

一种两相幂次吸引律离散时间控制方法

陈强, 叶艳, 胡轶, 孙明轩[†]

(浙江工业大学信息工程学院, 杭州 310023)

摘要: 针对一类不确定离散时间系统, 提出一种新型两相幂次吸引律. 在吸引律设计中, 通过将跟踪误差收敛过程划分为两个不同阶段, 增加误差收敛幅度和提高误差收敛速度. 构造离散形式的扩张状态观测器有效补偿系统干扰, 并基于观测值设计两相幂次形式的离散时间控制器, 提高系统鲁棒性和减小稳态误差. 此外, 推导出跟踪误差绝对吸引层和稳态误差带的具体表达式, 并给出了最大收敛步数分析, 用于刻画系统稳态和瞬态性能. 仿真结果验证了所提方法的有效性.

关键词: 吸引律; 两相幂次; 扩张状态观测器; 离散时间控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1228

A two-phase power attracting law based discrete-time control

CHEN Qiang, YE Yan, HU Yi, SUN Ming-xuan[†]

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: In this paper, a novel two-phase power attracting law based control scheme is proposed for a class of uncertain discrete-time systems. In the design of the attracting law, the convergence process of the tracking error is divided into two different stages, such that the amplitude of each convergence step and the error convergence speed can be both improved. An extend state observer is constructed to effectively compensate for system disturbances, and a discrete-time controller with two-phase power is presented to improve the system robustness and reduce the steady-state error. In addition, the steady-state error band, the attractive layer and the maximum step size of the tracking error converging into the steady-state error band are respectively derived to characterize both the steady-state and transient performance. The simulation results are provided to show effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: Attracting law; two-phase power; extend state observer; discrete-time control

0 引言

离散时间控制方法主要有极点配置^[1-3]、离散变结构控制^[4-7]等. 其中, 趋近律是离散变结构控制常用的一种方法. 常见的趋近律形式有指数、幂次以及变速趋近律等. 文献[7]提出基于指数趋近律的离散变结构控制方法, 并给出准滑动模态以及准滑模带宽的概念. 文献[8]和[9]推导出指数趋近律的准滑模带宽表达式以及新的准滑动模态定义. 文献[10]在离散指数趋近律控制中引入干扰观测器, 补偿干扰对切换动态的影响, 进而提高控制精度. 文献[11]针对一类不确定离散系统, 采用单位向量连续化处理, 提出一种能够有效减弱抖振的新型离散趋近律. 除了指数趋近律, 近年来幂次趋近律也成为研究热点之一. 文献[12]给出幂次趋近律准滑模带

宽以及准滑动模态的到达时间. 文献[13]利用幂次函数构造一种新型离散趋近律, 并给出无抖振的理论证明. 文献[14]和[15]分别提出双幂次以及多幂次形式的趋近律, 有效提高系统状态的收敛速度. 为进一步提高可调参数的灵活性和系统控制性能, 文献[16]针对连续系统提出一种两相幂次形式的吸引子, 其吸引过程可根据误差大小分为两个阶段, 各阶段对应的幂值不同, 从而进一步提高收敛速度.

实际控制系统中往往存在模型不确定以及外部干扰等未知动态, 对系统的控制性能带来不利影响. 文献[17]针对一类干扰不匹配的线性离散时间系统, 提出广义扩张状态观测器和相应的稳定化状态反馈控制器设计方法. 文献[18]将扰动抑制措施“嵌入”幂次趋近律, 提出一种理想切换动态设计方法. 在此

收稿日期: 2020-09-04; 修回日期: 2021-01-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61973274, 62073291); 浙江省自然科学基金项目(LY17F030018); 高端装备先进感知与智能控制教育部重点实验室开放课题(GDSC202010)

[†]通讯作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.

基础上,文献[19]提出一种理想误差动态方法,即吸引律.与趋近律注重滑模运动的不变性不同,吸引律方法以跟踪误差取代切换函数、原点取代切换面,更追求系统稳态运动的不变性.文献[20]通过引入自适应切换增益构造自适应吸引律,该方法能根据不确定干扰变化率对闭环系统影响的强弱自动调整切换增益大小.文献[21]构造一种能够约束控制输入变化速度的变速吸引律,实现跟踪误差在有限时间内单调收敛至零.文献[22]提出一种基于椭圆吸引律的离散重复控制方法,并构造离散扩张状态观测器对系统未知扰动进行有效抑制.文献[23]提出一种基于无切换吸引律的离散控制器设计方法,将干扰差分补偿措施嵌入吸引律中,进而减小抖振和有效抑制干扰.文献[24]提出一种基于幂次吸引律的离散多周期重复控制方法,用以解决多周期干扰的抑制问题.

基于以上讨论,本文针对一类不确定离散时间系统,提出一种两相幂次形式的吸引律方法,采用跟踪误差替换趋近律中的切换函数,保证跟踪误差有限时间内收敛至原点.与现有的吸引律方法相比,两相幂次吸引律表现为两相吸引过程,其通过在跟踪误差收敛的不同阶段取不同的幂次值,使得两相幂次形式下系统误差每步收敛的幅度更大,收敛速度更快,进而有效改善系统误差的收敛性能.为了有效补偿系统干扰的影响,构造离散形式的扩张状态观测器,提高系统鲁棒性.此外,利用绝对吸引层、稳态误差带以及最大收敛步数刻画系统的稳态和瞬态性能,并给出数值仿真验证所提方法的有效性.

1 问题描述

考虑如下单输入单输出离散时间系统

$$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k + w_k, \quad (1)$$

其中, u_k 和 y_k 分别为 k 时刻系统的输入和输出信号, w_k 为 k 时刻的系统有界干扰, $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 为延迟因子 q^{-1} 的多项式,即

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n}, \\ B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + \cdots + b_mq^{-m}, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ 为系统结构参数, m 和 n 为正整数且满足 $1 \leq m \leq n$.

给定参考信号 r_k , 定义跟踪误差为

$$e_k = r_k - y_k. \quad (3)$$

本文的控制目标是,针对离散系统(1),设计控制信号序列 u_k ,使得存在外部干扰 ω_k 的情况下,实现输出信号 y_k 对参考信号 r_k 的快速跟踪.

为分析系统跟踪误差的瞬态性能和稳态性能,给出如下概念刻画跟踪误差动态行为^[19]

1) 绝对吸引层 Δ_{AAL} : 表示跟踪误差收敛过程中存在一个绝对吸引区间,且在绝对吸引层边界外 $|e_k|$ 单调递减,即:

$$|e_k| > \Delta_{AAL} \Rightarrow |e_{k+1}| < |e_k|. \quad (4)$$

2) 稳态误差带 Δ_{SSE} : 表示系统跟踪误差可以收敛至平衡点附近的一个邻域,且一旦进入该邻域, e_k 就会稳定在该邻域内,即:

$$|e_k| \leq \Delta_{SSE} \Rightarrow |e_{k+1}| \leq \Delta_{SSE}. \quad (5)$$

注1 由文献[19]可得,对于离散系统跟踪误差序列,跟踪误差收敛的充要条件为

$$|e_{k+1}| < |e_k|. \quad (6)$$

2 两相幂次吸引律设计

理想误差动态方法的动机源于离散变结构控制的理想切换动态方法,以跟踪误差取代变结构控制中的切换函数,使得跟踪误差能够实现直接且快速的收敛.为保证跟踪误差有限步收敛和提高误差收敛性能,本文构造一种新型两相幂次吸引律,其跟踪误差收敛特性表现为两个收敛阶段,通过在每个阶段设置不同的幂值,提高误差收敛速度.两相幂次吸引律的具体形式如下式所示

$$e_{k+1} = e_k - \rho |e_k|^\lambda \text{sgn}(e_k), \quad (7)$$

其中, $0 < \rho \leq 0.5$, λ 为幂次项的幂次,跟踪误差处于不同阶段其取不同的数值,具体表达式为

$$\lambda = \begin{cases} \alpha, & |e_k| \geq 1, \\ \frac{1}{\alpha}, & |e_k| < 1, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $1 < \alpha \leq 2$.

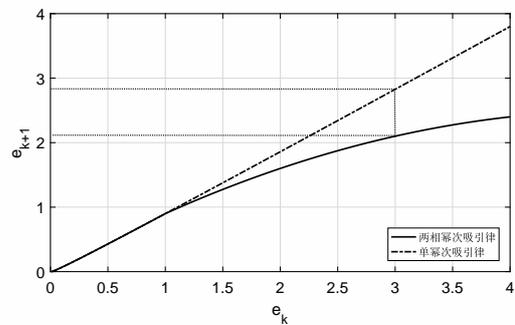


图1 两种幂次吸引律对比(取 $\alpha = 2$)

式(7)表示的幂次吸引律表现为两相收敛过程,即系统误差绝对值大于1时取幂次大于1的正数,而系统误差绝对值小于1时取幂次小于1的正数.为

更好地说明两相幂次吸引律的优越性,给出如下单幂次形式的吸引律

$$e_{k+1} = e_k - \rho |e_k|^{\frac{1}{\alpha}}(e_k), \quad (9)$$

其在靠近平衡点即系统状态绝对值小于1时,收敛速度较快,但远离平衡点时,收敛速度较慢.图1给出了两相幂次吸引律形式与单幂次形式的对比效果.由图1可看出,当系统状态绝对值小于1时,两相幂次吸引律形式与单幂次吸引律相同;当系统状态绝对值大于1时,在 e_k 值相同的情况下,以两相幂次形式吸引的系统误差 e_{k+1} 值小于以单幂次形式吸引的误差值,且两相幂次形式每步收敛的幅度更大,收敛速度更快.

3 干扰抑制措施

由于实际系统中往往存在外部干扰,即 $w_k \neq 0$.有必要在设计吸引律时引入干扰抑制措施,使其具备一定的抗干扰能力.本节将给出等效干扰补偿和离散扩张状态观测器两种干扰补偿方法.观测器设计和收敛分析中需要如下假设.

假设1 [17] 式(1)中的干扰 w_k 为有界干扰,且采样时间足够小,则 w_k 在两个相邻采样周期内变化不会很大,满足 $w_{k+1} - w_k \in o(T^2)$,其中 $o(T^2)$ 为 T^2 的同阶无穷小.

首先,构造如下等效干扰

$$d_k = w_k - w_{k-1}. \quad (10)$$

其次,根据式(7)和(10),设计带有干扰抑制措施的两相幂次吸引律,其表达形式为

$$e_{k+1} = e_k - \rho |e_k|^\lambda \text{sgn}(e_k) + \hat{d}_{k+1} - d_{k+1}, \quad (11)$$

其中, \hat{d}_{k+1} 是 d_{k+1} 的补偿值,用于抑制干扰信号 d_{k+1} 的影响.由于 w_k 为有界干扰,则存在一个正常数 $\Delta_d > 0$,满足以下不等式成立

$$|\hat{d}_{k+1} - d_{k+1}| \leq \Delta_d, \quad (12)$$

其中, $\Delta_d > 0$ 为等效干扰补偿误差的界.

1) 等效干扰补偿设计

记 d_u 、 d_l 分别为 d_k 的上、下界,则取 d_k 上下界中值作为等效干扰估计值,即

$$\hat{d}_k = \frac{d_u + d_l}{2}, \quad (13)$$

此时 $\Delta_d = \frac{d_u - d_l}{2}$.

由式(13)可以看出,利用 d_k 上下界中值估计等效干扰 d_k 便于实现,但由于其补偿值恒为常数,因此难以有效补偿动态干扰.为了能够准确估计动态等效干扰 d_k ,进一步设计离散扩张状态观测器.

2) 离散扩张状态观测器设计

定义 \hat{e}_k 和 \hat{d}_k 分别为 k 时刻系统跟踪误差 e_k 和等效扰动 d_k 的估计值,则离散扩张状态观测器可设计为

$$\begin{cases} \hat{e}_{k+1} = r_{k+1} - y_k + q(A(q^{-1}) - 1)(y_k - y_{k-1}) - \\ \quad qB(q^{-1})(u_k - u_{k-1}) - \hat{d}_{k+1} - \beta_1 \tilde{e}_k, \\ \hat{d}_{k+1} = \hat{d}_k - \beta_2 \tilde{e}_k, \end{cases} \quad (14)$$

其中, $\tilde{e}_k = \hat{e}_k - e_k$ 和 $\tilde{d}_k = \hat{d}_k - d_k$ 分别为跟踪误差 e_k 和等效干扰 d_k 的估计误差, β_1 和 β_2 为观测器增益.

引理1 [22] 针对离散时间系统(1),设计离散扩张状态观测器(14),记 $M = \begin{bmatrix} \beta_2 - \beta_1 & -1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix}$,配置 β_1 和 β_2 的值保证矩阵 M 的所有特征值均在单位开圆内,则 $k \rightarrow \infty$ 时,估计误差 \tilde{e}_k 和 \tilde{d}_k 收敛至零点附近的有界邻域.

证明 下面给出离散扩张状态观测器(14)的收敛性分析.

根据(14),可得 $k+1$ 时刻等效干扰和跟踪误差的估计误差 \tilde{d}_{k+1} 和 \tilde{e}_{k+1} 分别为

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{k+1} &= \hat{d}_{k+1} - d_{k+1} + \tilde{d}_k - (\hat{d}_k - d_k) \\ &= \tilde{d}_k - (d_{k+1} - d_k) + \hat{d}_{k+1} - \hat{d}_k \\ &= \tilde{d}_k - (d_{k+1} - d_k) - \beta_2 \tilde{e}_k. \end{aligned} \quad (15)$$

和

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{k+1} &= \hat{e}_{k+1} - e_{k+1} \\ &= -\hat{d}_{k+1} + d_{k+1} - \beta_1 \tilde{e}_k \\ &= -\tilde{d}_k + d_{k+1} - d_k + (\beta_2 - \beta_1) \tilde{e}_k. \end{aligned} \quad (16)$$

基于假设1可得 $d_{k+1} - d_k = w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1} \in o(T^3)$.将式(15)和式(16)合并,可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{e}_{k+1} \\ \tilde{d}_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta_2 - \beta_1 & -1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_k \\ \tilde{d}_k \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (d_{k+1} - d_k) \\ &= \begin{bmatrix} \beta_2 - \beta_1 & -1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_k \\ \tilde{d}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} o(T^3) \end{aligned} \quad (17)$$

令 $M = \begin{bmatrix} \beta_2 - \beta_1 & -1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix}$,通过配置 β_1 和 β_2 的值使得矩阵 M 的所有特征根在单位开圆内,即 β_1 、 β_2 的取值需满足 $-1 < \frac{1+\beta_2-\beta_1}{2} \pm \sqrt{\beta_1 + (\frac{1+\beta_2-\beta_1}{2})^2} < 1$,此时估计误差 \tilde{e}_k 和 \tilde{d}_k 是收敛的,存在正整数 τ_1 和 τ_2 使得 $|\tilde{e}_k| < \tau_1$ 和 $|\tilde{d}_k| < \tau_2$ 成立,即当 $k \rightarrow \infty$ 时,

\tilde{e}_k 和 \tilde{d}_k 收敛至零点附近的有界邻域.

证毕.

4 离散时间控制器设计

考虑离散时间系统 (1), 基于吸引律 (11) 设计离散时间控制器. 将式 (1) 代入式 (10) 可得

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= (A(q^{-1})y_{k+1} - B(q^{-1})u_{k+1}) - \\ &\quad (A(q^{-1})y_k - B(q^{-1})u_k) \\ &= y_{k+1} - y_k + (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) - \\ &\quad B(q^{-1})(u_{k+1} - u_k). \end{aligned} \quad (18)$$

将式 (3) 代入式 (18), 可得

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= r_{k+1} - e_{k+1} + e_k - r_k + \\ &\quad (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) - \\ &\quad B(q^{-1})(u_{k+1} - u_k). \end{aligned} \quad (19)$$

将式 (19) 代入式 (11) 可得

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k - \rho|e_k|^\lambda \text{sgn}(e_k) + \hat{d}_{k+1} - r_{k+1} + e_{k+1} - \\ &\quad e_k + r_k - (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) + \\ &\quad b_1(u_k - u_{k-1}) + (B(q^{-1}) - b_1q^{-1})(u_{k+1} - u_k). \end{aligned} \quad (20)$$

根据式 (20) 设计离散时间控制器为

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} - \frac{1}{b_1}[-\rho|e_k|^\lambda \text{sgn}(e_k) - r_{k+1} + r_k + \\ &\quad \hat{d}_{k+1} - q(A(q^{-1}) - 1)(y_k - y_{k-1}) + \\ &\quad q(B(q^{-1}) - b_1q^{-1})(u_k - u_{k-1})]. \end{aligned} \quad (21)$$

5 系统性能分析

本节将推导出系统跟踪误差的绝对吸引层边界和稳态误差带边界的具体表达式, 并给出有限步收敛的分析, 用于刻画分析系统跟踪误差的收敛性能和稳态性能. 为不失一般性和便于分析设置式(8)中 $\alpha = 2$.

定理 1 针对系统 (1), 设置初始状态满足 $|e_0| < \frac{1+\sqrt{1-\rho\Delta_d}}{\rho}$, 则在吸引律 (11) 和控制器 (21) 的作用下, 系统跟踪误差能够实现有限步收敛, 且其绝对吸引层边界 Δ_{AAL} 和稳态误差带边界 Δ_{SSE} 分别为:

$$\Delta_{AAL} = \max\{o_1, o_2\}, \quad (22)$$

$$\Delta_{SSE} = \max\{|g(\Delta_{AAL})|, |g(\frac{\rho}{2})|, \Delta_d\}, \quad (23)$$

其中, $o_1 = (\frac{\rho+\sqrt{\rho^2+8\Delta_d}}{4})^2$, $o_2 = (\frac{\Delta_d}{\rho})^2$, $g(x) = x - \rho x^{\frac{1}{2}} + \Delta_d$.

证明 下面给出边界表达式以及有限步收敛的具体推导过程.

(1) 绝对吸引层 (Δ_{AAL})

当 $e_k \geq 0$ 时, 按照 $e_k \geq 1$ 和 $0 \leq e_k < 1$ 两种情形进行分析.

a) 当 $e_k \geq 1$ 时, 式 (11) 可写为

$$e_{k+1} = e_k - \rho e_k^2 + \hat{d}_{k+1} - d_{k+1}. \quad (24)$$

根据注 1 可得, 跟踪误差收敛的充要条件为 $|e_{k+1}| < |e_k|$, 由式 (12) 可知需要满足以下不等式成立

$$\begin{cases} e_k - \rho e_k^2 + \Delta_d < e_k, \\ e_k - \rho e_k^2 - \Delta_d > -e_k, \end{cases} \quad (25)$$

设置参数 ρ 的取值范围为 $\Delta_d < \rho \leq 0.5$, 则式 (25) 的第一个不等式恒成立. 因此, 只需满足以下不等式成立

$$-\rho e_k^2 + 2e_k - \Delta_d > 0. \quad (26)$$

求解不等式(26), 可得

$$e_k < \frac{1 + \sqrt{1 - \rho\Delta_d}}{\rho}, \quad (27)$$

其中, $\frac{1+\sqrt{1-\rho\Delta_d}}{\rho} > 1$.

b) 当 $0 \leq e_k < 1$ 时, 式 (11) 可写为

$$e_{k+1} = e_k - \rho e_k^{\frac{1}{2}} + \hat{d}_{k+1} - d_{k+1}. \quad (28)$$

因此, 要满足跟踪误差收敛条件 $|e_{k+1}| < |e_k|$, 则需满足

$$\begin{cases} e_k - \rho e_k^{\frac{1}{2}} + \Delta_d < e_k, \\ e_k - \rho e_k^{\frac{1}{2}} - \Delta_d > -e_k, \end{cases} \quad (29)$$

成立. 求解上述不等式组, 可得

$$e_k > \max\{o_1, o_2\}, \quad (30)$$

其中, $o_1 = (\frac{\rho+\sqrt{\rho^2+8\Delta_d}}{4})^2$, $o_2 = (\frac{\Delta_d}{\rho})^2$, 且 $\max\{o_1, o_2\} < 1$.

同理, 当 $e_k < 0$ 时, 也可分为 $e_k \leq -1$ 与 $-1 < e_k < 0$ 两种情况进行讨论, 可得与 $e_k \geq 0$ 时相同的分析结果. 综上, 当 $\max\{o_1, o_2\} < |e_k| < \frac{1+\sqrt{1-\rho\Delta_d}}{\rho}$ 成立时, 有 $|e_{k+1}| < |e_k|$ 成立, 即只要设置初始状态满足 $|e_0| < \frac{1+\sqrt{1-\rho\Delta_d}}{\rho}$, 则存在绝对吸引层 $\Delta_{AAL} = \max\{o_1, o_2\}$.

(2) 稳态误差带 (Δ_{SSE})

与前述证明过程类似, 可以通过求解 $|e_k| \leq \Delta_{AAL}$ 时 $|e_{k+1}|$ 的最大值确定稳态误差带边界.

当 $0 \leq e_k \leq \Delta_{AAL}$ 时, 有 $e_{k+1} = e_k - \rho e_k^{\frac{1}{2}} + \hat{d}_{k+1} - d_{k+1}$, 则 $|e_{k+1}|$ 的最大值为

$$\max\{|g(\Delta_{AAL})|, |g(\frac{\rho}{2})|, \Delta_d\}, \quad (31)$$

其中, $g(x) = x - \rho x^{\frac{1}{2}} + \Delta_d$. 当 $-\Delta_{AAL} \leq e_k < 0$

时, 可得相同结果. 因此, 稳态误差带边界为

$$\Delta_{SSE} = \max\{|g(\Delta_{AAL})|, |g(\frac{\rho}{2})|, \Delta_d\}.$$

(3) 有限步收敛分析

a) 考虑 $e_0 > 1$ 的情形

当 $1 \leq e_k < e_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} e_1 &= e_0 - \rho e_0^2 + \hat{d}_1 - d_1, \\ e_2 &= e_0 - \rho e_0^2 - \rho e_1^2 + \hat{d}_1 - d_1 + \hat{d}_2 - d_2, \\ &\vdots \\ e_k &= e_0 - \rho \sum_{i=0}^{k-1} e_i^2 + \sum_{i=1}^k (\hat{d}_i - d_i) \end{aligned}$$

$$\leq e_0 - \rho k + k\Delta_d,$$

令 $e_0 - \rho k^* + k^*\Delta_d = 1$, 得 $k^* = \frac{e_0-1}{\rho-\Delta_d}$, 则跟踪误差经过 $[k^*]$ 步收敛进入 $|e_k| \leq 1$ 区域内.

当 $\Delta_{SSE} < e_k < 1$ 时, 此时 $k \geq m = [k^*]$, 则有

$$\begin{aligned} e_{m+1} &= e_m - \rho e_m^{\frac{1}{2}} + \hat{d}_{m+1} - d_{m+1}, \\ e_{m+2} &= e_m - \rho e_m^{\frac{1}{2}} - \rho e_{m+1}^{\frac{1}{2}} + \hat{d}_{m+1} - d_{m+1} + \\ &\quad \hat{d}_{m+2} - d_{m+2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_k &= e_m - \rho \sum_{i=m}^{k-1} e_i^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=m+1}^k (\hat{d}_i - d_i) \\ &\leq e_m - \rho(k-m)\Delta_{SSE}^{\frac{1}{2}} + (k-m)\Delta_d, \end{aligned}$$

令 $e_m - \rho(k^{**} - m)\Delta_{SSE}^{\frac{1}{2}} + (k^{**} - m)\Delta_d = \Delta_{SSE}$, 得 $k^{**} = \frac{e_m - \Delta_{SSE}}{\rho\Delta_{SSE}^{\frac{1}{2}} - \Delta_d} + m$, 则总收敛步数为 $[k^{**}]$.

b) 再考虑 $0 < e_0 \leq 1$ 的情形

此时, $\Delta_{SSE} < e_k < e_0 \leq 1$, 有

$$\begin{aligned} e_1 &= e_0 - \rho e_0^{\frac{1}{2}} + \hat{d}_1 - d_1, \\ e_2 &= e_0 - \rho e_0^{\frac{1}{2}} - \rho e_1^{\frac{1}{2}} + \hat{d}_1 - d_1 + \hat{d}_2 - d_2, \\ &\vdots \\ e_k &= e_0 - \rho \sum_{i=0}^{k-1} e_i^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^k (\hat{d}_i - d_i) \\ &\leq e_0 - \rho k\Delta_{SSE}^{\frac{1}{2}} + k\Delta_d, \end{aligned}$$

令 $e_0 - \rho k^{**}\Delta_{SSE}^{\frac{1}{2}} + k^{**}\Delta_d = \Delta_{SSE}$, 则 $k^{**} = \frac{e_0 - \Delta_{SSE}}{\rho\Delta_{SSE}^{\frac{1}{2}} - \Delta_d}$, 则总收敛步数为 $[k^{**}]$.

$e_0 < 0$ 时, 可得相同结果. 因此, 当初始误差 $|e_0| > 1$ 时, 收敛步数为 $[\frac{e_m - \Delta_{SSE}}{\rho\Delta_{SSE}^{\frac{1}{2}} - \Delta_d} + m]$; 当初始误差 $0 < |e_0| \leq 1$ 时, 收敛步数为 $[\frac{e_0 - \Delta_{SSE}}{\rho\Delta_{SSE}^{\frac{1}{2}} - \Delta_d}]$, 可实现有限步收敛.

证毕.

注2 由推导结果可得, 绝对吸引层边界 Δ_{AAL} 、稳态误差带边界 Δ_{SSE} 以及最大收敛步数的取值与控制器参数 ρ 以及扰动界 Δ_d 有关. 参数 ρ 影响着系统的稳态精度和瞬态性能, ρ 的取值需综合考虑收敛速度和稳态误差.

注3 有限步收敛指的是系统误差能在有限的步数内收敛至平衡点附近的邻域, 即稳态误差带, 该有限步数可给出具体的表达式且与系统的初始误差、控制器参数相关. 因此, 可通过调节相关参数减小收敛步数以提高系统的收敛性能.

6 数值仿真

为了验证所提方法的有效性, 考虑如下二阶离散时间系统

$$y_{k+1} = -a_1 y_k - a_2 y_{k-1} + b_1 u_k + b_2 u_{k-1} + w_{k+1}, \quad (32)$$

其中, 系统参数为 $a_1 = -0.86$, $a_2 = -0.13$, $b_1 = 0.51$, $b_2 = 0.2$. 仿真中给定初始跟踪误差为 $e_0 = 10$, 参考信号为 $r_k = 10 \cos(2\pi f T_s k)$, 其中, 频率为 $f = 5\text{Hz}$, 采样周期为 $T_s = 0.01\text{s}$. 干扰信号 w_k 的表达式为

$$w_k = m \times [0.02|\text{mod}(k, 20) - 10| + 0.08|\text{mod}(k + 4, 20) - 10|], \quad (33)$$

其中, $\text{mod}(n_1, n_2)$ 为求余函数, 用于返回两数相除的余数.

为说明本文所提两相幂次控制方法以及干扰抑制措施的有效性, 给出 M1-M3 三种方法进行对比仿真.

M1 方法: 基于等效干扰上下界中值补偿法的两相幂次吸引律控制方法, 吸引律形式为式 (11), 干扰抑制措施为式 (13), 控制器形式如下所示

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} + \frac{1}{b_1} [\rho |e_k|^\lambda \text{sgn}(e_k) + r_{k+1} - r_k + \\ &\quad a_1(y_k - y_{k-1}) + a_2(y_{k-1} - y_{k-2}) - \\ &\quad b_2(u_{k-1} - u_{k-2}) - \hat{d}_{k+1}]. \end{aligned} \quad (34)$$

此时, $\Delta_d = 0.1$.

M2 方法: 基于等效干扰上下界中值补偿法的单幂次吸引律控制方法, 吸引律形式为式 (9), 干扰处理方法与 M1 相同, 即取 $\hat{d}_k = \frac{d_u + d_l}{2}$, 控制器设计为

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} + \frac{1}{b_1} [\rho |e_k|^{1/\alpha} \text{sgn}(e_k) + r_{k+1} - r_k + \\ &\quad a_1(y_k - y_{k-1}) + a_2(y_{k-1} - y_{k-2}) - \\ &\quad b_2(u_{k-1} - u_{k-2}) - \hat{d}_{k+1}]. \end{aligned} \quad (35)$$

为保证对比结果的公平性, M1 和 M2 方法中的控制器参数选取保持一致, 即控制器 (34) 和 (35) 中

参数取为 $\rho = 0.12, \alpha = 2$. 针对 M1 方法, 根据定理 1 可得绝对吸引层边界和稳态误差带分别为:

$$\Delta_{AAL} = \max\{o_1, o_2\} = 0.69,$$

$$\Delta_{SSE} = \max\{|g(\Delta_{AAL})|, |g(\frac{\rho}{2})|, \Delta_d\} = 0.69.$$

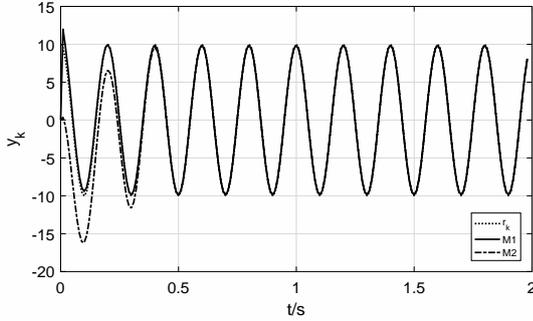


图 2 M1 和 M2 跟踪轨迹对比

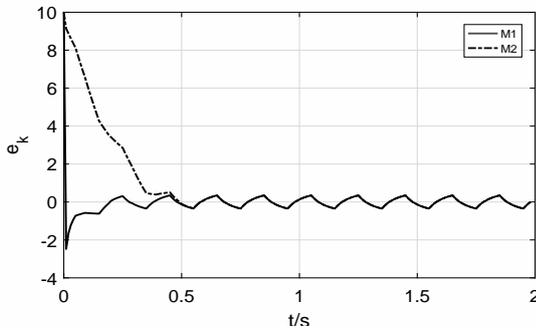


图 3 M1 和 M2 跟踪误差对比

M1 和 M2 的对比仿真如图 2 和图 3 所示, 其中, 图 2 为两种方法跟踪轨迹对比, 图 3 则为跟踪误差对比. 由图 2 可以看出, 基于这两种形式吸引律设计的控制方法均能使系统状态跟踪上给定轨迹, 其中两相幂次吸引律的收敛过程较于幂次吸引律具有更好的瞬态性能, 收敛速度最快.

M1 和 M2 方法中干扰补偿是通过取等效干扰上下界中值进行估计. 为了进一步验证离散扩张状态观测器补偿干扰的有效性, 本文进一步将 M1 方法与如下 M3 方法进行对比.

M3 方法: 基于离散扩张状态观测器的两相幂次吸引律控制方法, 其中吸引律形式为式 (11), 控制器形式与 M1 相同, 即式 (34), 干扰抑制措施为式 (14), 离散扩张状态观测器表达形式为

$$\begin{cases} \hat{e}_{k+1} = r_{k+1} - y_k + a_1(y_k - y_{k-1}) + a_2(y_{k-1} - y_{k-2}) \\ \quad - b_1(u_k - u_{k-1}) - b_2(u_{k-1} - u_{k-2}), \\ \quad - \hat{d}_{k+1} - \beta_1 \tilde{e}_k \\ \hat{d}_{k+1} = \hat{d}_k - \beta_2 \tilde{e}_k, \end{cases} \quad (36)$$

其中, 观测器增益设计为 $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = -1$.

M1 与 M3 的对比如图 4 和图 5 所示, 图 4 为 M1、M3 方法的跟踪误差曲线, 可以看出, 其跟踪误差均能收敛到稳态误差带内. 此外, 在离散扩张状态观测器作用下, M3 方法比 M1 方法具有更小的稳态误差. 为进一步说明观测器对干扰的估计和补偿效果, 图 5 给出系统干扰的估计曲线. 由图 5 可看出, 与 M1 的等效干扰补偿方案相比, M3 方法能更为准确地估计和补偿系统干扰, 进而有效抑制干扰对控制性能的影响.

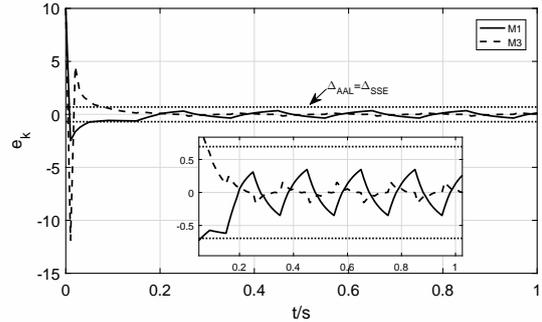


图 4 M1 和 M3 跟踪误差对比

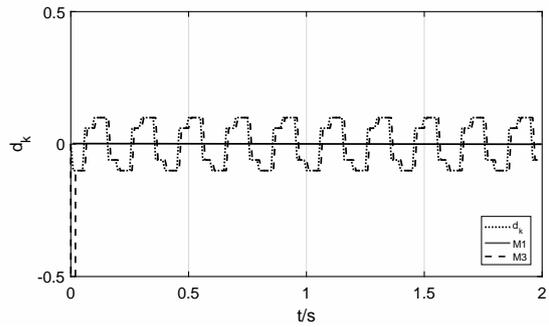


图 5 M1 和 M3 干扰估计图

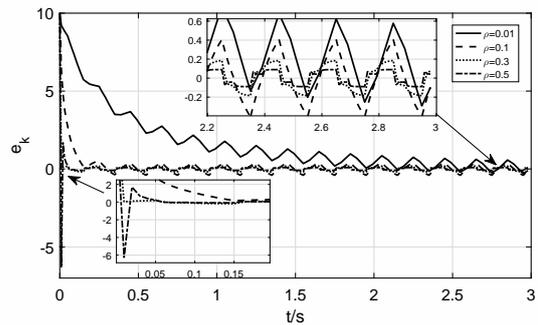


图 6 不同 ρ 值下的跟踪误差收敛曲线

为进一步说明两相幂次吸引律 (7) 中参数 ρ 的作用, 图 6 给出参数 ρ 不同取值下的跟踪误差收敛对比效果. 为不失一般性, 吸引律参数固定取 $\alpha = 1.5$, 系统参数、参考信号、采样参数以及干扰信号不变, 取等效干扰上下界中值补偿干扰, 调整参数 ρ 的取值, 给出误差收敛曲线的仿真结果. 由图 6 可以看出, 随着 ρ 的增大, 误差的收敛速度明显增快, 且稳态

误差在减小. 然而, 对比 $\rho = 0.5$ 时误差收敛效果可看出, 若参数 ρ 取值过大, 在保证较小稳态误差的同时会出现超调现象, 影响瞬态性能. 因此, 式 (7) 中参数 ρ 的取值需综合考虑误差收敛的瞬态性能和稳态误差.

7 结论

本文针对离散时间系统的轨迹跟踪问题, 构造一种新型两相幂次吸引律. 根据跟踪误差大小改变吸引律幂值, 提高误差收敛的速度. 同时, 构造离散扩张状态观测器补偿干扰影响, 提高控制系统鲁棒性. 文中详细推导出了能刻画离散系统控制性能的绝对吸引层、稳态误差带边界的表达式, 并给出了最大收敛步数的分析. 数值仿真结果验证了推导结果的正确性以及所提控制方法的有效性.

参考文献 (References)

- [1] Astrom K J, Wittenmark B. Computer-controlled systems: Theory and design. 3rd ed. Englewood Cliffs: PrenticeHall, 1997: 165-195.
- [2] 吕灵芝, 段广仁, 周彬. 线性离散周期系统输出反馈参数化极点配置 [J]. 自动化学报, 2010, 36(01): 113-120.
- [3] Goodwin G C, Graebe S F, Salgado M E. Control system design. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001: 179-187.
- [4] Gao W B. Variable structure control of discrete-time systems. Acta Automatica Sinica, 1995, 21(2): 154-161 (高为炳. 离散时间系统的变结构控制. 自动化学报, 1995, 21(2): 154-161)
- [5] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京: 科学出版社, 1996: 278-299. (Gao W B. Variable structure control theory and design method. Beijing: Science Press, 1996: 278-299.)
- [6] 郑长明, 张加胜, 陈荣. 基于改进扰动补偿趋近律的离散滑模控制. 控制与决策, 2019, 34(04): 880-884.
- [7] Gao W B, Wang Y, Homaiifa A. Discrete-time variable structure control systems. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1995, 42(1): 117-122.
- [8] Batoszewicz A. Remarks on "discrete-time variable structure control systems". IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1996, 43(1): 235-238
- [9] Bartoszewicz A. Discrete-time quasi-sliding mode control strategies. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1998, 45(4): 633-637.
- [10] Eun Y, Kim J, Kim K, et al. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1999, 7(4): 414 - 423.
- [11] 孙明轩, 范伟云, 王辉. 用于离散滑模重复控制的新型趋近律. 自动化学报, 2011, 37(10): 1213-1221.
- [12] 米阳, 李文林, 井元伟. 基于幂次趋近律的一类离散时间系统的变结构控制. 控制与决策, 2008, 23(6): 643-646. (Mi Y, Li W L, Jing Y W. Variable structure control for a class of discrete-time system based on power reaching law. Control and Decision, 2008, 23(6): 643-646.)
- [13] 孙彪, 孙秀霞, 陈琳, 等. 基于幂次函数的离散滑模控制算法. 控制与决策, 2011, 26(2): 285-288.
- [14] 张合新, 范金锁, 孟飞, 等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律. 控制与决策, 2013, 28(2): 289-293. (Zhang H X, Fan J S, Meng F, et al. A new double power reaching law for sliding mode control. Control and Decision, 2013, 28(2): 289-293.)
- [15] 张瑶, 马广富, 郭延宁, 等. 一种多幂次滑模趋近律设计与分析. 自动化学报, 2016, 42(3): 466-472.
- [16] Sun M X. Two-phase attractors for finite-duration consensus of multiagent systems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(5): 1757-1765.
- [17] 张文安, 马剑, 刑科新. 基于广义扩张状态观测器的干扰不匹配离散系统状态反馈控制. 控制与决策, 2016, 31(6): 1128-1132.
- [18] 孙明轩, 王辉, 范伟云. 以幂次趋近的离散变结构重复控制. 控制理论与应用, 2012, 29(11): 1426-1432. (Sun M X, Wang H, Fan W Y. Discrete-time variable-structure repetitive control with power-rate reaching. Control Theory & Applications, 2012, 29(11): 1426-1432.)
- [19] 孙明轩, 许利达, 邬玲伟. 离散时间系统重复控制的理想误差动态方法. 控制与决策, 2013, 28(12): 1771-1778.
- [20] 邬玲伟, 孙明轩. 一种自适应吸引律离散时间控制方法. 控制与决策, 2016, 31(9): 1546-1552.
- [21] 周文委, 孙明轩, 张有兵. 基于约束输入变速吸引律的离散重复控制器设计. 控制与决策, 2016, 31(10): 1742-1748.
- [22] 胡轶, 胡志云, 孙明轩. 基于椭圆吸引律的离散重复控制. 控制与决策, 2020, 35(4): 1009-1016.
- [23] 孙明轩, 胡志云, 李威, 等. 采用干扰差分补偿的无切换吸引律离散时间控制方法. 控制与决策, 2020, 35(6): 1512-1518.
- [24] 邬玲伟, 雷必成, 陈光, 等. 以幂次吸引的离散多周期重复控制. 控制与决策, 2020, 35(9): 2299-2304.

作者简介

陈强(1984—), 男, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为自适应控制与学习控制等, E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn;
 叶艳(1996—), 女, 硕士研究生, 研究方向为吸引律控制方法及应用, E-mail: yeyeol525@163.com;
 胡轶(1972—), 男, 讲师, 博士, 研究方向为重复控制理论及应用, E-mail: hyn@zjut.edu.cn.
 孙明轩(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为自适应控制与学习控制等, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn;