋翼无人机由于旋翼直径小且转速变化较大, 所以难以使用该模型进行描述[5,6]. 此外, 由于四旋翼无人机各旋翼之间的相互作用, 更增加了四旋翼无人机地面效应的复杂程度. 针对该问题, 研究人员对 Cheeseman–Bennett 模型进行了改进并设计了

收稿日期: 2020-02-24；**修回日期:** 2020-05-12.

基金项目: 国家重点研发计划资助 (2018YFB1403900), 国家自然科学基金 (91748121, 90916004).

†通讯作者. E-mail: xbin@tju.edu.cn.

鲁棒控制器[7], 但该模型依然基于气流场平稳的假设, 而真实环境下流场并不稳定, 且文中仅对高度方向设计了鲁棒控制器, 其他方向依然使用 PID 控制器, 抗扰能力较差. 有研究人员在改进 Cheeseman–Bennett 模型的基础上基于反步法设计了控制器[8], 利用预先采集的飞行数据对模型参数进行整定, 但该方法需要飞行数据确定模型参数, 并且只进行了数值仿真验证, 尚未进行实验验证. 有研究人员设计了自适应滑模控制器[9] 以抑制地面效应. 但该方法响应较慢, 且滑模控制器容易引起抖震. 还有研究人员提出新的经验公式描述地面效应并设计地面效应观测器进行无人机控制[10], 但观测器的收敛速度较慢.

一些研究人员利用深度神经网络的学习功能对模型进行拟合. 文献 [11] 使用神经网络拟合旋翼直升机的动力学模型, 在此基础上完成特技飞行控制律的设计. 文献 [12] 利用拟合的四旋翼无人机动力学模型作为控制设计的基础. 文献 [13] 基于深度神经网络学习的动力学模型, 设计了无人机对移动标靶的跟踪与自主降落控制算法. 文献 [14] 开展了基于深度神经网络拟合动力学模型的微型无人机室内视觉导航与飞行控制设计. 文献 [15] 讨论了使用学习算法解决地面效应对小型无人机干扰问题的可能性. 但这些并没有直接涉及控制器的设计, 并且学习算法有可能在控制器中引入较为复杂的优化问题. 此外, 在使用包括深度神经网络在内的学习策略进行控制设计时, 难以提供较为详尽的飞行控制算法稳定性分析, 不利于无人机的安全飞行控制.

综上所述可知, 四旋翼无人机地面效应难以获得较为精确的动力学模型, 而常见的线性及非线性飞行控制算法设计多为基于动力学模型的设计策略, 对动力学模型的依赖程度较高. 同时, 现有的一些基于动态特性学习的飞行控制设计又存在稳定性分析较为困难, 涉及复杂优化问题求解而不利于实际飞行控制实现等问题. 本文受文献 [16] 的启发, 使用谱归一化提升网络的泛化能力, 并将深度神经网络的利普希茨常数限制到任意值. 在此基础上, 将谱归一化后的深度学习地面效应动态模型融入到无人机位置控制器设计中, 保证控制器的稳定性.

基于以上分析, 为解决四旋翼无人机在降落过程中地面效应影响难以机理建模以及基于学习算法控制器难以进行稳定性证明的问题, 本文设计了一种新型基于深度学习的地面效应补偿鲁棒控制器, 用于四旋翼无人机的降落控制. 解决了四旋翼无人机在降落时易受到地面效应干扰而影响降落控制性能的问题. 通过使用深度学习网络模型对四旋翼无人机受到的地面效应进行拟合, 并且在训练过程中对深度网络的参数进行谱归一化. 同时将基于深度学习训练的动态模型与 supwer–twisting 方法结合, 设计了一种新型非线性鲁棒控制律, 在补偿深度神经网络学习误差的同时, 提高了无人机降落过程控制的鲁棒性. 本文的主要创新点包括:(1) 利用深度神经网络的强大学习能力, 基于实际飞行测试获取的数据集, 对难以进行机理建模的四旋翼无人机地面效应复杂动态特性进行了离线学习, 建立了地面效应的精确补偿模型;(2) 将 super-twisting 鲁棒控制设计与基于深度学习网络的地面效应补偿模型相结合, 设计了一种新型非线性鲁棒控制算法, 用于四旋翼无人机自动降落控制, 并将 Lyapunov 稳定性分析法与谱归一化法结合, 证明了闭环系统的稳定性和无人机控制误差的有限时间收敛性; (3) 利用自制的四旋翼无人机实验平台, 对本文中提出的控制策略进行了飞行实验验证, 并与无补偿以及使用 Cheeseman–Bennett 模型补偿进行了降落控制对比实验. 实验结果表明, 本文的控制策略对地面效应具有更好的抑制效果, 并具有很好的可实现性.

1 无人机降落过程动力学模型

根据文献 [17,18], 四旋翼无人机降落过程中的动力学模型如下式所示:

$$\begin{cases} \dot{P} = v \\ m\dot{v} = mg + Rf_u + f_g \\ \dot{R} = RS(\omega) \\ J\dot{\omega} = J\omega \times \omega + \tau_u. \end{cases} \tag{1}$$

在式 (1) 中, $P(t), v(t)$ 为无人机在世界坐标系下的坐标和速度,$g = [0, 0, -g]^T$ 为重力加速度向量, $\omega(t)$ 为无人机的角速度, $R(t)$ 为机体坐标系到世界坐标系的变换矩阵, 且 $R(t) \in \mathrm{SO}(3)$. $S(\cdot)$ 为一个斜对称矩阵, $f_u(t)$ 为升力向量,$f_u(t) = [0, 0, T]^T$, 且 $T(t)$ 为机体坐标系下的升力. $\tau_u(t)$ 为转矩向量,$\tau_u(t) = [\tau_x(t), \tau_y(t), \tau_z(t)]^T$. 为方便后续的控制设计, 这里采用 $\eta(t) = [T(t), \tau_x(t), \tau_y(t), \tau_z(t)]^T$ 表示无人机自身的动力. 选取四个电机的转速的平方向量 $u(t) = [n_1^2(t), n_2^2(t), n_3^2(t), n_4^2(t)]^T$ 作为控制输入. 则控制输入 $u(t)$ 与无人机动力 $\eta(t)$ 的关系为 $\eta(t) = Bu(t)$,

这里输入系数矩阵 B 的定义如下:

$$B=\begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & c_T l_{arm} & 0 & -c_T l_{arm} \\ -c_T l_{arm} & 0 & c_T l_{arm} & 0 \\ -c_Q & c_Q & -c_Q & c_Q \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中,c_T, c_Q 为升力系数与转矩系数,l_{arm} 为无人机臂长. 式 (1) 中 $f_g(t)$ 为无人机受到的地面效应, $f_g(t)=[f_{gx}(t), f_{gy}(t), f_{gz}(t)]^T$. 在无人机降落过程中, 地面效应对无人机的影响较大且较为复杂, 难以获得 $f_g(t)$ 的精确解析表达式. 气流的干扰使得无人机降落的精度降低, 难度加大.

2　基于深度学习的地面效应补偿

本文使用深度学习网络对四旋翼无人机接近地面时产生的地面效应进行学习, 并使用修正线性单元 (Rectified Linear Units, ReLU)) 作为网络的激励函数. 使用 ReLU 作为激励函数可以提高网络的收敛速度, 并提高网络对于超参数的鲁棒性.

2.1　ReLU 深度神经网络

ReLU 深度神经网络可以用下列等式表示.

$$f(x,\theta)=W^{L+1}\phi(W^L\phi(W^{L-1}(\cdots\phi(W^1x)\cdots))), \quad (3)$$

式 (3) 中 $\theta=[W^1, W^2, \cdots, W^{L+1}]$ 为神经网络的权值, $\phi(x)=\max(0,x)$ 为 ReLU 激励函数. 相比于 $sigmoid(\cdot)$ 函数与 $tanh(\cdot)$ 函数, ReLU 函数计算简单, 并且能加速网络的收敛过程. 由于深度神经网络模型对输入的变化比较敏感, 在回归任务中, 网络对于未训练输入的输出值预测误差较大. 因此, 这里采用谱归一化技术提升网络性能, 增强网络对输入的鲁棒性.

2.2　谱归一化

谱归一化即在网络的训练过程中对网络的权值进行如下式所示的处理.

$$\bar{W}=\frac{W}{\sigma(W)}\gamma^{\frac{1}{L+1}}, \quad (4)$$

其中 γ 为一个正常数.

谱归一化是通过限制深度网络函数的利普希茨常数, 从而提升网络的泛化能力并增强网络的鲁棒性. 通过限制深度学习网络的利普希茨常数小于一个确定的值, 可以保证了加入深度神经网络的控制器的稳定性.

利普希茨常数 $\|f\|_{Lip}$ 定义为满足如下不等式的 K 的最小值:

$$\forall x, x': K \geqslant \frac{\|f(x)-f(x')\|}{\|x-x'\|}.$$

对于一个可导函数 $f(x)$, 其利普希茨常数为它的导数谱范数的最大值[16]. 即 $\|f\|_{Lip}=\sup_x \sigma(\nabla f(x))$.

引理 1　对于复合函数 $f\circ g = f(g(x))$, 有 $\|f\circ g\|_{Lip}\leqslant\|f\|_{Lip}\cdot\|g\|_{Lip}$.

证明　由 $\|f\|_{Lip}=\sup_x \sigma(\nabla f(x))$

$$\begin{aligned}\|f\circ g\|_{Lip} &= \sup_x \sigma(\nabla f(g(x))\cdot\nabla g(x)) \\ &\leqslant \sup_x \sigma(\nabla f(x))\cdot\sup_x \sigma(\nabla g(x)) \\ &= \|f\|_{Lip}\cdot\|g\|_{Lip}.\end{aligned}$$

证明完成. □

对 ReLU 深度神经网络进行谱归一化, 可以对整个网络的利普希茨常数进行约束.

引理 2　对于式 (3) 定义的 ReLU 深度神经网络 $f(x,\theta)$, 利用式 (4) 进行谱归一化, 则神经网络的利普希茨常数满足下列不等式:

$$\|f(x,\bar{\theta})\|_{Lip}\leqslant\gamma,$$

其中 $\bar{\theta}$ 为网络谱归一化后的参数, $\bar{\theta}=\bar{W}^1,\cdots,\bar{W}^{L+1}$, γ 是一个正常数.

证明　$\bar{\theta}$ 为谱归一化后的网络参数, 根据引理1可得下列不等式:

$$\begin{aligned}\|f(x,\bar{\theta})\|_{Lip} &= \|\bar{W}^{L+1}\phi(\bar{W}^L\phi(\cdots\phi(\bar{W}^1x)\cdots))\|_{Lip} \\ &\leqslant \|\phi\|_{Lip}^L\cdot\prod_{l=1}^{L+1}\sigma(\bar{W}^l).\end{aligned}$$

将上述不等式代入式 (4) 可得:

$$\begin{aligned}\|f(x,\bar{\theta})\|_{Lip} &\leqslant \|\phi\|_{Lip}^L\cdot\prod_{l=1}^{L+1}\sigma(\frac{W}{\sigma(W)}\gamma^{\frac{1}{L+1}}) \\ &= \|\phi\|_{Lip}^L\cdot\gamma.\end{aligned}$$

由于 ϕ 为 ReLU 函数,$\|\phi\|_{Lip}=1$, 因此有下列不等式成立:

$$\|f(x,\bar{\theta})\|_{Lip}\leqslant\|\phi\|_{Lip}^L\cdot\gamma=\gamma.$$

证明完成. □

2.3　地面效应补偿

由于四旋翼无人机的地面效应模型难以进行机理建模, 因此这里利用 ReLU 深度网络对四旋翼无人机地面效应进行拟合. 采用随机梯度下降法优化网络参数, 并在训练过程中对网络进行谱归一化. 根据引理 2, 谱归一化可以保证网络的利普希茨常数小于某个常数 γ, 即有:

$$\begin{aligned}&\underset{\theta}{\text{minimize}} && \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{T}\|y_t-f(x_t,\theta)\|_2 \\ &\text{subject to} && \|f\|_{Lip}\leqslant\gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

其中,$y_t(t)$ 为第 t 个地面效应数据,$x_t(t)$ 为无人机状态量与控制输入.

3 控制器设计

本文的控制目标为四旋翼无人机存在未建模地面效应的干扰下, 无人机的位置控制误差在有限时间范围内收敛. 为方便进行控制器设计, 定义位置跟踪误差 $e(t)=[e_x(t),e_y(t),e_z(t)]^T$ 如下:

$$e=P_d-P, \tag{6}$$

这里 $P_d(t)=[p_{dx}(t),p_{dy}(t),p_{dz}(t)]^T$ 代表无人机降落过程中的期望轨迹, 并满足以下假设条件.

假设 1 $P_d(t),\dot{P_d}(t),\ddot{P_d}(t)$ 连续, 并且有界.

定义滑模面 $s(t)$ 如下:

$$s=\dot{e}+\Lambda e, \tag{7}$$

其中,$\Lambda=diag\{\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z\}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 为对称增益矩阵. 定义无人机总推力 $f_d=Rf_u$, 这里将通过设计 $f_d(t)$ 进行控制器设计.

无人机的位置控制器设计为:

$$\begin{aligned} f_d=&Rf_u\\ =&m(\ddot{P}_d-g-\frac{1}{m}\hat{f}_g(\xi_g,u)+\\ &\Lambda(\dot{P}_d-\dot{P})+K_1S_{k1}-Y). \end{aligned} \tag{8}$$

其中,

$$S_{k1}=[|s_x|^{\frac{1}{2}}sgn(s_x),|s_y|^{\frac{1}{2}}sgn(s_y),|s_z|^{\frac{1}{2}}sgn(s_z)]^T, \tag{9}$$

$$\dot{Y}=-K_2[sgn(s_x),sgn(s_y),sgn(s_z)]^T. \tag{10}$$

式 (8) 中,$K_1=diag\{k_{1x},k_{1y},k_{1z}\}$ 为增益矩阵,$\hat{f}_g(\xi_g,u)$ 为深度神经网络对地面效应的估计值, $\xi_g(t)$ 为无人机状态量, 由无人机的高度, 姿态等与地面效应相关的状态组成,$u(t)$ 为控制量, $K_2=diag\{k_{1x},k_{2y},k_{2z}\}$ 为增益矩阵. 定义辅助函数向量 $\bar{f}_d(t)$ 如下式所示:

$$\bar{f}_d=m(\ddot{P}_d-g+\Lambda(\dot{P}_d-\dot{P})+K_1S_{k1}-Y). \tag{11}$$

并且有 $f_d=\bar{f}_d+\hat{f}_g$. 定义 $\hat{k}=\frac{f_d}{\|f_d\|}$ 为机体坐标系 z 轴（朝上）上的单位向量在惯性坐标系下的表示, 则控制器输出的总推力期望为 $T_d=f_d\cdot\hat{k}$. 进一步地, 根据 $f_d(t)$ 的方向, 结合偏航角的目标值, 可以解算姿态角的目标值 $R_d(t)$. 本文假设无人的有收敛速度足够快的内环（姿态角）控制器, 如串级 PID 控制器或滑模控制器等. 内环控制器将根据姿态角的目标值 $R_d(t)$ 计算无人机姿态角的控制转矩 $\tau_d(t)$, 进而可解得控制量 $u=[n_1^2,n_2^2,n_3^2,n_4^2]$, 即:

$$Bu=\begin{bmatrix}\hat{k}\cdot(\bar{f}_d+\hat{f}_g(\xi_g,u))\\ \tau_d\end{bmatrix}. \tag{12}$$

式 (12) 所示系统为一个非仿射系统,$u(t)$ 无法直接解出. 由于实际的控制系统均为离散系统, 采用下式对 $u(t)$ 进行迭代求解.

$$u_k=B^{-1}\begin{bmatrix}(\bar{f}_d+\hat{f}_g(\xi_g,u_{k-1}))\cdot\hat{k}\\ \tau_d\end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中,u_{k-1} 为上一时刻的控制量.

4 稳定性证明

定理 1 根据式 (13) 定义映射 $u_k=\mathcal{F}(u_{k-1})$, 则有:

$$\mathcal{F}(u)=B^{-1}\begin{bmatrix}(\bar{f}_d+\hat{f}_g(\xi_g,u))\cdot\hat{k}\\ \tau_d\end{bmatrix}, \tag{14}$$

其中,$u,\tau_d,\xi_g,\hat{k}$ 均为当前状态量. 若 $\hat{f}_g(t)$ 存在利普希茨常数 L_a, 且 $\sigma(B^{-1})\cdot L_a<1$, 则 $\mathcal{F}$ 为压缩映射, 式 (13) 中 u_k 收敛至唯一解 $u^\star=\mathcal{F}(u^\star)$.

证明 基于式 (14), 有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u_1)-\mathcal{F}(u_2)\|_2=&\|B^{-1}(\hat{f}_g(\xi_g,u_2)-\hat{f}_g(\xi_g,u_1))\|_2\\ \leqslant&\sigma(B^{-1})\cdot L_a\|u_1-u_2\|_2. \end{aligned}$$

由于 $\sigma(B^{-1})\cdot L_a\leqslant1$, 有 $\|\mathcal{F}(u_1)-\mathcal{F}(u_2)\|_2\leqslant\|u_1-u_2\|_2$, 证明完成. □

为方便后续稳定性证明, 这里引入定理 2:

定理 2 对于对称矩阵 $Q=\begin{bmatrix}k_1+2k_2p_{12} & -\frac{1}{2}(1-k_1p_{12})+k_2p_{22}\\ -\frac{1}{2}(1-k_1p_{12})+k_2p_{22} & -p_{12}\end{bmatrix}$, 存在正定对称矩阵 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$, 其中 $p_{11}=1,p_{12}=-\sqrt{\frac{a}{2\beta\Gamma}},p_{22}=\frac{a}{2\Gamma}$,$a,\Gamma$ 均为正常数且 $\beta>1$, 当式 (8) 中的控制增益 k_1,k_2 满足下列不等式时,Q 为正定矩阵.

$$\begin{cases}\mu\cdot\beta>1\\ \mu\sqrt{\dfrac{\beta k_2}{\alpha_2}}<k_1<\mu\sqrt{\dfrac{\beta k_2}{\alpha_1}},\end{cases} \tag{15}$$

其中 $\mu=-k_1p_{12},\alpha_1=\frac{1}{2}\{(1+\mu)-\frac{2}{\beta}[1+\sqrt{\mu\beta^2-(1+\mu)\beta+1}]\},\alpha_2=\frac{1}{2}\{(1+\mu)-\frac{2}{\beta}[1-\sqrt{\mu\beta^2-(1+\mu)\beta+1}]\}$.

证明 证明参见附录. □

为方便稳定性证明, 以无人机高度方向 (大地坐标系 z 轴方向) 为例进行分析,x,y 方向的稳定性可

同理得证. 根据式 (8),z 方向的控制输入信号为:

$$\begin{aligned} f_{dz} =&(Rf_u)_z \\ =&m(\ddot{P}_{dz} - g - \frac{1}{m}(\hat{f}_{gz}(\xi_g, u_{k-1})+ \\ &\lambda_z(\dot{P}_{dz} - \dot{P}_z))) + k_{1z}|s_z|sgn(s_z) - y_z). \end{aligned} \tag{16}$$

其中,$\dot{y_z} = -k_{2z}sgn(s_z)$.

定义深度学习网络拟合地面效应的误差为 $\epsilon(\xi_g, u) = \hat{f}_g(\xi_g, u) - f_g(\xi_g, u)$. 根据深度学习网络的性质, 可做如下假设.

假设 2 地面效应的估计误差较小且有上界, 对于高度通道来说, 即存在 $\epsilon_{mz} = \sup_{\xi\in\mathcal{Z}, u\in\mathcal{U}} \|\epsilon_z(\xi, u)\|$. 根据文献 [19] 假设该上界满足:$\frac{\epsilon_{mz}}{2m} < \delta_{1z} + \delta_{2z}\sqrt{|s_z| + y_z^2}$,$\delta_{1z}, \delta_{2z}$ 为正常数.

由于无人机内环控制频率远高于外环控制频率, 因而可做如下假设.

假设 3 $\|u_k - u_{k-1}\| \leqslant \rho\|\zeta_z\|$, 其中 $\zeta_z = [|s_z|^{\frac{1}{2}}sgn(s_z), sgn(s_z)]^T$,$\rho$ 为一个很小的正数.

定理 3 对于式 (1) 所示系统, 当式 (16) 中的控制器的控制参数 k_{1z}, k_{2z} 满足式 (15) 所示的条件, 且系统满足假设 1、2和 3时, 高度跟踪误差 $e_z(t)$ 与滑模面 $s_z(t)$ 在有限时间内收敛到零.

证明 将式 (16) 代入式 (1) 可得

$$\begin{aligned} \dot{s_z} =& - k_{1z}|s_z|^{\frac{1}{2}}sgn(s_z) + y_z + \\ &\frac{1}{m}(\hat{f}_{gz}(\xi_g, u_{k-1}) - f_{gz}(\xi_g, u_k)), \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\dot{y_z} = -k_{2z}sgn(s_z)$. 定义李雅普诺夫候选函数 $V(t)$ 为

$$V(t) = \zeta_z^T P\zeta_z, \tag{18}$$

其中,$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$, $\zeta_z = [|s_z|^{\frac{1}{2}}sgn(s_z), y_z]^T$. $V(t)$ 为正定二次函数, 径向无界, 且 $V(t)$ 满足如下不等式:

$$\lambda_{min}(P)\|\zeta_z\|_2^2 \leqslant V(t) \leqslant \lambda_{max}(P)\|\zeta_z\|_2^2. \tag{19}$$

式 (19) 中 $\lambda_{min}(P)$ 与 $\lambda_{max}(P)$ 分别代表矩阵 P 的最小特征值与最大特征值, $\|\cdot\|_2$ 为欧几里得范数,$\|\zeta\|_2^2 = \zeta_a^2 + \zeta_b^2$, 并且有如下不等式成立:

$$\begin{cases} |\zeta_a| = |s_z|^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\zeta_z\|_2 \leqslant \lambda_{min}^{-\frac{1}{2}}(P)V(t)^{\frac{1}{2}} \\ \|\zeta_z\|_2 \geqslant \lambda_{max}^{-\frac{1}{2}}(P)V(t)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{20}$$

对状态变量 $\zeta_z(t)$ 求导可得:

$$\dot{\zeta_z} = \frac{1}{|s_z|^{\frac{1}{2}}}\{A\zeta_z + \begin{bmatrix} \frac{1}{2m}(\hat{f}_{gz}(\xi_g, u_{k-1}) - f_{gz}(\xi_g, u_k)) \\ 0 \end{bmatrix}\}, \tag{21}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} -\frac{k_{1z}}{2} & \frac{1}{2} \\ -k_{1z} & 0 \end{bmatrix}$.

对 $V(t)$ 求一阶导数可得

$$\begin{aligned} \dot{V(t)} =& - \frac{1}{|s_z|^{\frac{1}{2}}}\{\zeta_z^T Q\zeta_z - \\ &\begin{bmatrix} \frac{1}{2m}(\hat{f}_{gz}(\xi_g, u_{k-1}) - f_{gz}(\xi_g, u_k)) \\ 0 \end{bmatrix} P\zeta_z\}, \end{aligned} \tag{22}$$

其中,$Q = A^TP + PA$. 取 $p_{11} = 1$, 则 $Q = \begin{bmatrix} k_1 + 2k_2p_{12} & -\frac{1}{2}(1 - k_1p_{12}) + k_2p_{12} \\ -\frac{1}{2}(1 - k_1p_{12}) + k_2p_{22} & -p_{12} \end{bmatrix}$. 由定理 2可知, 存在增益 k_{1z}, k_{2z} 使得 Q 正定. 定义函数 $W(t)$ 为:

$$\begin{aligned} W =& \begin{bmatrix} \frac{1}{2m}(\hat{f_{gz}}(\xi_g, u_{k-1}) - f_{gz}(\xi_g, u_k)) \\ 0 \end{bmatrix} P\zeta_z \\ =& \begin{bmatrix} \frac{1}{2m}(\hat{f_{gz}}(\xi_g, u_{k-1}) - \hat{f_{gz}}(\xi_g, u_k) + \epsilon_{mz}(\xi_g, u_k)) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &P\zeta_z. \end{aligned} \tag{23}$$

根据式 (23), 式 (22) 可写为如下形式:

$$\dot{V(t)} = -\frac{1}{|s_z|^{\frac{1}{2}}}(\zeta_z^T Q\zeta_z - W). \tag{24}$$

由定理 1可得:

$$\|\hat{f_{gz}}(\xi_g, u_k) - \hat{f_{gz}}(\xi_g, u_{k-1})\| \leqslant \sigma(B^{-1})L_a \cdot \|u_k - u_{k-1}\|. \tag{25}$$

根据式 (25) 与假设 2, 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} W \leqslant& [\frac{1}{2m}\sigma(B^{-1})L_a\|u_k - u_{k-1}\| + \\ &(\delta_{1z} + \delta_{2z}\|\zeta_z\|_2)]\vartheta\|\zeta_z\|_2, \end{aligned} \tag{26}$$

其中,$\vartheta = \sqrt{1 + p_{12}^2}$. 进一步, 根据假设 3可得:

$$W \leqslant [\frac{1}{2m}\sigma(B^{-1})L_a\rho\|\zeta_z\|_2 + (\delta_{1z} + \delta_{2z}\|\zeta_z\|_2)]\vartheta\|\zeta_z\|_2. \tag{27}$$

将式 (27) 代入式 (24) 可得如下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leqslant& - \frac{\|\zeta_z\|_2}{|s_z|^{\frac{1}{2}}}[\lambda_{min}(Q)\|\zeta_z\|_2 - \\ &(\frac{\sigma(B^{-1})L_a\rho}{2m} + \delta_{2z})\|\zeta_z\|_2\vartheta \\ &- \delta_{1z}\vartheta]. \end{aligned} \tag{28}$$

定义 $\delta_{3z} = \frac{\sigma(B^{-1})L_a\rho}{2m} + \delta_{2z}$, 将式 (20) 代入式 (28) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leqslant& - (\lambda_{min}(Q) - \delta_{3z}\vartheta)(\kappa\|\zeta_z\|_2 + \\ &(1 - \kappa)\|\zeta_z\|_2) + \delta_{1z}\vartheta \\ \leqslant& - \frac{\kappa(\lambda_{min}(Q) - \delta_{3z}\vartheta)}{\lambda_{max}^{\frac{1}{2}}(P)}V^{\frac{1}{2}}(t), \quad \forall\|\zeta_z\|_2 \geqslant \varkappa \end{aligned} \tag{29}$$

其中,κ 为一常数, 且 $\kappa \in (0,1)$, $\varkappa = \frac{\delta_{1z}\vartheta}{(1-\kappa)(\lambda_{min}(Q)-\delta_{3z}\vartheta)}$. 根据文献 [19], 系统状态在有限时间 T 内收敛到集合 Π_z:

$$\Pi_z = \{s_z \in \mathbb{R} | V(s_z) \leqslant \lambda_{max}\varkappa^2\}. \tag{30}$$

当 $\delta_{1z} = 0, \delta_{3z} < \frac{\lambda_{min}(Q)}{\vartheta}$ 时,$\varkappa = 0, \frac{\kappa(\lambda_{min}(Q)-\delta_{3z}\vartheta)}{\lambda^{\frac{1}{2}}_{max}(P)} < 0$. 因此 $e_z(t), s_z(t)$ 满足:

$$\lim_{t\to T} e_z(t) = \lim_{t\to T} s_z(t) = 0. \tag{31}$$

通过求解微分不等式 (29) 可得收敛时间 T 为:

$$T = \frac{2\lambda^{\frac{1}{2}}_{max}(P)}{\kappa(\lambda_{min}(Q)-\delta_{3z}\vartheta)}(V^{\frac{1}{2}}(t_0) - \lambda^{\frac{1}{2}}_{max}(P)\varkappa). \tag{32}$$

证毕. □

5 实验验证

为验证本文提出的自动控制策略的有效性, 我们搭建了无人机降落实验平台进行数据采集以及降落控制实验. 在此基础上, 分别进行了无地面效应补偿控制、使用 Cheeseman–Bennett 模型进行地面效应补偿控制以及使用本文提出的基于深度学习进行地面效应补偿控制的降落实验, 并对数据进行了分析. 最后比较了基于常规最小二乘法与本文提出的基于深度学习的方法对无人机地面效应的拟合效果.

本文中使用的实验平台主要由两台 PC 计算机、一架四旋翼无人机以及动作捕捉系统组成. 其中, 捕捉系统实时捕获无人机的位置信息, 使用一台 PC 机作为数据处理计算机, 将结果通过 Wifi 发送到无人机. 另一台 PC 计算机用于地面效应的拟合训练, 并根据无人机的位置及控制量将地面效应的估计值实时地发送给无人机. 四旋翼无人机由机架, 飞行控制器, 电机与螺旋桨构成. 无人机质量为 0.91kg, 机架直径为 35cm, 螺旋桨直径为 24cm, 螺距为 12.7cm.

5.1 四旋翼无人机地面效应学习

本文通过采集降落过程中无人机飞行状态反馈信息构建数据集, 利用深度神经网络对无人机降落过程地面效应进行学习, 获取对应的地面效应动态模型.

地面效应的真值通过机载传感器获得, 结合飞行控制器上的惯性测量单元 (IMU)、飞行控制器的输出信号、以及动作捕捉系统的信息, 可以解算无人机在整个飞行期间受到的地面效应. 地面效应的数值可由如下所示的公式进行解算:

$$f_g = ma + mg - Rf_u, \tag{33}$$

其中,m 为无人机质量,$a(t)$ 为无人机的加速度,$f_u(t)$ 为总升力, 且有 $f_u = [0, 0, C_T n^2_{sum}]^T$,$C_T$ 为升力系数,n^2_{sum} 为四个桨的转速平方之和. 由于实际飞控为 PWM 输出,PWM 波占空比与转速平方成正比, 即 $\rho_{pwm} \cdot PWM_{total} = n^2_{sum}$, 因此 $f_u = [0, 0, C_T\rho_{pwm} \cdot PWM_{total}]^T$. 由于无人机悬停时产生的升力等于自身重力, 基于此对 $C_T\rho_{pwm}$ 进行标定. 经过飞行实验测试可得 $C_T\rho_{pwm} = 0.00445N/rad^2$.

式 (33) 中 $a(t)$ 可由无人机机载加速度计得到,$R(t)$ 可由机载陀螺仪数据得到,$f_u(t)$ 可由 PWM 输出结合标定结果得出. 因此可以由式 (33) 计算出无人机整个飞行期间的地面效应. 由于实验过程中无人机的姿态平稳, 高度方向外的方向地面效应几乎为 0, 因此在实验中主要对高度方向的地面效应进行拟合和补偿. 本文主要通过手工遥控无人机的方式来采集所需数据, 共采集了 48041 组地面效应数据作为地面效应数据集.

本文使用 PyTorch(1.3.0 版本) 深度学习框架搭建 ReLU 深度学习网络对地面效应进行拟合, 并在训练过程中进行谱归一化将网络的利普希茨常数限制在 1 以下. 实验中设计的深度网络为六层网络, 输入层有 5 个节点, 对应四个电机的控制量与无人机的高度, 输出层有 1 个节点, 为无人机高度方向的地面效应输出, 四层隐含层分别有 20、30、30 和 20 个节点. 由于 IMU 数据含有噪声, 这里深度学习网络的损失函数选择为平方误差函数, 以减少数据噪声对网络的影响.

5.2 无人机降落控制实验

选取飞行控制律的参数为 $\Lambda = diag\{1.25, 1.25, 2.43\}$, $K_1 = diag\{0.83, 0.83, 0.993\}$,$K_2 = diag\{0.03, 0.03, 0.073\}$. 在该鲁棒控制器下分别进行了从 100cm 高度无地面效应补偿控制、使用 Cheeseman–Bennett 模型进行补偿控制以及使用深度神经网络进行补偿控制的实验. 本文各实验中均没有对偏航角 (yaw) 设定固定值, 只控制偏航角保持起飞时刻的设定值.

(1) 无地面效应补偿的降落控制

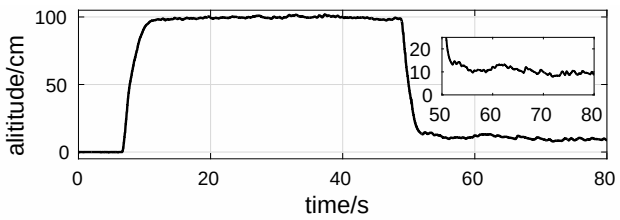


图 1 无地面效应补偿控制: 无人机高度

图 1为无地面效应补偿控制中无人机的高度变化曲线. 无人机在 6.6 秒起飞, 目标值为 100cm; 在

48.82 秒降落, 目标值为 0cm. 从图 1可以看出, 无人机在 6.6 秒起飞后, 在鲁棒控制器的作用下在 11.86 秒进入稳态范围. 无人机在 48.82 秒开始降落, 并且在 52.08 秒开始进入到无法降落的状态, 即使在控制器有积分作用的情况下, 直到 80 秒也仅仅下降到 9cm 左右. 可以看出, 由于受到强烈的地面效应作用, 无人机降落时无法像起飞时一样快速收敛到目标值.

在降落过程中, 无人机的姿态角变化曲线如图 2所示.

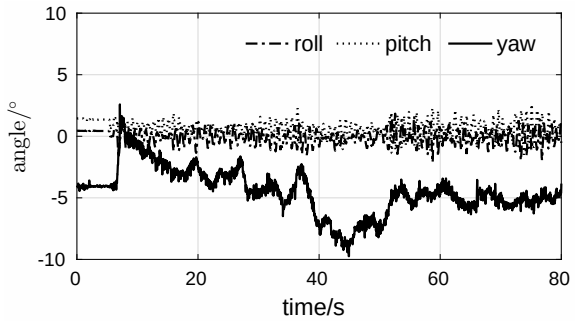


图 2　无地面效应补偿控制: 无人机姿态角

在降落过程中, 无人机的控制输入量如图 3所示.

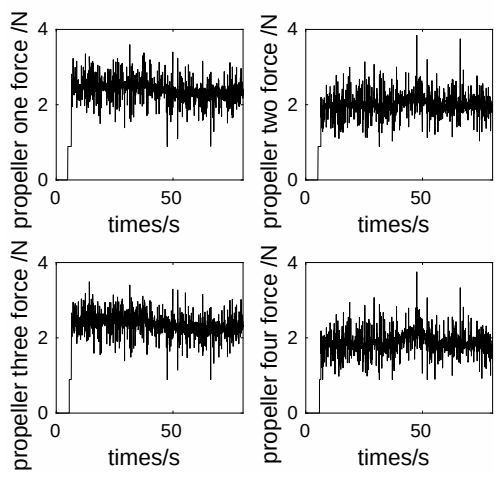


图 3　无地面效应补偿控制: 无人机控制输入量

(2) 使用 Cheeseamn–Bennett 模型补偿的降落控制

根据文献 [5], 采用如下式所示的地面效应动态模型进行降落补偿控制

$$\frac{T_{IGE}}{T_{OGE}}=\frac{1}{1-(\frac{R_{Blade}}{4Z})^2},\quad \frac{Z}{R_{Blade}}>0.25. \tag{34}$$

式 (34) 中 $T_{IGE}(t)$ 为在地面效应影响下无人机的升力,$T_{OGE}(t)$ 为无地面效应时无人机的升力,R_{Blade} 为螺旋桨半径,$Z(t)$ 为螺旋桨距离地面高度. 实验结果中, 无人机高度变化曲线如图 4所示.

从图 4中可以看出, 无人机在 4.6 秒起飞, 目标值为 100cm; 在 9.6 秒进入稳态范围; 在 40.78 秒开始降落. 由于地面效应的作用, 降落曲线在 44.7 秒左右产生了一个较大的拐点. 在控制器积分部分与模型补偿的共同作用下, 无人机在 66.1 秒降落成功.

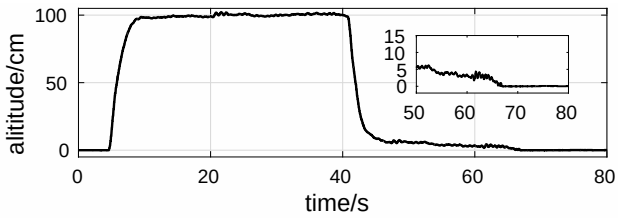


图 4　基于 Cheeseman-Bennett 模型的补偿控制: 无人机高度

在降落过程中, 无人机的姿态角变化曲线如图 5所示.

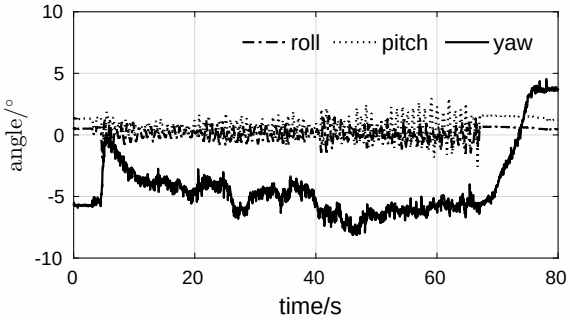


图 5　基于 Cheeseman-Bennett 模型的补偿控制: 无人机姿态角

无人机在 66.1 秒降落, 但从图 5中看出.66.1 秒之后无人机的偏航角出现了持续增加, 这是由于无人机降落成功之后并不会立即停桨, 而会保留一个怠速 (可从下图控制量曲线看出). 由于无人机的重心位置并不处于绝对的中心位置, 从而产生一个方向向上的力矩. 而本实验中无人机脚架仅由四个细金属柱组成, 实验地面为瓷砖. 脚架与地面之间的摩擦力较小, 不足以平衡怠速产生的力矩, 因此无人机轻微旋转. 该情况并不影响本文讨论的降落过程.

在降落过程中, 无人机的控制输入量如图 6所示.

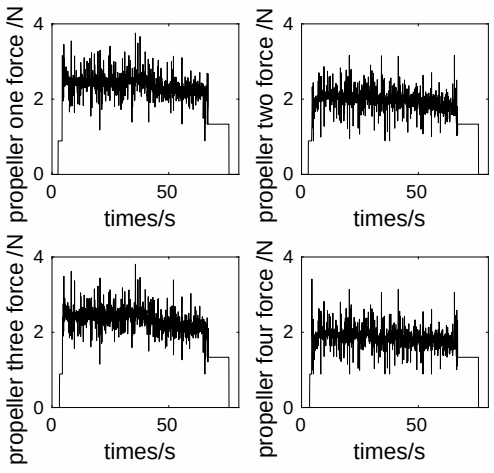


图 6　基于 Cheeseman-Bennett 模型的补偿控制: 无人机控制输入量

(3) 基于深度学习进行补偿的降落控制

使用本文研究的基于深度学习的地面效应补偿控制实验中, 无人机高度变化曲线如图 7所示. 无人机在 3.2 秒起飞, 目标值为 100cm; 在 8.3 秒进入稳态区间; 在 40.2 秒开始降落, 在 45.7 秒降落成功. 可以看出, 无人机从 100cm 向下降落过程的收敛时间 (5.3 秒) 与起飞至 100cm 收敛时间 (5.1 秒) 一致, 地面效应对无人机降落过程影响较小.

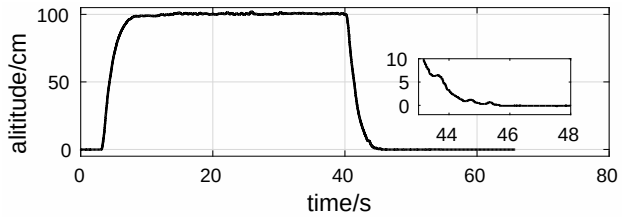


图 7 基于深度学习的补偿控制: 无人机高度

在降落过程中, 无人机的姿态角变化曲线如图 8所示。

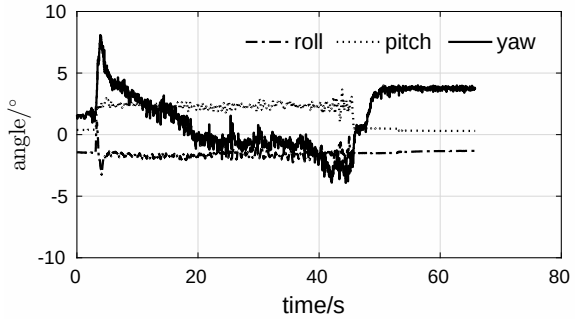


图 8 基于深度学习的补偿控制: 无人机姿态角

在该实验过程中, 无人机降落后的偏航角增加与 Cheeseman–Bennett 模型补偿实验中的分析一致, 也是由于脚架与地面摩擦不能抵消怠速产生的力矩所致. 该情况并不影响本文讨论的降落过程.

在降落过程中, 无人机的控制输入量如图 9所示

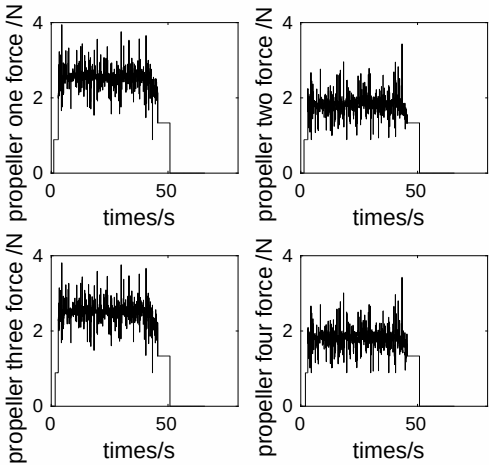


图 9 基于深度学习的补偿控制: 无人机控制输入量

图 10为三组实验中, 无人机高度控制误差变化曲线。

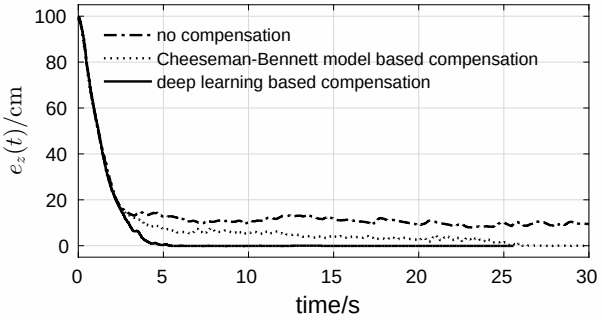


图 10 降落误差曲线

从图 10中可以看出, 不进行任何补偿的降落系统在地面效应的作用下无法降落. 虽然 Cheeseman–Bennett 模型修正可以使无人机成功降落, 但需要 25.4 秒才能成功降落, 而且从图 10中可以明显看出地面效应对无人机的影响依然明显, 降落效果不佳. 基于深度神经网络的降落实验降落用时 5.5 秒, 效果较好.

5.3 与最小二乘法拟合泛化能力对比

使用最小二乘法也可以对地面效应进行拟合, 但是最小二乘法与深度学习相比较, 泛化能力较弱, 对于数据集中未出现过的数据效果较差. 为方便比较, 本文以高度作为输入, 高度方向的地面效应作为输出. 使用采集的地面效应数据集进行拟合与训练. 该数据集仅包含 0–200cm 的数据. 为比较模型的泛化能力, 令模型的估计范围为 0–250cm. 最小二乘法最高次为 5 次, 深度学习模型只将前文模型的输入层节点数改为 1, 结果如图 11所示.

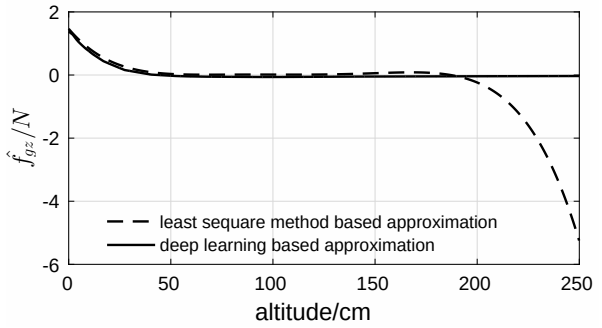


图 11 两种拟合方法比较

从图中结果可以看出, 在有数据指导的 0-200cm 部分, 两种方法差异并不明显. 但在没有数据指导 200-250cm 部分, 深度学习拟合的方法预测效果明显优于最小二乘法.

6 结论

本文针对无人机降落过程易受地面效应影响从而影响降落控制性能的问题, 提出了基于深度学习

的地面效应补偿鲁棒控制器. 使用深度神经网络补偿地面效应在无人机降落过程中产生的扰动; 基于super–twisting 的鲁棒控制器抑制拟合误差, 从而提高无人机的降落控制性能. 利用谱归一化对深度神经的参数进行调整, 使其满足利普希茨条件, 并基于此使用基于 Lyapunov 的稳定性分析方法, 从理论上证明了闭环系统的稳定性, 并证明了在该控制器作用下, 无人机在降落过程中的位置误差能在有限时间内收敛至零. 使用自制的实验平台进行了本文方法、无补偿以及使用 Cheeseman–Bennett 模型补偿的降落控制对比实验, 验证了本文中提出的基于深度学习的降落控制策略能有效克服地面效应的影响, 提高无人机降落控制性能。此外, 还进行了本文中提出的基于深度学习的地面效应估计与基于常规最小二乘法的地面效应估计实验, 实验结果表明本文中提出的地面效应估计方法具有更好的泛化能力, 更适合用于无人机的降落控制.

本文所提出的控制器也可以应用于特殊地形的地面效应估计中, 下一步考虑在深度神经网络中加入水平位置数据与地形信息, 提升无人机在不同地形不同位置下的降落能力.

参考文献 (References)

[1] 贾配洋, 彭晓东, 周武根. 四旋翼无人机自主移动降落方法研究 [J]. 计算机科学, 2017, 44(B11): 520-523. (Jia P Y, Peng X D, Zhou W G.Research on Autonomous Landing of Quad–rotor UAV[J]. Computer Science, 2017, 44(B11): 520–523.)

[2] Falanga D, Zanchettin A, Simovica, et al. Vision-based autonomous quadrotor landing on a moving platform[C].2017 IEEE International Symposium on Safety, Security and Rescue Robotics (SSRR). Shanghai, China: IEEE, 2017: 200-207.

[3] Baca T, Stepan P, Spurny V, et al. Autonomous landing on a moving vehicle with an unmanned aerial vehicle[J]. Journal of Field Robotics, 2019, 36(5): 874-891.

[4] Cheeseman I C, Bennett W E. The effect of ground on a helicopter rotor in forward flight[J]. R. & M., 1955, No.3012.

[5] Conyers S A, Rutherford M J, Valavanis K P. An empirical evaluation of ground effect for small-scale rotorcraft[C].2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Brisbane, Australia: IEEE, 2018: 1244-1250.

[6] Kan X, Thomas J, Teng H, et al. Analysis of Ground Effect for Small-Scale UAVs in Forward Flight[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2019, 4(4): 3860-3867.

[7] Li D J, Zhou Y, Shi Z Y, et al. Autonomous landing of quadrotor based on ground effect modelling[C].2015 34th Chinese Control Conference (CCC). Hangzhou, China: IEEE, 2015: 5647-5652.

[8] Keshavarzian H, Daneshjou K. Modified under-actuated quadrotor model for forwarding flight in the presence of ground effect[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 89: 242-252.

[9] Lee D, Ryan T, Kim H J. Autonomous landing of a VTOL UAV on a moving platform using image-based visual servoing[C].2012 IEEE international conference on robotics and automation. St Paul, MN, USA: IEEE, 2012: 971-976.

[10] He X , Kou G , Calaf M , et al. In-Ground-Effect Modeling and Nonlinear Disturbance Observer for Multi-rotor UAV Control[J]. Journal of Dynamic Systems Measurement & Control, 2019, 141(7):071013.

[11] Abbeel P, Coates A, Ng A Y. Autonomous helicopter aerobatics through apprenticeship learning[J]. The International Journal of Robotics Research, 2010, 29(13): 1608-1639.

[12] Mohajerin N, Mozifian M, Waslander S. Deep learning a quadrotor dynamic model for multi-step prediction[C].2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Brisbane, Australia: IEEE, 2018: 2454-2459.

[13] Rodriguez-ramos A, Sampedro C, Bavle H, et al. A deep reinforcement learning strategy for UAV autonomous landing on a moving platform[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2019, 93(1-2): 351-366.

[14] Palossi D, Conti F, Benini L. An Open Source and Open Hardware Deep Learning-powered Visual Navigation Engine for Autonomous Nano-UAVs[C].2019 15th International Conference on Distributed Computing in Sensor Systems (DCOSS). Santorini Island, Greece: IEEE, 2019: 604-611.

[15] Karydis K, Kumar V. Energetics in robotic flight at small scales[J]. Interface focus, 2017, 7(1):20160088.

[16] Miyato T, Kataoka T, Koyama M, et al. Spectral Normalization for Generative Adversarial Networks[C].International Conference on Learning Representations. Vancouver,Canada, 2018.

[17] Zhao B, Xian B, Zhang Y, et al. Nonlinear robust adaptive tracking control of a quadrotor UAV via immersion and invariance methodology[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 62(5): 2891-2902.

[18] Shi G, Shi X, O'connell M, et al. Neural lander: Stable drone landing control using learned dynamics[C].2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Montreal, Canada: IEEE, 2019: 9784-9790.

[19] Moreno J A, Osorio M. Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm[J].IEEE transactions on automatic control, 2012, 57(4): 1035-1040.

作者简介

鲜　斌 (1975–), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统控制、无人机系统、实时控制系统及其应用等研究, E-mail: xbin@tju.edu.cn;

耿向威(1996−), 男, 硕士研究生, 从事旋翼无人机自主导航与非线性控制研究, E-mail: xiangweigeng@tju.edu.cn.

附录

引理 3 对于对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}$, 以下三个条件等价:

- $A>0$
- $A_{11}>0, A_{22}-A_{12}^TA_{11}^{-1}A_{12}>0$
- $A_{22}>0, A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T>0$

定理 2 对于对称矩阵 $Q=\begin{bmatrix} k_1+2k_2p_{12} & -\frac{1}{2}(1-k_1p_{12})+k_2p_{22} \\ -\frac{1}{2}(1-k_1p_{12})+k_2p_{22} & -p_{12} \end{bmatrix}$ 存在正定对称矩阵 $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $p_{11}=1, p_{12}=-\sqrt{\frac{a}{2\beta\Gamma}}, p_{22}=\frac{a}{2\Gamma}$,$a,\Gamma$ 均为正常数且 $\beta>1$, 当 super–twisting 增益 k_1,k_2 满足不等式 (15) 时,Q 为正定矩阵.

证明 由引理 3知,$p_{12}<0, Q$ 矩阵为正定矩阵的条件为下列不等式成立.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(1-k_1p_{12})^2+(k_1+2k_2p_{12})p_{12}+\\ k_2^2p_{22}^2+(1-k_1p_{12})k_2p_{22}<0\end{aligned} \tag{35}$$

令 $\mu=-k_1p_{12}, \alpha=k_2p_{22}$, 有 $k_1=-\mu\sqrt{\frac{2\beta\Gamma}{\alpha}}, k_2=2\Gamma$ 由 $\beta=\frac{p_{22}}{p_{12}^2}$, 则上式可写为:

$$\mu-\frac{2}{\beta}\alpha>\alpha^2-(1+\mu)\alpha+\frac{1}{4}(1+\mu)^2 \tag{36}$$

当 $\mu\beta>1$ 时, 不等式 (36) 有解:

$$\alpha_1<\alpha<\alpha_2$$

其中:

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{2}\{(1+\mu)-\dfrac{2}{\beta}[1+\sqrt{\mu\beta^2-(1+\mu)\beta+1}]\}\\ \alpha_2=\dfrac{1}{2}\{(1+\mu)-\dfrac{2}{\beta}[1-\sqrt{\mu\beta^2-(1+\mu)\beta+1}]\}\end{cases} \tag{37}$$

因此, 当 k_1,k_2 满足下列不等式时,Q 为正定矩阵.

$$\begin{cases}\mu\cdot\beta>1\\ \mu\sqrt{\dfrac{\beta k_2}{\alpha_2}}<k_1<\mu\sqrt{\dfrac{\beta k_2}{\alpha_1}}\end{cases} \tag{38}$$

证明完毕. □