控制与决策
Control and Decision

覆盖多粒度粗糙集的数值特征

王加阳, 帅勇, 张炜

引用本文:
王加阳, 帅勇, 张炜. 覆盖多粒度粗糙集的数值特征[J]. 控制与决策, 2020, 35(1): 123-130.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0436

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于分众模式的多部门大群体应急决策方法

Multi-department large group emergency decision making method based on crowd sourcing

控制与决策. 2019, 34(4): 871-879 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1226

基于模糊粗糙集属性约简与GMM-LDA最优聚类簇特征学习的自适应网络入侵检测

Adaptive network intrusion detection based on fuzzy rough set-based attribute reduction and GMM-LDA-based optimal cluster feature learning

控制与决策. 2019, 34(2): 243-251 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1030

基于随机有限集的多扩展目标跟踪研究进展

Development of multiple extended object tracking based on random finite set

控制与决策. 2017, 32(6): 961-966 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1232

基于证据理论和前景理论的犹豫-直觉模糊语言多准则决策方法

Multi-criteria decision-making method based on evidence theory and prospect theory for hesitant-intuitionistic fuzzy linguistic

控制与决策. 2017, 32(2): 333-339 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1598

基于属性重要度的风险决策粗糙集属性约简

Risk DTRS attribute reduction based on attribute importance

控制与决策. 2016, 31(7): 1199-1205 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0656

基于差别信息树的rough set属性约简算法

Attribute reduction with rough set based on discernibility information tree

控制与决策. 2015, 30(8): 1531-1536 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0724

不一致决策表规则获取的粒计算方法

GrC method of rule acquisition for inconsistent decision table

控制与决策. 2015(4): 709-714 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1205

论域合成的商空间关系

Relationship between quotient spaces under domain combination

控制与决策. 2015(10): 1911-1914 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1176

文章编号: 1001-0920(2020)01-0123-08 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.0436

覆盖多粒度粗糙集的数值特征

王加阳, 帅 勇†, 张 炜

(中南大学 信息科学与工程学院，长沙 410083)

摘 要: 通过极大描述和极小描述获取的覆盖多粒度粗糙集,可以更好地应用于实际. 首先通过极小描述和极大描述的交并运算定义4个悲观覆盖多粒度粗糙集模型,并讨论其基本性;在此基础上进一步分析其证据结构,并得出覆盖多粒度粗糙集具有信任结构的充分条件,即上、下近似满足对偶性、可加性和可乘性. 通过上述研究,进一步丰富了多粒度粗糙集的研究.

关键词: 多粒度；粗糙集；证据理论；数值特征

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Numerical characterization of multi-granularition covering rough sets

WANG Jia-yang, SHUAI Yong†, ZHANG Wei

(College of Information Science and Engineering，Central South University，Changsha 410083，China)

Abstract: The covering multi-granularition rough sets obtained by maximum description and minimal description can be better applied to reality. Fristly, four kinds of pessimistic covering multi-granularition rough set models are defined by the minimal description and the maximum description, and then its basic proper is analyzed. Moreover, the belief struct of covering multi-granularition rough sets is analyzed. The sufficient conditions for the belief struct covering multi-granularition rough sets is obtained which is approximately satisfied the duality, additivity and multiplication. Through the above study, the research of multi-granularition rough sets is enriched.

Keywords: multi-granularition；rough sets；evidence theory；numerical characterization

0 引 言

粗糙集通过等价关系形成的知识粒表示知识,用上、下近似表示不确定性[1-2]. 然而,随着数据结构和形式的日益多样化,基于等价关系的经典粗糙集已经不能满足实际问题的处理需求. 因此,众多学者从不同的角度对经典粗糙集模型进行扩展,其中一个重要的分支便是覆盖粗糙集. 自Zakowski[3]首次提出覆盖粗糙集后,覆盖粗糙集的研究迎来了热潮,基于Zakowski粗糙集的改进模型相继被提出. 随后,文献[4-7]将现有的覆盖粗糙集模型进行了归类和总结. 虽然,覆盖粗糙集模型的提出在一定程度上弥补了经典粗糙集的不足,但在实际应用上仍存在诸多限制. 随着粒计算[8-11]思想的引入,可知经典粗糙集模型以及覆盖粗糙集模型均为单粒度粗糙集模型,且实际应用中往往需要从多个角度处理问题,相对于单粒度粗糙集模型,多粒度粗糙集模型更容易发现隐含的知识. Qian等[12-14]提出了基于多个等价关系的经典多粒度粗糙集,随后又提出基于多个相容关系的覆盖多粒度粗糙集,克服了等价关系给经典多粒度粗糙集带来的缺陷; Xu等[15-17]进一步弱化等价关系,提出基于模糊相容关系、序关系和广义关系的覆盖多粒度粗糙集. 然而,在实际应用中,往往很难发现数据的内在关系,反而更容易获得其近似空间. 近似空间中包含个体的最小集合为极小描述(最大的集合为极大描述),通过极小描述(极大描述)定义的多粒度粗糙集相对而言能更好地应用于实际.

证据理论通过mass函数导出的一对对偶函数(信任函数和似然函数)表示不确定性,其核心概念为信任结构[18]. 最近证据理论与粗糙集模型结合是研究的热点之一,文献[19]给出经典粗糙集具有信任结构的充分条件,并且阐述了信任函数和似然函数与粗糙集的上、下近似算子之间的联系;文献[20-22]将研究扩展到覆盖粗糙集中,并成功地使用信任函数和似然函数刻画覆盖粗糙集的上、下近似,即通过证据理论刻画粗糙集的数值特征;文献[23]从信息融合的角度探讨证据理论同经典多粒度粗糙集的关系,并表明在一般情形下,经典的乐观多粒度粗糙集不存在与其对应的信任结构;文献[24]通过信任函数和似然函

收稿日期: 2018-04-11；**修回日期:** 2018-06-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61772031).

责任编委: 张化光.

†通讯作者. E-mail: 13874954950@163.com.

数对经典多粒度粗糙集进行属性约简,并给出了新的约简算法. 综上所述,首先通过极大描述和极小描述,给出4种悲观覆盖多粒度粗糙集模型,并探讨其基本性质;随后基于当下研究热点,并且结合文献[25]的4种乐观多粒度粗糙集模型(记为FR^O、SR^O、TR^O和LR^O),得出基于极大描述和极小描述所获得的8种覆盖多粒度粗糙集具有信任结构的充分条件,并给出mass函数的具体表达式,从而使多粒度粗糙集能够应用于证据的合成.

1 基础知识

首先介绍粗糙集、覆盖粗糙集和多粒度粗糙集的基本概念.

1.1 Pawlak粗糙集

经典Pawlak粗糙集主要通过信息系统表示信息. 下面给出信息系统的定义.

定义1 若$\mathrm{IS}=(U,\mathrm{AT},V,f)$为信息系统,则非空对象集$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,称为论域, AT为属性集, V为属性值域,函数$f:U\times\mathrm{AT}\to V$为属性值映射函数.

定义2 令$\mathrm{IS}=(U,\mathrm{AT},V,f)$为信息系统,属性集AT决定的二元不可分辨关系为$R_{\mathrm{AT}}=\{(x,y)\in U\times U|a\in\mathrm{AT},f(x,a)=f(y,a)\}$. 若$R_{\mathrm{AT}}$为等价关系,则此时形成的不可分辨类称为等价类,记为$[x]_{R_{\mathrm{AT}}}$. 所有等价类构成了论域的划分,记为U/R_{AT}.

定义3 令$\mathrm{IS}=(U,\mathrm{AT},V,f)$为信息系统,属性集AT决定的二元不可分辨关系为$R_{\mathrm{AT}}$,对任意的子集$X\subseteq U$,有

$$\underline{R}(X)=\{x\in U|[x]_R\subseteq X\},$$
$$\overline{R}(X)=\{x\in U|[x]_R\bigcap X\neq\phi\}.$$

则称$\overline{R}(X)$和$\underline{R}(X)$为X的上、下近似,$(\underline{R}(X),\overline{R}(X))$为$X$的粗糙集.

性质1 令$\mathrm{IS}=(U,\mathrm{AT},V,f)$为信息系统,属性集AT决定的二元不可分辨关系为$R_{\mathrm{AT}}$,对于任意的子集$X\subseteq U$, $\sim X=U-X$, $\overline{R}(X)$和$\underline{R}(X)$为X的上、下近似,则有如下基本性质:

(L1): $\underline{R}(X)\subseteq X$;

(L2): $\underline{R}(\phi)=\phi$;

(L3) :$\underline{R}(U)=U$;

(L4): $X\subseteq Y\Rightarrow\underline{R}(X)\subseteq\underline{R}(Y)$;

(L5): $\underline{R}(X\bigcap Y)=\underline{R}(X)\bigcap\underline{R}(Y)$;

(L6): $\underline{R}(X\bigcup Y)\supseteq\underline{R}(X)\bigcup\underline{R}(Y)$;

(L7): $\underline{R}(\sim X)=\sim\overline{R}(X)$;

(U1): $X\subseteq\overline{R}(X)$;

(U2): $\overline{R}(\phi)=\phi$;

(U3): $\overline{R}(U)=U$;

(U4): $X\subseteq Y\Rightarrow\overline{R}(X)\subseteq\overline{R}(Y)$;

(U5): $\overline{R}(X\bigcup Y)=\overline{R}(X)\bigcup\overline{R}(Y)$;

(U6): $\overline{R}(X\bigcap Y)\subseteq\overline{R}(X)\bigcap\overline{R}(Y)$;

(U7): $\overline{R}(\sim X)=\sim\underline{R}(X)$.

上述的性质(L4)～(L7)和(U4)～(U7)称为上、下近似的单调性、可加性、可乘性和对偶性.

1.2 覆盖粗糙集

U为论域, C为U的非子空集构成的集簇,若$\bigcup C=U$,则称C为论域U的覆盖.

定义4 若C为论域U的覆盖,则二元组(C,U)为覆盖近似空间.

定义5 若(C,U)为覆盖近似空间, $C=\{k_1,k_2,\cdots,k_p\}$,对于任意$x\in U$有如下定义:

$\mathrm{md}_C(x)=$

$\{k\in C|x\in k\bigwedge(\forall s\in C\bigwedge x\in s\bigwedge s\subseteq k)\Rightarrow k=s\}$,

$\mathrm{MD}_C(x)=$

$\{k\in C|x\in k\bigwedge(\forall s\in C\bigwedge x\in s\bigwedge s\supseteq k)\Rightarrow k=s\}$,

则称$\mathrm{md}_C(x)$和$\mathrm{MD}_C(x)$为x的极小描述和极大描述.

由上述定义可知,通过极小描述可获得含有x的最小集合;通过极大描述可获得含有x的最大集合. 基于此可得X的上、下近似定义.

定义6 若(C,U)为覆盖近似空间, $C=\{k_1,k_2,\cdots,k_p\}$,则对于任意子集$X\subseteq U$,关于X的上、下近似定义如下:

$$C^*(X)=\{x\in U|(\bigcap\mathrm{md}(x)\bigcap X\neq\phi)\},$$
$$C_*(X)=\{x\in U|(\bigcap\mathrm{md}(x)\subseteq X)\}.$$

定义6表明,可以利用极小描述获得X的上、下近似,同理也可以利用极大描述获得X的上、下近似.

定义7 任意两个覆盖近似空间(C_1,U)和(C_2,U), $C_1=\{k_{11},k_{12},\cdots,k_{1p}\}$, $C_2=\{k_{21},k_{22},\cdots,k_{2q}\}$. 若对于任意$x\in U$, $x\in k_{1i}$, $1\leqslant i\leqslant p$, $x\in k_{2j}$, $1\leqslant i\leqslant q$,有$k_{1i}\subseteq k_{2j}$,则称C_1细分C_2,记$C_1\leqslant C_2$.

1.3 多粒度粗糙集

下面给出经典多粒度粗糙集的定义.

定义8 令$\mathrm{IS}=(U,\mathrm{AT})$为信息系统,属性子集$A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq A$,其中$m$为自然数. $\forall X\subseteq U$,关于X的乐观多粒度上、下近似为

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)=\{x\in U|[x]_{A_1}\subseteq X\bigvee[x]_{A_2}\subseteq X\bigvee\cdots\bigvee[x]_{A_m}\subseteq X\},$$
$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)=\sim\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}(\sim X).$$

定义9 令$\mathrm{IS}=(U,\mathrm{AT})$为信息系统,属性子集$A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq A$,其中$m$为自然数. $\forall X\subseteq U$,关于X的悲观多粒度上、下近似为

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) = \{x \in U | [x]_{A_1} \subseteq X \bigwedge [x]_{A_2} \subseteq X \bigwedge \cdots \bigwedge [x]_{A_m} \subseteq X\},$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_i}(X) = \sim \underline{\sum_{i=1}^{m} A_i}(\sim X).$$

定义8和定义9通过多个等价关系诱导出的等价类,定义了两种多粒度粗糙集模型,即经典的乐观多粒度粗糙集和悲观多粒度粗糙集.

1.4 证据结构

定义10 设Θ为识别框架,A为Θ的任意子集,定义在识别框架Θ上的函数$m: 2^{\Theta} \to [0,1]$若满足如下条件:

1) $m(\phi) = 0$;

2) $\sum\limits_{X \subseteq U} m(X) = 1$;

则称函数m为Θ的基本可信度分配函数或mass函数.

$m(A)$表示证据对A的信任度. 若$m(A) > 0$,则称m为焦元. 所有焦元的并为核,记为F,二元序对(m, F)即为信任结构.

定义11 设Θ为识别框架,A为Θ的任意子集,m为识别框架Θ的基本可信度分配函数,若$\mathrm{Bel}(X) = \sum\limits_{A \subseteq X} m(A)$, $\mathrm{Pl}(X) = \sum\limits_{A \bigcap X \neq \phi} m(A)$,则称$\mathrm{Bel}(X)$和$\mathrm{Pl}(X)$为信任函数和似然函数.

信任函数$\mathrm{Bel}(X)$表示X为真的信任度,似然函数$\mathrm{Pl}(X)$表示不怀疑X为真的信任度,且$\mathrm{Bel}(X)$与$\mathrm{Pl}(X)$为互补关系. 虽然通过可信度分配函数可以定义信任函数和似然函数,但是同样可以根据以下定义获得信任函数.

定义12 对于识别框架Θ的任意子集2^{Θ},若函数$\mathrm{Bel}: 2^{\Theta} \to [0,1]$满足如下条件:

1) $\mathrm{Bel}(\phi) = 0$;

2) $\mathrm{Bel}(\Theta) = 1$;

3) $\mathrm{Bel}(\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i) \geqslant \sum\limits_{\phi \neq J \subseteq \{1,2,\cdots,m\}} (-1)^{|U+1|} \mathrm{Bel}(\bigcap\limits_{i \in J} X_i)$.

则称函数$\mathrm{Bel}: 2^{\Theta} \to [0,1]$为信度函数.

定义13 若Θ为识别框架,函数Bel为识别框架Θ上的信任函数,则可知基本可信度分配函数为

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} \mathrm{Bel}(B),\ A, B \subseteq \Theta,$$

并且称上述过程为莫比乌斯变换.

2 覆盖多粒度粗糙集

首先通过极小描述和极大描述定义4种悲观覆盖多粒度粗糙集模型,随后讨论其基本性质.

定义14 令(C, U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇$C = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$, m为自然数,且$C_i = \{k_{i1}, k_{i2}, \cdots, k_{in}\}$, $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. 对于任意$X \subseteq U$,第1型悲观多粒度粗糙集关于$X$的上、下近似为$\Big($为了便于描述,全文将用符号sum代替$\sum\limits_{i=1}^{m} C_i$的求和过程$\Big)$

$$\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X) = \{x \in U | \bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x) \subseteq X \bigwedge \bigcap \mathrm{md}_{C_2}(x) \subseteq X \bigwedge \cdots \bigwedge \bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x) \subseteq X\},$$

$$\overline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X) = \{x \in U | (\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x)) \bigcap X \neq \phi \bigvee (\bigcap \mathrm{md}_{C_2}(x)) \bigcap X \neq \phi \bigvee \cdots \bigvee (\bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x)) \bigcap X \neq \phi\}.$$

定义15 令(C, U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$, m为自然数,且$C_i = \{k_{i1}, k_{i2}, \cdots, k_{in}\}$, $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. 对于任意$X \subseteq U$,第2型悲观多粒度粗糙集关于$X$的上、下近似为

$$\underline{\mathrm{SR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X) = \{x \in U | \bigcup \mathrm{md}_{C_1}(x) \subseteq X \bigwedge \bigcup \mathrm{md}_{C_2}(x) \subseteq X \bigwedge \cdots \bigwedge \bigcup \mathrm{md}_{C_m}(x) \subseteq X\},$$

$$\overline{\mathrm{SR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X) = \{x \in U | (\bigcup \mathrm{md}_{C_1}(x)) \bigcap X \neq \phi \bigvee (\bigcup \mathrm{md}_{C_2}(x)) \bigcap X \neq \phi \bigvee \cdots \bigvee (\bigcup \mathrm{md}_{C_m}(x)) \bigcap X \neq \phi\}.$$

定义14和定义15通过极小描述的交并运算定义了第1型和第2型悲观多粒度粗糙集模型. 接下来给出第3型和第4型悲观多粒度粗糙集模型的定义.

定义16 令(C, U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$, m为自然数,且$C_i = \{k_{i1}, k_{i2}, \cdots, k_{in}\}$, $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. 对于任意$X \subseteq U$,第3型悲观多粒度粗糙集关于$X$的上、下近似为

$$\underline{\mathrm{TR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X) = \{x \in U | \bigcap \mathrm{MD}_{C_1}(x) \subseteq X \bigwedge \bigcap \mathrm{MD}_{C_2}(x) \subseteq X \bigwedge \cdots \bigwedge \bigcap \mathrm{MD}_{C_m}(x) \subseteq X\},$$

$$\overline{\mathrm{TR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X) = \{x \in U | (\bigcap \mathrm{MD}_{C_1}(x)) \bigcap X \neq \phi \bigvee (\bigcap \mathrm{MD}_{C_2}(x)) \bigcap X \neq \phi \bigvee \cdots \bigvee (\bigcap \mathrm{MD}_{C_m}(x)) \bigcap X \neq \phi\}.$$

定义17 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$,m为自然数,且$C_i=\{k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}\}$,$i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意$X\subseteq U$,第4型悲观多粒度粗糙集关于$X$的上、下近似为

$$\underline{\mathrm{LR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=$$
$$\{x\in U|\bigcup \mathrm{MD}_{C_1}(x)\subseteq X\bigwedge$$
$$\bigcup \mathrm{MD}_{C_2}(x)\subseteq X\bigwedge\cdots\bigwedge\bigcup \mathrm{MD}_{C_m}(x)\subseteq X\},$$
$$\overline{\mathrm{LR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=$$
$$\{x\in U|(\bigcup \mathrm{MD}_{C_1}(x))\bigcap X\neq\phi\bigvee$$
$$(\bigcup \mathrm{MD}_{C_2}(x))\bigcap X\neq\phi\bigvee\cdots\bigvee$$
$$(\bigcup \mathrm{MD}_{C_m}(x))\bigcap X\neq\phi\}.$$

定义16和定义17通过极大描述的交并运算定义了第3型和第4型悲观多粒度粗糙集模型. 为了更好理解上述4种模型,将给出算例予以说明.

例1 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=\{C_1,C_2\}$. 论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,且$C_1=\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\}\}$和$C_2=\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2,x_3\},\{x_4\}\}$.

令$X=\{x_1,x_2,x_4\}$,根据定义14～定义17可得,上述4种粗糙集关于X的上、下近似分别为

$$\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=\{x_1,x_2,x_4\},\ \overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=U;$$
$$\underline{\mathrm{SR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=\{x_1,x_2,x_4\},\ \overline{\mathrm{SR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=U;$$
$$\underline{\mathrm{TR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=\{x\},\ \underline{\mathrm{TR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=\{x_4\};$$
$$\underline{\mathrm{LR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=\{x_4\},\ \overline{\mathrm{LR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)=U.$$

由算例1可知,上述4种多粒度粗糙集获得的上、下近似并不完全相等.

下面将讨论上述4种多粒度粗糙集的基本性质,即是否满足性质1. 性质1中的(L1)～(L3)和(U1)～(U3)由基本定义可知成立,故不再赘述,主要分析性质(L4)～(L7)和(U4)～(U7)是否成立. 为了便于描述,接下来只分析第1型悲观多粒度粗糙集(FR^P)的性质.

性质2 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$,m为自然数,且$C_i=\{k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}\}$,$i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意$X,Y\subseteq U$,有:

1) 若$X\subseteq Y$,则$\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\subseteq\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)$;

2) 若$X\subseteq Y$,则$\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\subseteq\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)$.

证明 1) 由定义14可知,若$X\subseteq Y$,则

$$\bigcap \mathrm{md}_{C_i}(x)\subseteq X\Rightarrow\bigcap \mathrm{md}_{C_i}(x)\subseteq Y,$$
$$i\in\{1,2,\cdots,m\},$$

故可知$\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\subseteq\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)$.

2) 由定义14可知,若$X\subseteq Y$,则

$$\bigcap \mathrm{md}_{C_i}(x)\bigcap X\neq\phi\Rightarrow\bigcap \mathrm{md}_{C_i}(x)\bigcap Y\neq\phi,$$
$$i\in\{1,2,\cdots,m\},$$

故可知$\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\subseteq\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)$. □

性质2表明,多粒度粗糙集FR^P具有单调性.

性质3 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$,m为自然数,且$C_i=\{k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}\}$,$i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意$X,Y\subseteq U$,有:

1) $\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X\bigcap Y)=\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\bigcap\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)$;

2) $\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X\bigcup Y)=\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\bigcup\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)$.

证明 1) 由定义14可知

$$x\in\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X\bigcap Y)=$$
$$\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x)\subseteq(X\bigcap Y)\bigwedge\cdots\bigwedge$$
$$\bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x)\subseteq(X\bigcap Y)=$$
$$\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x)\subseteq X\bigwedge\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x)\subseteq$$
$$Y\bigwedge\cdots\bigwedge\bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x)\subseteq X\bigwedge$$
$$\bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x)\subseteq X=$$
$$x\in\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\bigwedge x\in\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)=$$
$$x\in\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\bigwedge\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y),$$

故可知$\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X\bigcap Y)=\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\bigcap\underline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)$.

2) 由定义14可知

$$x\in\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X\bigcup Y)=$$
$$(\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x))\bigcap(X\bigcup Y)\neq$$
$$\phi\bigvee\cdots\bigvee(\bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x))\bigcap$$
$$(X\bigcup Y)\neq\phi=$$
$$(\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x))\bigcap X\neq\phi\bigvee$$
$$(\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x))\bigcap Y\neq\phi\bigvee\cdots\bigvee$$
$$(\bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x))\bigcap X\neq\phi\bigvee$$
$$(\bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x))\bigcap Y\neq\phi=$$
$$((\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x))\bigcap X\neq\phi\bigvee\cdots\bigvee$$
$$(\bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x))\bigcap X\neq\phi)\bigvee$$
$$((\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x))\bigcap Y\neq\phi\bigvee\cdots\bigvee$$
$$(\bigcap \mathrm{md}_{C_m}(x))\bigcap Y\neq\phi)=$$
$$x\in\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\bigvee x\in\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)=$$
$$x\in\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\bigvee\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y),$$

故可知$\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X\bigcup Y)=\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(X)\bigcup\overline{\mathrm{FR}_{\mathrm{sum}}^{P}}(Y)$. □

性质3表明,多粒度粗糙集FR^P具有可加性.

性质4 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$,m为自然数,且$C_i=\{k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}\}$,$i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意$X,Y\subseteq U$,有:

1) $\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X\bigcup Y)\supseteq\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)\bigcup\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(Y)$;

2) $\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X\bigcap Y)\subseteq\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)\bigcap\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(Y)$.

证明 1) 由 $X\subseteq X\bigcup Y\bigwedge Y\subseteq X\bigcup Y$,可知

$$\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)\subseteq\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X\bigcup Y)\bigwedge$$
$$\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(Y)\subseteq\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X\bigcup Y),$$

故可知 $\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X\bigcup Y)\supseteq\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)\bigcup\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(Y)$.

2) 由 $X\bigcap Y\subseteq X\bigwedge X\bigcap Y\subseteq Y$,可知

$$\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X\bigcap Y)\subseteq\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)\bigwedge$$
$$\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X\bigcap Y)\subseteq\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(Y),$$

故可知 $\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X\bigcap Y)\subseteq\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)\bigcap\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(Y)$. □

性质4表明,多粒度粗糙集 FR^P 具有可乘性,同时由性质2～性质4可得如下性质.

性质5 令 (C,U) 为覆盖多粒度近似空间,其中 C 为覆盖簇,$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$,m 为自然数,且 $C_i=\{k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}\}$,$i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意 $X,Y\subseteq U$,有:

1) $\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(\sim X)=\sim\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)$;

2) $\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(\sim X)=\sim\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)$.

证明 1) 由定义14可知

$$\begin{aligned}&\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(\sim X)=\\&\{x\in U|\bigcap\mathrm{md}_{C_1}(x)\subseteq\sim X\bigwedge\bigcap\mathrm{md}_{C_2}(x)\subseteq\\&\sim X\bigwedge\cdots\bigwedge\bigcap\mathrm{md}_{C_m}(x)\subseteq\sim X\}=\\&\{x\in U|\bigcap\mathrm{md}_{C_1}(x)\bigcap X=\\&\phi\bigwedge(\bigcap\mathrm{md}_{C_2}(x))\bigcap X=\\&\phi\bigwedge\cdots\bigwedge(\bigcap\mathrm{md}_{C_m}(x))\bigcap X=\phi\}=\\&\sim\{x\in U|(\bigcap\mathrm{md}_{C_1}(x))\bigcap X\neq\phi\bigvee\\&(\bigcap\mathrm{md}_{C_2}(x))\bigcap X\neq\phi\bigvee\cdots\bigvee\\&(\bigcap\mathrm{md}_{C_m}(x))\bigcap X\neq\phi\}=\sim\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X).\end{aligned}$$

2) 由定义14可知

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(\sim X)=\\&\{x\in U|(\bigcap\mathrm{md}_{C_1}(x))\bigcap\sim X\neq\phi\bigvee(\bigcap\mathrm{md}_{C_2}(x))\bigcap\\&\sim X\neq\phi\bigvee\cdots\bigvee(\bigcap\mathrm{md}_{C_m}(x))\bigcap\sim X\neq\phi\}=\\&\{\sim x\in U|(\bigcap\mathrm{md}_{C_1}(x))\bigcap\sim X=\\&\phi\bigwedge(\bigcap\mathrm{md}_{C_2}(x))\bigcap\sim X=\\&\phi\bigwedge\cdots\bigwedge(\bigcap\mathrm{md}_{C_m}(x))\bigcap\sim X=\phi\}=\\&\{\sim x\in U|(\bigcap\mathrm{md}_{C_1}(x))\subseteq X\bigwedge(\bigcap\mathrm{md}_{C_2}(x))\subseteq\\&X\bigwedge\cdots\bigwedge(\bigcap\mathrm{md}_{C_m}(x))\subseteq X\}=\sim\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X).\quad\square\end{aligned}$$

性质2～性质5表明,第1型悲观多粒度粗糙集的上、下近似满足单调性、可加性、可乘性和对偶性,同理可证第2型、第3型、第4型悲观多粒度粗糙. 为了便于观察,给出表1和表2所示的性质表.其中的y表示具有该性质,n表示不具有该性质. 通过分析表1可知,第1型悲观多粒度粗糙集的下近似具有性质1中的(L1)～(L7).

表1 悲观多粒度粗糙集的下近似性质表

	$\underline{\mathrm{FR}}^P$	$\underline{\mathrm{SR}}^P$	$\underline{\mathrm{TR}}^P$	$\underline{\mathrm{LR}}^P$
L1	y	y	y	y
L2	y	y	y	y
L3	y	y	y	y
L4	y	y	y	y
L5	y	y	y	y
L6	y	y	y	y
L7	y	y	y	y

表2 悲观多粒度粗糙集上近似性质表

	$\overline{\mathrm{FR}}^P$	$\overline{\mathrm{SR}}^P$	$\overline{\mathrm{TR}}^P$	$\overline{\mathrm{LR}}^P$
L1	y	y	y	y
L2	y	y	y	y
L3	y	y	y	y
L4	y	y	y	y
L5	y	y	y	y
L6	y	y	y	y
L7	y	y	y	y

通过分析表2可知,第1型悲观多粒度粗糙集的上近似具有性质1中的(U1)～(U7).

由表1和表2可知,通过极大和极小描述获取的覆盖多粒度粗糙集具有经典粗糙集的基本性质,从而说明给出的覆盖多粒度粗糙集模型对经典的粗糙集模型拥有良好的继承性.

3 覆盖多粒度粗糙集的数值特征

首先,基于特例,探讨基于极大描述和极小描述所获得的多粒度粗糙集是否存在与其对应的信任结构;然后,进一步总结得出其具有信任结构的充分条件;最后,给出mass函数的具体表达式.

定理1 令 (C,U) 为覆盖多粒度近似空间,其中 C 为覆盖簇,$C=(C_1,C_2,\cdots,C_m)$,m 为自然数,且 $C_i=(k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in})$,$i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意 $X\subseteq U$,若 $C_1\leqslant C_2\leqslant\cdots\leqslant C_m$ 彼此细分,则第1型悲观多粒度粗糙集模型(FR^P)的信任函数为 $\mathrm{Bel}(X)=\dfrac{|\underline{\mathrm{FR}}_{C_m}^{P}(X)|}{|U|}$,似然函数为

$$\mathrm{Pl}(X)=\frac{|\overline{\mathrm{FR}}_{C_m}^{P}(X)|}{|U|}.$$

证明 当 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 彼此细分时,可得

$$\underline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)=\underline{\mathrm{FR}}_{C_m}^{P}(X),$$
$$\overline{\mathrm{FR}}_{\mathrm{sum}}^{P}(X)=\overline{\mathrm{FR}}_{C_m}^{P}(X).$$

此时,第1型悲观多粒度粗糙集模型(FR^P)退化为经典覆盖粗糙集,从而可知信任函数为 $\mathrm{Bel}(X)=\dfrac{|\underline{\mathrm{FR}}_{C_m}^{P}(X)|}{|U|}$,似然函数为

$$\mathrm{Pl}(X)=\frac{|\overline{\mathrm{FR}^{P}_{C_m}}(X)|}{|U|}.\qquad\square$$

定理1说明,当覆盖多粒度近似空间彼此细分时,第1型悲观多粒度粗糙集模型(FR^P)存在与其对应的信任结构.

定理2 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=(C_1,C_2,\cdots,C_m)$,m为自然数,且$C_i=(k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}),i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意$X\subseteq U$,若$C_1\leqslant C_2\leqslant\cdots\leqslant C_m$彼此细分,则第1型乐观多粒度粗糙集模型($\mathrm{FR}^p$)的信任函数为$\mathrm{Bel}(X)=\dfrac{|\underline{\mathrm{FR}^{O}_{C_1}}(X)|}{|U|}$,似然函数为

$$\mathrm{Pl}(X)=\frac{|\overline{\mathrm{FR}^{O}_{C_1}}(X)|}{|U|}.$$

证明 当$C_1,C_2,\cdots,C_m$彼此细分时,可得

$$\underline{\mathrm{FR}^{O}_{\mathrm{sum}}}(X)=\underline{\mathrm{FR}^{O}_{C_1}}(X),$$
$$\overline{\mathrm{FR}^{O}_{\mathrm{sum}}}(X)=\overline{\mathrm{FR}^{O}_{C_1}}(X).$$

此时,第1型乐观多粒度粗糙集(FR^O)退化为单粒的覆盖粗糙集,可得信任函数为$\mathrm{Bel}X)=\dfrac{|\underline{\mathrm{FR}^{O}_{C_1}}(X)|}{|U|}$,似然函数为

$$\mathrm{Pl}(X)=\frac{|\overline{\mathrm{FR}^{O}_{C_1}}(X)|}{|U|}.\qquad\square$$

定理2表明,当覆盖多粒度近似空间彼此细分时,第1型乐观多粒度粗糙集(FR^O)存在与其对应的信任结构. 然而,实际应用发现,覆盖多粒度近似空间的簇彼此间往往不存在细分关系. 下面将分析一般情形下覆盖多粒度粗糙集模型的信任结构.

定理3 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=(C_1,C_2,\cdots,C_m)$,m为自然数,且$C_i=(k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}),i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意$X\subseteq U$,若第1型悲观多粒度粗糙集($\mathrm{FR}^P$)的上、下近似满足如下条件:

1) $\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X\bigcap Y)=\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X)\bigcap\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(Y)$,
$\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X\bigcup Y)\supseteq\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X)\bigcup\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(Y)$;

2) $\overline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X\bigcup Y)=\overline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X)\bigcup\overline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(Y)$,
$\overline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X\bigcap Y)\subseteq\overline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X)\bigcap\overline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(Y)$.

则信任函数为$\mathrm{Bel}(X)=\dfrac{|\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X)|}{|U|}$,似然函数为

$$\mathrm{Pl}(X)=\frac{|\overline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X)|}{|U|}.$$

证明 由信任函数的定义12可知

$$\frac{|\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(\phi)|}{|U|}=0,\ \frac{|\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(U)|}{|U|}=1.$$

若第1型悲观多粒度粗糙集(FR^P)的上近似满足条件1),则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Bel}(\bigcup_{t=1}^{s}X_t)=\\&\frac{|\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(\bigcup_{t=1}^{s}X_t)|}{|U|}\geqslant\frac{|\bigcup_{t=1}^{s}\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X_t)|}{|U|}=\\&\sum_{\phi\neq I\subseteq\{1,2,\cdots,t\}}(-1)^{|I|+1}\frac{|\bigcap_{j\in I}\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X_j)|}{|U|}=\\&\sum_{\phi\neq I\subseteq\{1,2,\cdots,t\}}(-1)^{|I|+1}\frac{|\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(\bigcap_{j\in I}X_j)|}{|U|}=\\&\sum_{\phi\neq I\subseteq\{1,2,\cdots,t\}}(-1)^{|I|+1}\mathrm{Bel}(\bigcap_{j\in I}X_j).\end{aligned}$$

可知信任函数为

$$\mathrm{Bel}(X)=\frac{|\underline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X)|}{|U|}.$$

同理可证,当第1型悲观多粒度粗糙集(FR^P)的下近似满足条件2)时,似然函数为

$$\mathrm{Pl}(X)=\frac{|\overline{\mathrm{FR}^{P}_{\mathrm{sum}}}(X)|}{|U|}.\qquad\square$$

定理3给出第1型悲观多粒度粗糙集具有信任结构的充分条件,即上、下近似满足对偶、可加性和可乘性. 结合文献[25]的表1可知,在一般情形下,基于极小和极大描述所获得的4种乐观多粒度粗糙集不存在与其对应的信任结构. 下面将给出基本可信度分配函数的表达式.

定理4 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=(C_1,C_2,\cdots,C_m)$,m为自然数,且$C_i=(k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}),i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意$X\subseteq U$,若$C_1\leqslant C_2\leqslant\cdots\leqslant C_m$彼此细分,则此时第1型悲观多粒度粗糙集($\mathrm{FR}^P$)的mass函数表达式为

$$m(X)=\begin{cases}\dfrac{|\{x\in U|\bigcap\mathrm{md}_{C_m}(x)=X\}|}{|U|};\\0,\ \text{others}.\end{cases}\tag{1}$$

证明 由定义10可知,只需要证明式(1)满足如下条件:

$$m(\phi)=0,\ \sum_{X\subseteq U}m(X)=1.$$

由式(1)可知

$$m(\phi)=0,$$
$$\sum_{X\subseteq U}m(X)=\sum_{X\subseteq U}\frac{|\{x\in U|\bigcap\mathrm{md}_{C_m}(x)=X\}|}{|U|}=$$
$$\sum_{x\in U}\frac{1}{|U|}=1.\qquad\square$$

定理5 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=(C_1,C_2,\cdots,C_m)$,m为自然数,且$C_i=(k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in}),i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 对于任意$X\subseteq U$,若$C_1\leqslant C_2\leqslant\cdots\leqslant C_m$彼此细分,则此时第

1型乐观多粒度粗糙集(FR^O)的mass函数表达式为

$$m(X)=\begin{cases}\dfrac{|\{x\in U|\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x)=X\}|}{|U|};\\ 0,\ \text{others}.\end{cases}\tag{2}$$

证明 由定义10可知,只需要证明式(2)满足如下条件:

$$m(\phi)=0,\ \sum_{X\subseteq U}m(X)=1.$$

由式(2)可知

$$m(\phi)=0,$$

$$\sum_{X\subseteq U}m(X)=\sum_{X\subseteq U}\frac{|\{x\in U|\bigcap \mathrm{md}_{C_1}(x)=X\}|}{|U|}=$$

$$\sum_{x\in U}\frac{1}{|U|}=1.$$ □

定理4和定理5表明,当覆盖多粒度近似空间彼此细分时,悲观多粒度粗糙集和乐观多粒度粗糙集的mass函数存在,为式(1)和(2). 在一般情形下,由定义13的莫比乌斯变换,可得第1型悲观多粒度粗糙集模型(FR^P)的mass函数. 下面将通过算例说明定理4和定理5.

例2 令(C,U)为覆盖多粒度近似空间,其中C为覆盖簇,$C=\{C_1,C_2\}$. 论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,有

$$C_1=\{\{x_1,x_2\},\{x_3\},\{x_4\}\},$$
$$C_2=\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2,x_3\},\{x_4\}\},$$
$$X=\{x_1,x_2,x_4\}.$$

由定义5可得C_1和C_2关于x的极小描述和极大描述:

$$C_1:\mathrm{md}_{C_1}(x_1)=\mathrm{MD}_{C_1}(x_1)=\{\{x_1,x_2\}\};$$
$$\mathrm{md}_{C_1}(x_2)=\mathrm{MD}_{C_1}(x_2)=\{\{x_1,x_2\}\};$$
$$\mathrm{md}_{C_1}(x_3)=\mathrm{MD}_{C_1}(x_3)=\{\{x_3\}\};$$
$$\mathrm{md}_{C_1}(x_4)=\mathrm{MD}_{C_1}(x_4)=\{\{x_4\}\}.$$
$$C_2:\mathrm{md}_{C_2}(x_1)=\{\{x_1,x_2\}\},$$
$$\mathrm{MD}_{C_2}(x_1)=\{\{x_1,x_2,x_3\}\};$$
$$\mathrm{md}_{C_2}(x_2)=\{\{x_1,x_2\}\},$$
$$\mathrm{MD}_{C_2}(x_2)=\{\{x_1,x_2,x_3\}\};$$
$$\mathrm{md}_{C_2}(x_3)=\{\{x_1,x_2,x_3\}\},$$
$$\mathrm{MD}_{C_2}(x_3)=\{\{x_1,x_2,x_3\}\};$$
$$\mathrm{md}_{C_2}(x_4)=\{\{x_4\}\},$$
$$\mathrm{MD}_{C_2}(x_4)=\{\{x_4\}\}.$$

由定义14可得,第1型悲观多粒度粗糙集FR^P的上、下近似为

$$\underline{\mathrm{FR}}^P_{\mathrm{sum}}(X)=\{x_1,x_2,x_4\},$$
$$\overline{\mathrm{FR}}^P_{\mathrm{sum}}(X)=U.$$

由细分的定义7可知C_1细分C_2,即$C_1\leqslant C_2$,可得

$$\underline{\mathrm{FR}}^P_{C_2}(X)=\{x_1,x_2,x_4\},\ \overline{\mathrm{FR}}^P_{C_2}(X)=U,$$

故可知

$$\underline{\mathrm{FR}}^P_{\mathrm{sum}}(X)=\underline{\mathrm{FR}}^P_{C_2}(X),$$
$$\overline{\mathrm{FR}}^P_{\mathrm{sum}}(X)=\overline{\mathrm{FR}}^P_{C_2}(X).$$

又由定理1可得,悲观多粒度粗糙集的mass函数m为

$$m^p(\{x_1,x_2\})=\frac{2}{4},\ m^p(\{x_1,x_2,x_3\})=\frac{1}{4},$$
$$m^p(\{x_4\})=\frac{1}{4}.$$

根据文献[25]中的定义7可得,第1型乐观多粒度粗糙集FR^O的上、下近似为

$$\underline{\mathrm{FR}}^O_{\mathrm{sum}}(X)=\{x_1,x_2,x_4\},$$
$$\overline{\mathrm{FR}}^O_{\mathrm{sum}}(X)=\{x_1,x_2,x_4\}.$$

由细分的定义7可知C_1细分C_2,即$C_1\leqslant C_2$. 可得

$$\underline{\mathrm{FR}}^O_{C_1}(X)=\{x_1,x_2,x_4\},$$
$$\overline{\mathrm{FR}}^O_{C_1}(X)=\{x_1,x_2,x_4\},$$

故可知

$$\underline{\mathrm{FR}}^O_{\mathrm{sum}}(X)=\underline{\mathrm{FR}}^O_{C_1}(X),$$
$$\overline{\mathrm{FR}}^O_{\mathrm{sum}}(X)=\overline{\mathrm{FR}}^O_{C_1}(X).$$

由定理2可得,乐观多粒度粗糙集mass函数为

$$m^O(\{x_1,x_2\})=\frac{2}{4},\ m^O(\{x_3\})=m^O(\{x_4\})=\frac{1}{4}.$$

根据莫比乌斯变换可得,第1型悲观多粒度粗糙集的mass函数,记为m,仅举例计算其中一个焦元$\{x_1,x_2,x_3\}$,即

$$m(\{x_1,x_2,x_3\})=$$
$$\sum_{A\subseteq X}(-1)^{|X|-|A|}\mathrm{Bel}(A)=$$
$$\mathrm{Bel}(\{x_1\})+\mathrm{Bel}(\{x_2\})+\mathrm{Bel}(\{x_3\})-$$
$$(\mathrm{Bel}(\{x_1,x_2\})+\mathrm{Bel}(\{x_1,x_3\})+$$
$$\mathrm{Bel}(\{x_2,x_3\}))+\mathrm{Bel}(\{x_1,x_2,x_3\}).$$

由定义11可得,信任函数为

$$\mathrm{Bel}(\{x_1\})=\mathrm{Bel}(\{x_2\})=$$
$$\mathrm{Bel}(\{x_3\})=\mathrm{Bel}(\{x_1,x_3\})=\mathrm{Bel}(\{x_2,x_3\}),$$
$$\mathrm{Bel}(\{x_1,x_2\})=\frac{2}{4},\mathrm{Bel}(\{x_1,x_2,x_3\})=\frac{3}{4}.$$

故可知$m(\{x_1,x_2,x_3\})$值为

$$m(\{x_1,x_2,x_3\})=$$

$$\sum_{A\subseteq X}(-1)^{|X|-|A|}\mathrm{Bel}(A)=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}.$$

同理,可计算其他焦元的mass函数值.

4 结 论

由于严格的等价关系,经典多粒度粗糙集无法很好地应用于实际.本文通过极大描述和极小描述所获取的覆盖多粒度粗糙集,可以更好地应用于实际.当极小描述(极大描述)为个体本身时,覆盖多粒度粗糙集退化为经典多粒度粗糙集;随后探讨覆盖多粒度粗糙集的基本性质;最后结合证据理论,分析覆盖多粒度粗糙集的证据结构,并给出其具有信任结构的充分条件和mass函数的具体表达式,从而使覆盖多粒度粗糙集可以应用于证据合成,进一步拓展其应用范围.通过上述研究,为多粒度粗糙集的应用和研究提供了新的思路和方法.

参考文献(References)

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. Int J of Parallel Programming, 1982, 11(5): 341-356.

[2] Pawlak Z. Rough set theory and its applications to data analysis[J]. Cybernetics & Systems, 1998, 29(7): 661-688.

[3] Zakowski W. Approximations in the space (u,π)[J]. Demonstratio Mathematica, 1983, 16(3): 761-769.

[4] Yao Y, Yao B. Covering based rough set approximations[J]. Information Sciences, 2012, 200(1): 91-107.

[5] Kong Q, Xu W. The comparative study of covering rough sets and multi-granulation rough sets[J]. Soft Computing, 2018, 16(1): 1-15.

[6] D'eer L, Cornelis C, Yao Y. A semantically sound approach to Pawlak rough sets and covering-based rough sets[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2016, 78(1): 62-72.

[7] D'eer L, Restrepo M, Cornelis C, et al. Neighborhood operators for covering-based rough sets[J]. Information Sciences, 2016, 336(1): 21-44.

[8] Yao Y. Perspectives of granular computing[C]. 2005 IEEE Int Conf on Granular Computing. Beijing: IEEE, 2005, 1: 85-90.

[9] Xu Ji, Wang GuoYin, Yu Hong. Review of big data processing based on granular computing[J]. Chinese J of Computers, 2015(8): 1497-1517.

[10] Wilke G, Portmann E. Granular computing as a basis of human–data interaction: A cognitive cities use case[J]. Granular Computing, 2016, 1(3): 181-197.

[11] Yao Y. A triarchic theory of granular computing[J]. Granular Computing, 2016, 1(2): 145-157.

[12] Qian Y, Liang J, Yao Y, et al. MGRS: A multi-granulation rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180(6): 949-970.

[13] Qian Y H, Liang J Y. Rough set method based on multi-granulations[C]. The 5th IEEE Int Conf on Cognitive Informatics. California: IEEE, 2006, 1: 297-304.

[14] Qian Y, Liang J, Dang C. Incomplete multi-granulation rough set[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics — Part A: Systems and Humans, 2010, 40(2): 420-431.

[15] Xu W, Sun W, Zhang X, et al. Multiple granulation rough set approach to ordered information systems[J]. Int J of General Systems, 2012, 41(5): 475-501.

[16] Xu W H, Zhang W X. Measuring roughness of generalized rough sets induced by a covering[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(22): 2443-2455.

[17] Xu W, Wang Q, Zhang X. Multi-granulation rough sets based on tolerance relations[J]. Soft Computing, 2013, 17(7): 1241-1252.

[18] Shafer G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton university press, 1976: 1-47.

[19] Yao Y Y, Lingras P J. Interpretations of belief functions in the theory of rough sets[J]. Information Sciences, 1998, 104(1): 81-106.

[20] Chen D, Zhang X, Li W. On measurements of covering rough sets based on granules and evidence theory[J]. Information Sciences, 2015, 317(1): 329-348.

[21] Wang J, Hu Y, Xiao F, et al. A novel method to use fuzzy soft sets in decision making based on ambiguity measure and Dempster–Shafer theory of evidence: An application in medical diagnosis[J]. Artificial Intelligence in Medicine, 2016, 69(1): 1-11.

[22] Chen D, Li W, Zhang X, et al. Evidence-theory-based numerical algorithms of attribute reduction with neighborhood-covering rough sets[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2014, 55(3): 908-923.

[23] Lin G, Liang J, Qian Y. An information fusion approach by combining multi-granulation rough sets and evidence theory[J]. Information Sciences, 2015, 314(1): 184-199.

[24] Tan A, Wu W, Li J, et al. Evidence-theory-based numerical characterization of multi-granulation rough sets in incomplete information systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 294(1): 18-35.

[25] Liu C, Miao D, Qian J. On multi-granulation covering rough sets[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2014, 55(6): 1404-1418.

作者简介

王加阳(1963–), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能计算、信息融合等研究, E-mail: 1071630190@qq.com;

帅勇(1993–), 男, 硕士生, 从事智能信息处理与粒计算的研究, E-mail: 13874954950@163.com;

张炜(1993–), 男, 硕士生, 从事智能信息处理与粒计算的研究, E-mail: 966295768@qq.com.

(责任编辑:孙艺红)