

平稳切换LPV系统的 H_∞ 控制器设计

黄金杰^{1,2,3†}, 宫煜晴¹, 郝现志²

(1. 哈尔滨理工大学 自动化学院, 哈尔滨 中国 150080;

2. 哈尔滨理工大学 计算机科学与技术学院, 哈尔滨 中国 150080;

3. 黑龙江省复杂智能系统与集成重点实验室 哈尔滨 中国 150080)

摘要: 本文提出一种基于平稳切换策略的LPV系统状态反馈 H_∞ 控制器设计方法,以抑制子系统切换产生的瞬态响应.将时变参数变化范围划分为有限个具有重叠区域的子空间.应用Lyapunov函数和投影定理,对子空间设计相应的状态反馈控制器,并在非重叠区域调用,在重叠区域内加权调用相邻子空间的控制器,结合平均驻留时间方法,使系统满足全局一致指数稳定.此外,提出一种重叠率可变的子空间划分方法.最后,通过数值仿真验证所述方法的有效性.

关键词: 平稳切换; LPV系统; 投影定理; 平均驻留时间; 子空间划分

中图分类号: TP13

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1399

H_∞ controller design for smooth switching LPV system

Huang Jin-jie^{1,2,3†}, Gong Yu-qing¹, Hao Xian-zhi²

(1. School of Automation, Harbin University of Science and Technology, Harbin, China, 150080;

2. School of Computer Science and Technology, Harbin University of Science and Technology, Harbin, China, 150080;

3. Heilongjiang Provincial Key Laboratory of Complex Intelligent System and Integration, Harbin, China, 150080)

Abstract: In this paper, a state feedback H_∞ controller design method for LPV system based on smooth switching strategy is proposed to overcome the transient response of controllers switching. The range of time-varying parameters is divided into finite subspaces with overlapping regions. Using Lyapunov function and projection theorem, the state feedback controllers are designed for subspaces. The controllers are called in non overlapping regions and weighted in adjacent subspaces in overlapping regions. Combined with the average dwell time method, the system satisfies global uniform exponential stability. In addition, a subspace partition method with variable overlap rate is proposed. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by a simulation example.

Keywords: Smooth switching; LPV system; projection theorem; average dwell time; Subspace Partition

0 引言

LPV系统作为一种非线性系统的线性化形式,被广泛应用于航空航天、工业过程控制等领域^[1-2];而切换控制系统则是由有限个子系统和控制这些子系统的切换规则所构成的一种典型的混杂系统^[3].LPV系统模型随参数变量变化,不同参数区域的控制设计要求可能不同,甚至相互冲突^[4].而当设计要求统一时,可能会因为参数变化范围过大,难以找到合适的Lyapunov函数.所以,在整个参数变化范围上,设计一个满足系统设计要求的控制器十分困难.解决办法之一是将时变参数的变化空间划分为有限个子空间,并关于这些子空间设计多个LPV控制器.于是,将切换系统的控制方法与LPV系统相融

合,形成了切换LPV系统^[5-8].

子系统在切换后会产生瞬态响应,由此引出了切换LPV系统的平滑切换策略研究.文献[4]提出一种采用多个参数依赖的Lyapunov函数的切换LPV系统设计方法,分别在每个特定参数区域内设计满足平均驻留时间和满足期望性能的控制器的.然而,获得的稳定综合条件一般是非凸的,只有在特定条件和有效LMI优化算法的解法下,可以转变为凸问题.文献[5]提出一种基于平均驻留时间和滞后切换的控制策略,在切换瞬间重置控制器状态,令其与系统状态相一致,使系统满足Lyapunov函数稳定条件,并将稳定条件转化为LMI的求解问题.这种方法对观测器的精准度具有很高的要求和依赖性.文献[8]研究一种

收稿日期: 2020-10-12; 修回日期: 2021-02-28.

基金项目: 国家自然科学基金(No.61305001); 黑龙江省自然科学基金项目(No.F201222).

†通讯作者. E-mail: huangjinjie163@163.com.

不受平均驻留时间约束的变体飞行器LPV系统的平滑切换控制方法,将调度参数集划分为有重叠的子集,并设计输出反馈控制器.相比于设计状态反馈控制器,设计带有输出反馈的控制器过程更为复杂.

这些子空间的划分在一定程度上决定解空间的大小,并与系统性能密切相关.起初多通过经验试凑法来划分子空间,后有学者陆续提出了许多划分方法.如文献[10]提出一种自动将参数集合划分为尽可能少的子集的系统方法,选取重叠率固定的基准点,并引入未划分子集的处理方法.不可避免的,系统性能受限于重叠率的选取.

受上述研究启发,本文研究一类基于平稳切换策略的切换LPV系统状态反馈 H_∞ 控制器的设计问题.将LPV系统参数变化范围划分成有限个具有重叠区域的子空间,在每个子空间内,结合平均驻留时间方法,分别设计相应的状态反馈 H_∞ 控制器,使系统满足全局一致指数稳定条件.当系统运行时,在每个非重叠区域内调用相应控制器,在每个重叠区域内采用加权调用相邻子空间控制器的平稳切换策略,使控制器增益逐渐过渡,达到渐启渐停的效果.此外,本文提出一种重叠率可变的子空间划分方法,保证系统具有最优鲁棒性能.最后,通过数值仿真验证本文所提出的平稳切换策略与子空间划分方法均有效.

1 问题描述

考虑如下LPV系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \\ A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) + E(\rho(t))w(t) \\ z(t) = C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中 $x(t) \in R^n$ 和 $z(t) \in R^n$ 分别表示系统状态向量和期望输出, $w(t) \in R^{n_w}$ 和 $u(t) \in R^{n_u}$ 分别表示扰动输入和控制输入.参数矩阵 $A(\rho(t)), B(\rho(t)), C(\rho(t)), D(\rho(t))$ 均为关于时变参数 $\rho(t)$ 的连续函数矩阵.

假设1 $\rho(t)$ 是关于时间 t 的连续函数.

假设2 $\rho(t)$ 的值实时可测且有界, $\Omega = \{ \rho \leq \rho \leq \bar{\rho} \}$,其中 ρ 和 $\bar{\rho}$ 为常数.

假设3 ρ 的变化率是有界的,即 $\underline{v} \leq \dot{\rho} \leq \bar{v}$,其中 $\underline{v}$ 和 $\bar{v}$ 为常数.

当参数变化范围过大时,针对整个变化范围设计一个单一的控制器往往具有很大的保守性,并且非常困难,因此我们将参数的变化范围 Ω 划分为有限个子空间 $\Omega_i, i \in I, I = \{1, 2, \dots, N\}$,并在这些子空间上分别设计控制器.

首先将整个参数变化范围划分成有限个具有重叠区域的子空间,即

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \left\{ \rho_i \in \Omega_i \mid \underline{\rho}_i \leq \rho_i \leq \bar{\rho}_i \right\} \\ \bigcup_{i=1}^N \Omega_i &= \Omega \\ \Omega_i \cap \Omega_{i+1} &\neq \emptyset \end{aligned}$$

子空间 Ω_i 内包括非重叠区域 $\Omega_{i,i}$ 和重叠区域 $\Omega_{i,i-1}$ 和 $\Omega_{i+1,i}$,对应子系统的状态方程可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \\ A_i(\rho(t))x(t) + B_i(\rho(t))u(t) + E_i(\rho(t))w(t) \\ z(t) = C_i(\rho(t))x(t) + D_i(\rho(t))u(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中 $i \in I$,状态反馈控制器输出为

$$u(t) = K_i(\rho(t))x(t) \quad (3)$$

当子系统 i 运行时,系统(1)的闭环表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i(\rho(t)) & E_i(\rho(t)) \\ \tilde{C}_i(\rho(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中 $\tilde{A}_i(\rho(t)) = A_i(\rho(t)) + B_i(\rho(t))K_i(\rho(t))$, $\tilde{C}_i(\rho(t)) = C_i(\rho(t)) + D_i(\rho(t))K_i(\rho(t))$.为方便起见,后文简记 $\rho(t)$ 为 ρ .

定义1 [9] 对于连续线性切换系统,如果存在常数 $c > 0, \lambda > 0$,使得相应的系统解在任意初始条件下对所有的 $t \geq t_0$,满足 $\|x(t)\|_2 < ce^{-\lambda(t-t_0)}\|x(0)\|_2$,则称该系统在此切换信号的作用下,在平衡态 $x = 0$ 处是全局一致指数稳定的.

定义2 [10] 若存在正实数 α, γ ,使下面两个条件成立,则系统具有指数 H_∞ 性能 γ :

(1) 当扰动为零时,系统指数稳定;

(2) 当扰动不为零时,在零初始条件下,系统在 $t \in [0, \infty)$ 上满足

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s} z^T(s)z(s)ds \leq \gamma^2 \int_0^\infty w^T(s)w(s)ds \quad (5)$$

定义3 [11] 对于切换系统(2),假设切换律 $\sigma(t)$ 在 $t \in (t_0, t)$ 内切换次数为 $N_\sigma(t_0, t)$,对于任意 $N_0 \geq 0$,若不等式

$$N_\sigma(t_0, t) \leq N_0 + \frac{t - t_0}{\tau_\alpha} \quad (6)$$

成立,则称 τ_α 为平均驻留时间.

2 主要结果

2.1 平稳切换策略

在切换律 $\sigma(t)$ 的控制下,切入新的子系统时,短暂的切换动作会造成系统振荡,常称为瞬态响应.在此设计一种平稳切换策略,抑制LPV系统的瞬态响应,以提高系统稳定性.

该策略需要在各子空间内分别设计使系统满足鲁棒 H_∞ 性能指标和全局一致指数稳定性的状态反

馈控制器,在非重叠区域内,直接调用其所属于空间的控制器;在重叠区域内,加权调用相邻子空间的控制器,从而保证系统稳定运行。

如图1所示,设初始时刻 t_0 。在 $t \in [t_{l-1} + \Delta_{l-1}, t_l + \Delta_l)$ 过程中,当 $t \in [t_{l-1} + \Delta_{l-1}, t_l]$ 时, $\rho \in \Omega_{i,j}$,加权调用第 j 个子系统的控制器与第 i 个子系统的控制器,进行切换动作;而后,当 $t \in [t_l, t_l + \Delta_l)$ 时, $\rho \in \Omega_{i,i}$,第 i 个子系统的控制器单独运行。

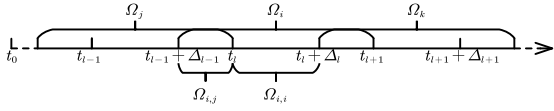


图1 重叠区域与非重叠区域

将相邻区域的控制器增益描述为

$$K(\rho) = \begin{cases} K_i(\rho) & , \rho \in \Omega_{i,i} \\ \varepsilon_1 K_i(\rho) + \varepsilon_2 K_j(\rho) & , \rho \in \Omega_{i,j} \end{cases} \quad (7)$$

式中 $\varepsilon_1 = \frac{\rho - \rho_i}{\rho_j - \rho_i}$, $\varepsilon_2 = 1 - \varepsilon_1$ 。

定理1 给定常数 $\alpha > 0, \mu > 1$ 以及时变参数 ρ 的变化空间 $\Omega_{i,j}, i, j \in I = \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j$ 。若存在一个正定对称的函数矩阵 $P_i(\rho) \in R^{n \times n}$ 和一个正实数 γ_i ,对于所有的 $\rho \in \Omega_{i,i}$,使得

$$\begin{bmatrix} \Phi_i(\rho) & P_i(\rho)E_i(\rho) & \tilde{C}_i^T(\rho) \\ * & -\gamma_i^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$P_i \leq \mu P_j \quad (9)$$

成立,且系统的平均驻留时间满足

$$\tau_a \geq \tau_a^* = \frac{2 \ln \mu}{\alpha} \quad (10)$$

则称闭环系统(4)全局一致指数稳定,并满足鲁棒 H_∞ 性能指标。式(8)中,*表示对称矩阵块, $\Phi_i(\rho) = \tilde{A}_i^T(\rho)P_i(\rho) + P_i(\rho)\tilde{A}_i(\rho) + \dot{P}_i(\rho) + \alpha P_i(\rho)$ 。

证明 在子空间 $\Omega_{i,i}$ 内,当 $t \in [t_{l-1} + \Delta_{l-1}, t_l]$ 时,令 $\sigma(\rho(t)) = i, j$;当 $t \in [t_l, t_l + \Delta_l)$ 时,令 $\sigma(\rho(t)) = i$ 。

当 $\rho \in \Omega_{i,i}$ 时,对于闭环系统(4),假设存在一组正定对称函数矩阵 $P_i(\rho)$,并且在相应的子空间 $\Omega_{i,i}$ 内连续可微,那么可以得到一簇参数依赖的Lyapunov函数

$$V_i(t) = x^T(t)P_i(\rho)x(t) \quad (11)$$

对Lyapunov函数求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= 2\dot{x}^T(t)P_i(\rho)x(t) + x^T(t)\dot{P}_i(\rho)x(t) = \\ & x^T(t)\Psi_i(\rho)x(t) + 2x^T(t)P_i(\rho)E_i(\rho)w(t) \end{aligned} \quad (12)$$

上式中 $\Psi_i(\rho) = \tilde{A}_i^T(\rho)P_i(\rho) + P_i(\rho)\tilde{A}_i(\rho) + \dot{P}_i(\rho)$ 。

当 $\rho \in \Omega_{i,j}$ 时,构造Lyapunov函数矩阵为

$$P_{i,j}(\rho) = \varepsilon_1 P_i(\rho) + \varepsilon_2 P_j(\rho) \quad (13)$$

与式(11)结合有

$$V_{i,j}(t) = \varepsilon_1 V_i(t) + \varepsilon_2 V_j(t) \quad (14)$$

上式求导可得

$$\dot{V}_{i,j}(t) = \varepsilon_1 \dot{V}_i(t) + \varepsilon_2 \dot{V}_j(t) \quad (15)$$

由式(9)可知 $V_i(t) \leq \mu V_j(t)$,那么有

$$V_{i,j}(t) \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \mu) V_j(t) \leq \mu V_j(t)$$

$$V_{i,j}(t) \geq (\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\mu}) V_i(t) \geq 1/\mu V_i(t) \quad (16)$$

情况1 若扰动为零,不失一般性地,在区域 $\Omega_{i,i}$ 和 $\Omega_{i,j}$ 内,子系统的Lyapunov函数可描述为

$$V_{\sigma(t)}(t) = \begin{cases} V_i(t) & , \rho \in \Omega_{i,i} \\ \varepsilon_1 V_i(t) + \varepsilon_2 V_j(t) & , \rho \in \Omega_{i,j} \end{cases} \quad (17)$$

由式(8)可写出

$$\dot{V}_{\sigma(t)}(t) \leq \begin{cases} -\alpha V_i(t) & , \rho \in \Omega_{i,i} \\ -\alpha V_{i,j}(t) & , \rho \in \Omega_{i,j} \end{cases} \quad (18)$$

假定 $t \in [t_l, t_l + \Delta_l)$,对式(18)在 $[t_l, t]$ 上积分有

$$V_i(t) \leq e^{-\alpha(t-t_l)} V_i(t_l) \quad (19)$$

假定 $t \in [t_{l-1} + \Delta_{l-1}, t_l)$,对式(18)在 $[t_{l-1} + \Delta_{l-1}, t]$ 上积分有

$$V_{i,j}(t) \leq e^{-\alpha[t-(t_{l-1} + \Delta_{l-1})]} V_{i,j}(t_{l-1} + \Delta_{l-1}) \quad (20)$$

基于式(16)、(19)和(20),在 $t \in [t_{l-1}, t_l]$ 上,可递推得

$$\begin{aligned} V_i(t_l) &\leq \mu V_{i,j}(t_l) \leq \\ & \mu e^{-\alpha[t_l-(t_{l-1} + \Delta_{l-1})]} V_{i,j}(t_{l-1} + \Delta_{l-1}) \leq \\ & \mu^2 e^{-\alpha[t_l-(t_{l-1} + \Delta_{l-1})]} V_j(t_{l-1} + \Delta_{l-1}) \leq \\ & \mu^2 e^{-\alpha(t_l-t_{l-1})} V_j(t_{l-1}) \end{aligned} \quad (21)$$

当 $t \in [t_l, t_l + \Delta_l)$ 时,考虑式(19),由式(21)迭代得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq e^{-\alpha(t-t_l)} V_{\sigma(t_l)}(t_l) \leq \\ & \mu^2 e^{-\alpha(t-t_{l-1})} V_{\sigma(t_{l-1})}(t_{l-1}) \leq \\ & \mu^4 e^{-\alpha(t-t_{l-2})} V_{\sigma(t_{l-2})}(t_{l-2}) \leq \dots \leq \\ & \mu^{2N_{\sigma}(t_0,t)} e^{-\alpha(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \end{aligned} \quad (22)$$

当 $t \in [t_l + \Delta_l, t_{l+1})$ 时,结合式(16)、(20)和(22)得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq \mu e^{-\alpha[t-(t_l + \Delta_l)]} V_{\sigma(t_l + \Delta_l)}(t_l + \Delta_l) \leq \\ & \mu e^{-\alpha(t-t_l)} V_{\sigma(t_l)}(t_l) \leq \\ & \mu^{2N_{\sigma}(t_0,t)+1} e^{-\alpha(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \end{aligned} \quad (23)$$

综上,并结合式(10)可知,在 $t \in [t_l, t_{l+1})$ 上总有

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq \mu^{2N_{\sigma}(t_0,t)+1} e^{-\alpha(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \leq \\ & \mu e^{2N_0 \ln \mu} e^{-(\alpha - \frac{2 \ln \mu}{\tau_a})(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \end{aligned} \quad (24)$$

若令 $c = \sqrt{\frac{\mu \lambda_{\max}(P_{\sigma(t_0)})}{\lambda_{\min}(P_{\sigma(t_n)})}} e^{N_0 \ln \mu}$, $\lambda = \frac{1}{2} \alpha - \frac{\ln \mu}{\tau_a}$ 时,式(24)可以写成 $\|x(t)\|_2 \leq c e^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\|_2$ 。

由定义1可知,若平均驻留时间满足式(10),闭环系统(4)在切换律 $\sigma(t)$ 的作用下全局一致指数稳定。

情况2 若扰动不为零,同理可知

$$\dot{V}_{\sigma(t)}(t) \leq \begin{cases} -\alpha V_i(t) - \Gamma(t), \rho(t) \in \Omega_{i,i} \\ -\alpha V_{i,j}(t) - \Gamma(t), \rho(t) \in \Omega_{i,j} \end{cases} \quad (25)$$

其中 $\Gamma(t) = z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)$, $\gamma = \max_{i \in I} \{\gamma_i\}$.

假定 $t \in [t_l, t_l + \Delta_l]$, 对式(25)在 $[t_l, t]$ 上积分有

$$V_i(t) \leq e^{-\alpha(t-t_l)} V_i(t_l) - \int_{t_l}^t e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \quad (26)$$

假定 $t \in [t_{l-1} + \Delta_{l-1}, t_l]$, 对式(25)在 $[t_{l-1} + \Delta_{l-1}, t]$ 上积分有

$$V_{i,j}(t) \leq e^{-\alpha[t-(t_{l-1}+\Delta_{l-1})]} V_{i,j}(t_{l-1} + \Delta_{l-1}) - \int_{t_{l-1}+\Delta_{l-1}}^t e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \quad (27)$$

考虑式(16)、(26)和(27), 在 $t \in [t_{l-1}, t_l]$ 上递推得

$$\begin{aligned} V_i(t_l) &\leq \mu V_{ij}(t_l) \leq \\ &\mu e^{-\alpha[t_l-(t_{l-1}+\Delta_{l-1})]} V_{i,j}(t_{l-1} + \Delta_{l-1}) - \\ &\int_{t_{l-1}+\Delta_{l-1}}^{t_l} \mu e^{-\alpha(t_l-s)} \Gamma(s) ds \leq \\ &\mu^2 e^{-\alpha[t_l-(t_{l-1}+\Delta_{l-1})]} [e^{-\alpha\Delta_{l-1}} V_j(t_{l-1}) - \\ &\int_{t_{l-1}}^{t_{l-1}+\Delta_{l-1}} e^{-\alpha(t_{l-1}+\Delta_{l-1}-s)} \Gamma(s) ds] - \\ &\int_{t_{l-1}+\Delta_{l-1}}^{t_l} \mu e^{-\alpha(t_l-s)} \Gamma(s) ds \leq \\ &\mu^{2N_\sigma(t_{l-1}, t_l)} e^{-\alpha(t_l-t_{l-1})} V_j(t_{l-1}) - \\ &\int_{t_{l-1}}^{t_l} \mu^{N_\sigma} e^{-\alpha(t_l-s)} \Gamma(s) ds \end{aligned} \quad (28)$$

其中,

$$N_\sigma = \begin{cases} 2N_\sigma(s, t), & \rho \in \Omega_{i,i} \\ 2N_\sigma(s, t) + 1, & \rho \in \Omega_{i,j} \end{cases}$$

当 $t \in [t_l, t_l + \Delta_l]$ 时, 考虑式(25), 由式(26)迭代得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq e^{-\alpha(t-t_l)} V_{\sigma(t_l)}(t_l) - \int_{t_l}^t e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \leq \\ &\mu^{2N_\sigma(t_{l-1}, t)} e^{-\alpha(t-t_{l-1})} V_{\sigma(t_{l-1})}(t_{l-1}) - \\ &\int_{t_{l-1}}^t \mu^{N_\sigma} e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \leq \\ &\mu^{2N_\sigma(t_{l-2}, t)} e^{-\alpha(t-t_{l-2})} V_{\sigma(t_{l-2})}(t_{l-2}) - \\ &\int_{t_{l-2}}^t \mu^{N_\sigma} e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \leq \dots \leq \\ &\mu^{2N_\sigma(t_0, t)} e^{-\alpha(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) - \\ &\int_{t_0}^t \mu^{N_\sigma} e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \end{aligned} \quad (29)$$

当 $t \in [t_l + \Delta_l, t_{l+1}]$ 时, 结合式(16)、(27)和(29)得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq e^{-\alpha[t-(t_l+\Delta_l)]} V_{\sigma(t_l+\Delta_l)}(t_l + \Delta_l) - \\ &\int_{t_l+\Delta_l}^t e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \leq \\ &\mu e^{-\alpha(t-t_l)} V_{\sigma(t_l)}(t_l) - \\ &\int_{t_l}^t \mu^{N_\sigma} e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \leq \\ &\mu^{2N_\sigma(t_0, t)+1} e^{-\alpha(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) - \\ &\int_{t_0}^t \mu^{N_\sigma} e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \end{aligned} \quad (30)$$

综上可知, 在 $t \in [t_l, t_{l+1}]$ 上总有

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq \mu^{2N_\sigma(t_0, t)+1} e^{-\alpha(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) - \\ &\int_{t_0}^t \mu^{N_\sigma} e^{-\alpha(t-s)} \Gamma(s) ds \end{aligned} \quad (31)$$

易知 $N_\sigma \geq 0$, 结合零初始渐近稳定条件, 上式可推出

$$0 \leq - \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} [z^T(s)z(s) - \gamma^2 w^T(s)w(s)] ds \quad (32)$$

即

$$\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} z^T(s)z(s) ds \leq \gamma^2 \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} w^T(s)w(s) ds \quad (33)$$

对上式左边进行放缩得

$$\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-t_0)} z^T(s)z(s) ds \leq \gamma^2 \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} w^T(s)w(s) ds \quad (34)$$

令 $t_0 = 0$, 整理式(34), 对 t 在 $[0, \infty)$ 上积分得

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s} z^T(s)z(s) ds \leq \gamma^2 \int_0^\infty w^T(s)w(s) ds \quad (35)$$

由定义2知, 系统满足 H_∞ 性能指标.

证明完毕. $\square$

定理2 给定常数 $\alpha > 0, \mu > 1$, 以及时变参数 ρ 的变化空间 $\Omega_{i,j}, i, j \in I = \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j$. 若存在一正定对称的函数矩阵 $P_i(\rho) \in R^{n \times n}$, 以及适当维数的矩阵 W_i 和一个正实数 γ_i , 对于所有的 $\rho \in \Omega_{i,j}$, 使得

$$\begin{bmatrix} \Xi_{1,i} & \Xi_{2,i} & W_i^T E_i(\rho) & 0 & W_i^T \\ * & \Xi_{3,i} & 0 & \tilde{C}_i^T(\rho) & 0 \\ * & * & -\gamma_i^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -P_i(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_{1,i} &= -(W_i + W_i^T), \\ \Xi_{2,i} &= W_i^T \tilde{A}_i(\rho) + P_i(\rho), \\ \Xi_{3,i} &= -P_i(\rho) + \alpha P_i(\rho) + \dot{P}_i(\rho). \end{aligned} \quad (37)$$

$$P_i \leq \mu P_j$$

成立, 且系统的平均驻留时间满足式(10), 则闭环系统(4)全局一致指数稳定, 并满足鲁棒 H_∞ 性能指标.

证明 式(36)可写成如下形式

$$H + U^T W_i^T V + V^T W_i U < 0 \quad (38)$$

式中

$$H = \begin{bmatrix} 0 & P_i(\rho) & 0 & 0 & 0 \\ * & \Xi_{3,i}(\rho) & 0 & \tilde{C}_i^T(\rho) & 0 \\ * & * & -\gamma_i^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -P_i(\rho) \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -I & \tilde{A}_i(\rho) & E_i(\rho) & 0 & I \end{bmatrix}.$$

设 N_U 和 N_V 分别为 U 和 V 的右正交补, 有

$$N_V = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i(\rho) & E_i(\rho) & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, N_U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

根据投影定理,式(38)成立,当且仅当

$$N_U^T H N_U < 0, N_V^T H N_V < 0 \quad (39)$$

成立,即必有下式成立

$$\begin{bmatrix} \Phi_i(\rho) - P_i & P_i(\rho) E_i(\rho) & \tilde{C}_i^T(\rho) & P_i(\rho) \\ * & -\gamma_i^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -P_i(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (40)$$

结合Schur补引理,将式(40)分解为

$$\begin{bmatrix} \Phi_i(\rho) - P_i(\rho) & P_i(\rho) E_i(\rho) & \tilde{C}_i^T(\rho) \\ * & -\gamma_i^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_i(\rho) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i^T(\rho) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T (-P_i^{-1}(\rho)) < 0 \quad (41)$$

恰与式(8)一致。

由此可知,若定理2成立,则定理1必成立.证明完毕.□

定理3 给定常数 $\alpha > 0, \mu > 1$,以及时变参数 ρ 的变化空间 $\Omega_i, i, j \in I = \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j$.若存在一个正定对称的函数矩阵 $S_i(\rho) \in R^{n \times n}$,以及适当维数的矩阵 $M_i, L_i(\rho)$,和一个正实数 γ_i ,对于所有的 $\rho \in \Omega_i$,使得

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{1,i} & \Sigma_{2,i} & E_i(\rho) & 0 & M_i \\ * & \Sigma_{3,i} & 0 & \Sigma_{4,i}^T & 0 \\ * & * & -\gamma_i^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -S_i(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (42)$$

其中

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,i} &= -(M_i + M_i^T), \\ \Sigma_{2,i} &= A_i(\rho) M_i(\rho) + B_i(\rho) L_i(\rho) + S_i(\rho), \\ \Sigma_{3,i} &= -S_i(\rho) + \alpha S_i(\rho) + \dot{S}_i(\rho), \\ \Sigma_{4,i} &= C_i(\rho) M_i(\rho) + D_i(\rho) L_i(\rho). \end{aligned} \quad (43)$$

成立,且系统的平均驻留时间满足式(10),则闭环系统(4)全局一致指数稳定,并满足鲁棒 H_∞ 性能指标。

此时,各子系统的状态反馈控制器增益为 $K_i(\rho) = L_i(\rho) M_i^{-1}$.

证明 使用 $J = \text{diag}\{W_i^{-1}, W_i^{-1}, I, I, W_i^{-1}\}$ 对式(36)进行全等变换,令 $\tilde{S}_i(\rho) = W_i^{-T} P_i(\rho) W_i^{-1}$, $\tilde{M}_i = W_i^{-1} M_i$, $\tilde{L}_i(\rho) = K_i(\rho) \tilde{M}_i$,得到式(42). 由定理2可知,定理3成立.□

2.2 子空间划分

针对本文所提出的平稳切换策略,给出一种重叠

率可变的子空间划分方法。

假定鲁棒性能指标上界 γ_0 .将参数范围空间 $\Omega = \{\rho \in \Omega | \underline{\rho} \leq \rho < \bar{\rho}, \tau = \bar{\rho} - \underline{\rho}\}$ 划分为 N 个带有重叠区域的子空间 $\Omega_i = \{\rho \in \Omega_i | \underline{\rho}_i \leq \rho < \bar{\rho}_i, \tau_i = \bar{\rho}_i - \underline{\rho}_i\}$.在各子空间内,设计满足要求的控制器。

设子空间 j 与子空间 i 的重叠率 $w_{ji}\% = \frac{\bar{\rho}_j - \underline{\rho}_i}{\tau_j + \tau_i}$, $i = j+1, i, j \in I$,则有 $\bar{\rho}_j = \underline{\rho}_i + w_{ji}\%(\tau_j + \tau_i)$.为防止重叠区域过大,限制 $0 \leq w_{ji}\%(\tau_j + \tau_i) < \tau_j$.当 $w_{ji}\% = 0\%$ 时,子空间无重叠区域。

对于所有 $i \in I$,其子空间上下界可以表示为

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_i &= \begin{cases} \underline{\rho} & , i = 1 \\ \bar{\rho}_j - w_{ji}\%(\tau_j + \tau_i) & , i = \{2, 3, \dots, N\} \end{cases} \\ \bar{\rho}_i &= \underline{\rho}_i + \tau_i, i \in I \end{aligned} \quad (44)$$

子空间划分算法如下:

step 1: 设子空间个数 $N = 1$,给定鲁棒性能指标上界 γ_0 .

step 2: 令 $N = N + 1$,考虑 $\Omega_i = \{\rho \in \Omega_i | \underline{\rho}_i \leq \rho < \bar{\rho}_i, \tau_i = \bar{\rho}_i - \underline{\rho}_i\}, i \in \{1, 2, \dots, N\}$,使下式成立

$$\min \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_i + \dots + \gamma_N.$$

s.t. eq(42), (43), (44);

$$\sum_{i=1}^N \tau_i = \tau + \sum_{i=1}^N w_{ji}\%(\tau_j + \tau_i). \quad (45)$$

利用LMI工具箱迭代可解得 $\gamma_i, \tau_i, w_{ji}\%$.若 $\gamma_i \leq \gamma_0$,跳转步骤3;否则重复步骤2;

step 3: 由 $\tau_i, w_{ji}\%$,结合式(44)可知 $\bar{\rho}_i, \underline{\rho}_i$,结束。

3 数值仿真

考虑LPV系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -1 - 2\rho(t) & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.27 + 0.2\rho(t) \\ 0.5 + 3.5\rho(t) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.1\rho(t) \\ -0.2 + 0.1\rho(t) \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0.2 + 0.3\rho(t) & 0 \\ 0.2\rho(t) & 0.3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.4\rho(t) \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

其中,时变参数 $\rho(t) = \sin(t)$ 满足 $\rho(t) \in [-1, 1]$.

选取 $\alpha = 0.5, \mu = 1.05$,由式(10)可知平均驻留时间 $\tau_\alpha = 0.1952\text{s}$.给定鲁棒性能指标上界 $\gamma_0 = 0.8$,根据本文提出的子空间划分方法,通过求解式(45),将参数范围空间划分为两个具有重叠区域的子空间 $\Omega_1 = [-1, 0.51]$ 和 $\Omega_2 = (0.09, 1]$,此时重叠率 $w_{12}\% = 21\%$.为便于对比,令 $w_{12}\% = 0$,根据式(45)将参数范围空间划分为两个无重叠区域的子空间 $\Omega_1^* = [-1, 0.07]$ 和 $\Omega_2^* = (0.07, 1]$.

下面给出LPV系统模型在平稳切换策略与非平

稳切换策略情况下的仿真数值,分别如表1和表2所示.查表可知,采用平稳切换策略的LPV系统取得更小的 γ 指标,鲁棒性更强.

表1 平稳切换策略下系统的仿真数值

参数子空间	控制器增益	鲁棒性能指标
$(-1, 0.51]$	$k_1 = \begin{bmatrix} -0.3508\rho + 0.5868 \\ -2.9914\rho - 1.0819 \end{bmatrix}^T$	$\gamma_1 = 0.7227$
$(0.09, 1]$	$k_2 = \begin{bmatrix} -0.9319\rho + 1.5145 \\ 4.57621\rho - 5.0446 \end{bmatrix}^T$	$\gamma_2 = 0.6942$

表2 非平稳切换策略下系统的仿真数值

参数子空间	控制器增益	鲁棒性能指数
$[-1, 0)$	$k_1^* = \begin{bmatrix} 0.1917\rho + 0.4915 \\ -6.4200\rho - 4.5279 \end{bmatrix}^T$	$\gamma_1^* = 0.7585$
$[0, 1]$	$k_2^* = \begin{bmatrix} -1.1176\rho + 1.7447 \\ 5.0416\rho - 5.6525 \end{bmatrix}^T$	$\gamma_2^* = 0.7322$

控制器的切换信号如图2所示.当切换信号取值为1或2时,调用相应子空间的控制器;当切换信号的取值在(1, 2)之间时,根据平稳切换策略,加权调用相邻子空间的控制器.

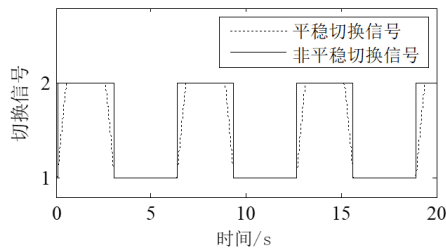
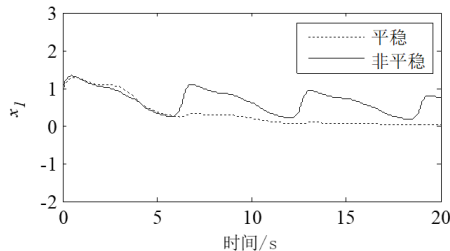
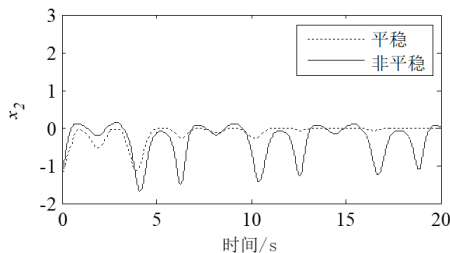


图2 切换信号

LPV系统的状态轨迹如图3所示.在非平稳切换策略下,状态曲线振荡较剧烈,收敛性较差;而采用平稳切换策略的状态曲线相比十分平稳,并在5s内显示出良好的收敛性.



(a) x_1 状态轨迹



(b) x_2 状态轨迹

图3 LPV系统状态轨迹

4 结论

本文提出了一种LPV系统平稳切换策略,以及重叠率可变的子空间划分方法.将时变参数的变化范围划分成有限个带有重叠区域的子空间,通过平均驻留时间方法,在每个子空间上设计状态反馈控制器,使闭环系统满足鲁棒 H_∞ 指数稳定.当系统运行时,采用平稳切换策略调度相应控制器.最后,由仿真结果表明采取平稳切换策略的LPV系统具有更平稳的状态曲线,在切换时展示出更好的稳定性.

参考文献(References)

- [1] Wu F. A generalized LPV system analysis and control synthesis framework[J]. International Journal of Control, 2001, 74(7): 745-759.
- [2] Cheng H, Fu W, Dong C. Asynchronously finite-time H_∞ control for morphing aircraft[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2018, 40(9): 4330-4344.
- [3] Liberzon D. Switching in Systems and Control[M]. Birkhäuser Boston, 2003: 3-15.
- [4] Lu B, Wu F. Switching LPV control designs using multiple parameter-dependent Lyapunov functions[J]. Automatica, 2004, 40(11): 1973-1980.
- [5] Lu B, Wu F, Kim S W. Switching LPV control of an F-16 aircraft via controller state reset[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(2): 267-277.
- [6] Gans N R, Hutchinson S A. Stable visual servoing through hybrid switched-system control[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2007, 23(3): 530-540.
- [7] Yuan C, Wu F. Hybrid Control for Switched Linear Systems With Average Dwell Time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(1): 240-245.
- [8] Jiang W L, Dong C Y, Wang Q. A systematic method of smooth switching LPV controllers design for a morphing aircraft[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, 28(6): 1640-1649.
- [9] Ma D, Zhao J. Stabilization of networked switched linear systems: An asynchronous switching delay system approach[J]. Systems & Control Letters, 2015, 77: 46-54.
- [10] Wu L, Lam J. Weighted H_∞ Filtering of Switched Systems with Time-Varying Delay: Average Dwell Time Approach[J]. Circuits Systems & Signal Processing, 2009, 28(6): 1017-1036.
- [11] Zhao X, Zhang L, Shi P. Stability and Stabilization of Switched Linear Systems With Mode-Dependent Average Dwell Time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(7): 1809-1815.
- [12] Cheng H, Dong C Y, Wang Q. Smooth switching linear parameter-varying fault detection filter design for morphing aircraft with asynchronous switching[J]. Transactions of the Institute of Measurement and

- Control, 2017, 40(8): 2622–2638.
- [13] Jiang W, Dong C, Wang Q. Smooth switching linear parameter-varying control for hypersonic vehicles via a parameter set automatic partition method[J]. IET Control Theory and Applications, 2015, 9(16): 2377–2386.
- [14] 黄金杰, 郝现志, 潘晓真. 基于模型依赖驻留时间的异步切换控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(3): 609–618.
(Huang J J, Hao X Z, Pan X Z. Asynchronous handover control based on model dependent dwell time[J]. Control and Decision, 2021, 36(3): 609–618.)
- [15] Ren C, Li L, He S. Finite-time non-fragile controller design for a class of switching linear parameter varying systems based on linear matrix inequalities[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I-Journal of Systems and Control Engineering, 2019, 233(1): 58–66.
- [16] Wang S, Ji W, Jiang Y. Average dwell time approach to H_∞ filter for continuous-time switched linear parameter varying systems with time-varying delay[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I-Journal of Systems and Control Engineering, 2019, 233: 80–90.
- [17] Song L, Yang J. Smooth Switching Output Tracking Control for LPV Systems[J]. Asian Journal of Control, 2012, 14(6): 1710–1716
- [18] Song L, Yang J. Chinese Control Conference[C]. Proceedings of the 29th Chinese Control Conference, 2010: 1977–1982.
- [19] Hanifzadegan M, Nagamune R. Smooth switching LPV controller design for LPV systems[J]. Automatica, 2014, 50: 1481–1488.
- [20] Khani F, Haeri M. Smooth switching in a scheduled robust model predictive controller[J]. Journal of Process Control, 2015, 31: 55–63.
- [21] 吴伟林, 谢巍, 何伟. 一种基于LPV系统的 H_∞ 切换控制器设计方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(3): 622–628.
(Wu W L, Xie W, He W. A design method of H_∞ switching controller based on LPV system[J]. Control and Decision, 2020, 35(3): 622–628.)
- [22] Yu M, Yany X Q, Liu X P. LPV system identification with multiple-model approach based on shifted asymmetric laplace distribution[J/OL]. International Journal of Systems Science, (2020-11-29)[2021-01-08]. <https://doi.org/10.1080/00207721.2020.1859158>.

作者简介

黄金杰(1967–), 男, 教授, 博士生导师, 从事增益调度、复杂工业过程优化控制及其应用等研究, E-mail: huangjinjie163@163.com;

宫煜晴(1996–), 女, 硕士生, 从事LPV系统、切换控制的研究, E-mail: 497812859@qq.com;

郝现志(1991–), 男, 博士生, 从事切换控制、鲁棒控制的研究, E-mail: hxz.man@163.com.