

# 控制与决策

Control and Decision

一种基于LPV系统的 $H_\infty$ 切换控制器设计方法

吴伟林, 谢巍, 何伟, 张浪文

引用本文:

吴伟林, 谢巍, 何伟, 等. 一种基于LPV系统的 $H_\infty$ 切换控制器设计方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(3): 622–628.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0845>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于弹性能量函数的非线性不确定系统控制方法](#)

Nonlinear uncertain system control method based on elastic energy function

控制与决策. 2019, 34(6): 1247–1252 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1545>

[时滞仿射线性参数变量系统的有记忆 \$H\_\infty\$ 状态反馈控制](#)

Memory state feedback  $H_\infty$  control for affine linear parameter variable systems with time delay

控制与决策. 2019, 34(4): 709–717 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1294>

[带有不确定性的多电机卷绕系统的分散最优保性能控制](#)

Decentralized optimal guaranteed cost control for multi-motor winding system with uncertainties

控制与决策. 2019, 34(3): 487–494 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1128>

[基于有限时间的一类时滞非线性切换系统滑模控制](#)

Finite-time sliding mode control for a class of nonlinear and time-delayed switched systems

控制与决策. 2019, 34(3): 655–660 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1283>

[基于IMC原理的电子节气门控制策略](#)

Electronic throttle control strategy based on IMC principle

控制与决策. 2018, 33(12): 2277–2282 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.0820>

[一种多变量预测控制的分程控制策略实现方法](#)

An implementation of split control strategy for multi-variable predictive control

控制与决策. 2017, 32(4): 746–750 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0040>

[基于NDO的ROV变深自适应终端滑模控制器设计](#)

Design of adaptive terminal sliding mode controller based on nonlinear disturbance observer for ROV depth changing

控制与决策. 2016(2): 373–377 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1792>

[线性自抗扰控制参数 \$b\_0\$ 辨识及参数整定规律](#)

Parameter identification of  $b_0$  and parameter tuning law in linear active disturbance rejection control

控制与决策. 2015(9): 1691–1695 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0943>

# 一种基于 LPV 系统的 $H_\infty$ 切换控制器设计方法

吴伟林, 谢巍<sup>†</sup>, 何伟, 张浪文

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640)

**摘要:** 针对线性参数变化 (LPV) 系统提出一种切换控制器参数化设计方法. 基于 Youla 参数化思想, 将控制器设计过程分解为两个步骤. 首先, 设计一个中心控制器保证闭环系统的全局  $H_\infty$  性能; 其次, 将参数变化区域划分为若干个子区域, 在每个子区域中将中心控制器进行线性分式变换, 得到切换控制器自由参数的状态空间实现, 将切换控制器转换为自由参数之间的切换. 基于所提出的切换 LPV 控制器线性分式变换实现方法, 不仅可以保证在任意切换的情况下子系统各自局部的  $H_\infty$  性能, 而且可以保证整个闭环系统满足某一整体的  $H_\infty$  性能, 并通过仿真结果验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 切换控制; 任意切换;  $H_\infty$  性能实现; 参数化

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## A method for designing $H_\infty$ switching controller based on LPV system

WU Wei-lin, XIE Wei<sup>†</sup>, HE Wei, ZHANG Lang-wen

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** A parameterized design method for switching controllers is proposed for linear parameter-varying (LPV) systems. Based on the Youla parameterization ideas, the switching controller design process is decomposed into two steps. Firstly, a central controller is designed to guarantee the global  $H_\infty$  performance of the closed-loop system. Then, the parameter variation set is divided into several subsets, in each subset, the center controller performs the linear fractional transformation to obtain the state space realization of the free parameters of the switching controller, and the switching controller is converted into switching the free parameter. Based on the implementation of the linear fractional transformation method of the switched LPV controller proposed in this paper, it can not only guarantee the corresponding  $H_\infty$  performance of the local subsystem under arbitrary switching, but also guarantee the closed-loop system to satisfy the  $H_\infty$  performance. The simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** switching control; arbitrary switching;  $H_\infty$  performance realization; parameterization

## 0 引 言

线性参数变化 (linear parameter varying, LPV) 系统是一类重要的时变系统, 其状态空间矩阵依赖于一组预先未知的但实时可测的时变参数<sup>[1]</sup>. 近年来, 人们针对 LPV 系统的分析和控制器设计报道了大量的研究成果<sup>[2-4]</sup>, 传统的 LPV 控制器设计通常使用单个 LPV 控制器稳定被控对象. 但是, 当 LPV 对象的参数变化范围很大时, 单个 LPV 控制器通常会导致较为保守的控制性能, 或者使寻找稳定 LPV 控制器变得难以实现.

为了解决保守性或不可行性问题, Lim<sup>[5]</sup> 将切

换线性时不变 (LTI) 系统推广到切换 LPV 系统上, 提出了一种切换 LPV 控制器的方法, 并已成功应用到各工程领域中<sup>[6-8]</sup>; Lu 等<sup>[9-10]</sup> 基于参数依赖多 Lyapunov 函数方法, 研究了 LPV 系统的切换控制, 给出了滞后切换和平均驻留时间切换两种切换律下保证系统稳定和鲁棒性能的控制器的设计方法, 并分别采用主动磁浮轴承模型和 F-16 飞机模型进行了仿真验证; 李艳辉等<sup>[11]</sup> 利用同样的思想设计了切换 LPV 系统的多参数依赖鲁棒  $H_\infty$  滤波器, 降低了设计的保守性; Zhao 等<sup>[12]</sup> 在调度参数不确定的情况下, 设计了一种具有  $L_2$  增益性能的输出反馈切换 LPV 控制器. 虽

收稿日期: 2018-06-20; 修回日期: 2018-10-08.

基金项目: 广东省引进创新创业团队计划项目 (2016YT03G125); 江门市创新科研团队引进项目 (2017TD03); 广东省科技计划项目 (2017B090914001, 2017A040405023, 2017A040403064, 2017B090901040, 2017B030306017); 广东省自然科学基金项目 (2017A030313385); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (2017BQ098).

责任编辑: 虞文武.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: weixie@scut.edu.cn.

然这些方法更强调系统的局部性能,但设计仍然需要一个全局稳定性条件约束,这便限制了系统所能达到的最佳性能. Bianchi等<sup>[13]</sup>提出了一种基于Youla参数化的切换LPV控制器的设计方法,同时考虑了全局稳定性和局部性能. 尽管有上述研究成果,但还没有关于切换LPV控制器Youla参数化的设计报道,在任意切换下同时考虑整个闭环系统和局部子系统都满足 $H_\infty$ 性能.

本文在Bianchi等<sup>[13]</sup>的启发下,提出一种切换LPV控制器参数化的方法. 根据Youla参数化的分离定理<sup>[14]</sup>,将切换控制器的设计分为2个步骤:第1步是利用Riccati不等式求解中心控制器保证全局的 $H_\infty$ 性能;第2步是通过线性分式变换得到中心控制器自由参数的状态空间实现 $Q(\theta)$ ,将切换控制器转换为自由参数之间的切换,这些自由参数根据时变参数的不同区域而设计. 因此,基于本文提出的切换LPV控制器参数化实现方法,不仅可以保证在任意切换的情况下子系统各自局部的 $H_\infty$ 性能,而且可以保证整个闭环系统满足某一整体的 $H_\infty$ 性能<sup>[15]</sup>.

### 1 问题描述

考虑一个开环LPV系统,状态空间方程描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B_1(\theta) & B_2(\theta) \\ C_1(\theta) & D_{11}(\theta) & D_{12}(\theta) \\ C_2(\theta) & D_{21}(\theta) & D_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad \forall \theta \in \Omega. \quad (1)$$

其中: $\theta := [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s]^T$ 为时变参数且在线可测的向量, $x \in \mathbf{R}$ 为系统状态向量, $w \in \mathbf{R}$ 为外部扰动, $u \in \mathbf{R}$ 为控制输入, $z \in \mathbf{R}$ 为控制输出, $y \in \mathbf{R}$ 为测量输出.

若系统(1)的系统矩阵用 $S(\theta)$ 表示,则表明其是参数 $\theta$ 的连续和有界函数且可实时测量,可以在以下给定的矩阵多胞模型中取值,即

$$S(\theta) \in \text{Co}\{S_1, S_2, \dots, S_r\} = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i S_i, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^r a_i = 1 \right\}.$$

其中: $S_1, S_2, \dots, S_r$ 为已知矩阵, $r$ 为顶点数量. 则系统(1)称为多胞LPV系统.

**定义1**  $H_\infty$ 范数是在 $\text{Re}(s) > 0$ 上解析并有界,并且满足等式 $\|F(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re}>0} \bar{\sigma}\{F(s)\} = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \{\bar{\sigma}_{\max}\{F(j\omega)\}\}$ 的所有正则、实有理函数矩阵 $F(s)$ 所构成的空间.

稳定的实有理传递函数矩阵 $G(s)$ 的 $H_\infty$ 范数可

表示为

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \sigma_{\max}[G(j\omega)].$$

**假设1**<sup>[16]</sup>

1)  $(A(\theta), B_2)$ 和 $(A(\theta), C_2)$ 二次稳定和二次可检测.

2) 对于所有的 $j \in Z$ ,有 $B_2(\theta), C_2(\theta), D_{12}(\theta), D_{21}(\theta)$ 不依赖于参数 $\theta$ ,即 $B_{2,j} = B_2, C_{2,j} = C_2, D_{12,j} = D_{12}, D_{21,j} = D_{21}$ .

3) 当 $D_{22}(\theta) = 0$ 时,有 $D_{22,j} = 0, j \in Z$ .

如果系统满足假设1,则可以利用多胞系统的顶点性质和有界实定理设计控制器<sup>[17]</sup>.

假设存在一组切换控制器 $K_i(\theta)$ ,能够使得被控对象(1)分别满足相应的 $H_\infty$ 增益性能. 每个控制器的状态空间实现 $K_i(\theta)$ 给定如下:

$$K_i(\theta) = \begin{cases} \dot{x}_k = A_{k,i}(\theta)x_k + B_{k,i}(\theta)y, \\ u = C_{k,i}(\theta)x_k + D_{k,i}(\theta)y. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x_k \in \mathbf{R}; i = i(t) \in \tau = \{1, 2, \dots, n\}, n$ 为子系统数量.

根据有界实定理,在分区域内顶点控制器的状态空间实现为 $A_{k,i,j} B_{k,i,j} C_{k,i,j} D_{k,i,j}$ ,子区域控制器的状态空间表达式是

$$\begin{bmatrix} A_{k,i}(\theta) & B_{k,i}(\theta) \\ C_{k,i}(\theta) & D_{k,i}(\theta) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) \begin{bmatrix} A_{k,i,j} & B_{k,i,j} \\ C_{k,i,j} & D_{k,i,j} \end{bmatrix}.$$

结合系统(1)和控制器(2),可以得到闭环系统表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{cl} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl,i}(\theta) & B_{cl,i}(\theta) \\ C_{cl,i}(\theta) & D_{cl,i}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ w \end{bmatrix}, \quad \theta \in \Omega_i.$$

每个控制器仅在各自的子区域 $\Omega_i$ 中有效. 当调度参数 $\theta$ 穿过切换面 $S_{pq}$ 时,进行控制器切换,在切换LPV控制下,闭环系统变成了切换LPV系统,如图1所示,并描述为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{cl,\sigma}(\theta)\xi + B_{cl,\sigma}(\theta)w, \\ z &= C_{cl,\sigma}(\theta)\xi + D_{cl,\sigma}(\theta)w. \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $\xi \in \mathbf{R}$ 为状态向量, $w \in \mathbf{R}$ 为外部扰动, $z \in \mathbf{R}$ 为控制输出. 当假设1满足时,系统矩阵可以描述为

$$A_{cl,\sigma} = \begin{bmatrix} A(\theta) + B_2 D_{k,\sigma}(\theta) C_2 & B_2 C_{k,\sigma}(\theta) \\ B_{k,\sigma}(\theta) C_2 & A_{k,\sigma}(\theta) \end{bmatrix},$$

$$B_{cl,\sigma} = \begin{bmatrix} B_1(\theta) + B_2 D_{k,\sigma}(\theta) D_{21} \\ B_{k,\sigma}(\theta) D_{21} \end{bmatrix},$$

$$C_{cl,\sigma} = [C_1(\theta) + D_{12} D_{k,\sigma}(\theta) C_2 \quad D_{12} C_{k,\sigma}(\theta)],$$

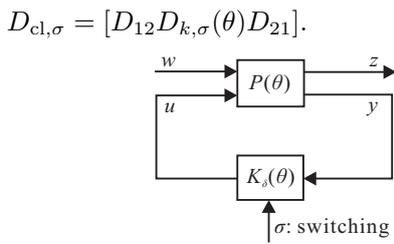


图1 切换LPV控制系统

**引理1**<sup>[17]</sup> 如图1所示,每个 $\sigma$ 对应的闭环系统都满足相应的 $H_\infty$ 性能 $\gamma_\sigma$ ,当且仅当存在正定对称矩阵 $X_\sigma > 0$ 满足如下不等式:

$$\begin{bmatrix} A_{cl,\sigma}^T(\theta)X_\sigma + X_\sigma A_{cl,\sigma}(\theta) & X_\sigma B_{cl,\sigma}(\theta) & C_{cl,\sigma}^T(\theta) \\ B_{cl,\sigma}^T(\theta)X_\sigma & -\gamma_\sigma I & D_{cl,\sigma}^T(\theta) \\ C_{cl,\sigma}(\theta) & D_{cl,\sigma}(\theta) & -\gamma_\sigma I \end{bmatrix} < 0, \tag{4}$$

其中 $\sigma \in \tau = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**注1** 每个 $\sigma$ 对应的控制器都有不同的李雅普诺夫函数.

本文的控制器设计问题概述如下.

**问题1** 给定一个LPV对象表达式如式(1)所示,并给定一组预先且独立设计的满足 $H_\infty$ 性能的控制器的 $K_i(\theta)$ ,在什么条件下,存在控制器 $K_i(\theta)$ 自由参数的状态空间实现,使得在任意切换时,不仅可以保证切换子系统各自局部的 $H_\infty$ 控制性能 $\gamma_i$ ,而且可以保证整个闭环系统满足某一整体的 $H_\infty$ 性能 $\gamma = \max(\gamma_i)$ .

## 2 LPV控制器参数化

**引理2**<sup>[18]</sup> 对于线性参数变化系统(1),如果满足假设1,则可以找到一个容许的控制器 $K(\theta)$ ,保证 $H_\infty$ 性能准则 $\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2$ ,当且仅当存在对称非负正定矩阵 $X$ 和 $Y$ 满足如下Riccati不等式:

$$\begin{aligned} \psi(X) &:= A^T(\theta)X + XA(\theta) + C_1^T(\theta)C_1(\theta) + \\ &X(\gamma^{-2}B_1(\theta)B_1^T(\theta) - B_2B_2^T)X < 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \psi(Y) &:= A_{tmp}(\theta)Y + YA_{tmp}^T(\theta) + B_1(\theta)B_1^T(\theta) + \\ &Y(\gamma^{-2}XB_2B_2^TX - C_2^TC_2)Y < 0, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $A_{tmp} = A(\theta) + \gamma^{-2}B_1(\theta)B_1^T(\theta)X$ .

利用Schur补引理可知,Riccati不等式(5)和(6)可以转换为线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \bar{X}A^T(\theta) + A(\theta)\bar{X} - B_2B_2^T & \bar{X}C_1^T(\theta) & B_1(\theta) \\ C_1(\theta)\bar{X} & -I & 0 \\ B_1^T(\theta) & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}A_{tmp}(\theta) + A_{tmp}^T(\theta)\bar{Y} - C_2^TC_2 & \bar{Y}B_1(\theta) & XB_2 \\ B_1^T(\theta)\bar{Y} & -I & 0 \\ B_2^TX & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

其中: $\bar{X} = X^{-1}, \bar{Y} = Y^{-1}$ .

求解LMI可以得到中心控制器的结构

$$K_{sub}(\theta) = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}(\theta) + \hat{B}_2F + LC_2 & -L \\ \hline F & 0 \end{array} \right]. \tag{9}$$

其中: $\hat{A}(\theta) = A_{tmp}(\theta) + \gamma^{-2}YXB_2B_2^TX, \hat{B}_2 = B_2 + \gamma^{-2}YXB_2, L = -YC_2, F = -B_2^TX$ .

详细的推导可以参考文献[19].

**引理3** 如果满足引理2的条件,则该组可容许控制器满足 $H_\infty$ 性能准则 $\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2$ ,对于所有的 $\theta$ ,容许控制器可被参数化为如图2所示的从 $y$ 到 $u$ 的状态空间矩阵的集合,其中 $Q(\theta) \in RH_\infty$ 且具有 $H_\infty$ 性能 $\gamma$ .

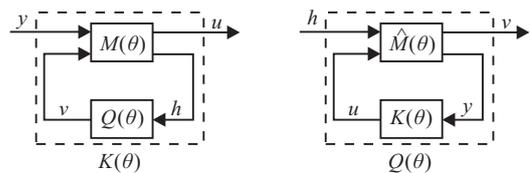


图2  $K = F_l(M, Q)$ 和 $Q = F_l(\hat{M}, K)$

在图2中,  $\hat{M} = \left[ \begin{array}{c|cc} \hat{A}(\theta) & -L & \hat{B}_2 \\ \hline -F & 0 & I \\ C_2 & I & 0 \end{array} \right]$ .

**注2** 由于自由参数 $Q(\theta)$ 增加了控制系统的可调参数,任何稳定控制器 $K(\theta)$ 都可以用一个稳定的 $Q(\theta)$ 表示 $K(\theta) = F_l(M(\theta), Q(\theta))$ .

考虑函数 $Q(\theta) = F_l(\hat{M}(\theta), K(\theta))$ 如图2所示,将函数 $Q(\theta)$ 代入到 $F_l(\hat{M}(\theta), K(\theta))$ ,可以得到

$$F_l(M(\theta), Q(\theta)) = F_l(M(\theta), F_l(\hat{M}(\theta), K(\theta))) = F_l(J_{tmp}(\theta), K(\theta)),$$

其中 $J_{tmp}$ 的状态空间表达式为

$$J_{tmp} = \left[ \begin{array}{cc|cc} A(\theta) + B_2F + LC_2 & -B_2 & -L & B_2 \\ LC_2 & A(\theta) & -L & B_2 \\ \hline F & -F & 0 & I \\ -C_2 & C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

给定一个相似变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

对 $J_{tmp}$ 进行相似变换后,消除了不可控制和不可观测的部分,可以得到

$$J_{\text{tmp}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

由此,推导出了控制器与自由参数的关系表达式

$$F_l(M(\theta), Q(\theta)) = F_l(J_{\text{tmp}}(\theta), K(\theta)) = K(\theta).$$

### 3 切换LPV控制器设计

基于Youla参数化思想,本文提出一种切换自由参数的方法,控制系统结构如图3所示.

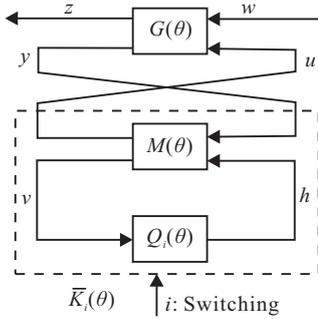


图3 切换LPV控制结构

在图3中:

$$M(\theta) \begin{cases} \dot{x}_M = (A(\theta) + B_2F + LC_2)x_M - Ly + B_2v, \\ u = Fx_M + v, \\ h = -C_2x_M + y, \end{cases}$$

并且有

$$Q_i(\theta) \begin{cases} \dot{x}_Q = A_{Q,i}(\theta)x_Q + B_{Q,i}(\theta)h, \\ v = C_{Q,i}(\theta)x_Q + D_{Q,i}(\theta)h, \end{cases}$$

且 $Q_i(\theta)$ 是任意稳定的切换系统.

本文提出的控制结构和切换系统 $Q(\theta)$ 如图3所示.自由参数 $Q(\theta)$ 是由多个子系统 $Q_i(\theta)$ 组成的,不仅能够使得控制器 $K_i(\theta)$ 稳定LPV对象且具有相应的 $H_\infty$ 控制性能 $\gamma_i$ .引用Xie<sup>[20]</sup>的结论,扩展到切换LPV系统的 $H_\infty$ 性能,在如下定理中给出本文研究问题的解决方案.

**定理1** 给定一个LPV对象(1),当标准 $H_\infty$ 控制Riccati不等式(5)和(6)有对称的非负稳定解 $X$ 和 $Y$ 时,控制器 $K_i(\theta)$ 可通过图2所示的结构进行参数化.若存在一组自由参数 $Q_i(\theta)$ 非最小化实现,构造如图3所示的闭环系统,且每个 $Q_i(\theta)$ 具有相应的 $H_\infty$ 性能 $\gamma_i$ ,则 $Q_i(\theta)$ 的实现不仅能够保证在任意切换下子系统各自局部的 $H_\infty$ 性能 $\gamma_i$ ,而且能够保证整个闭环系统满足整体的 $H_\infty$ 性能 $\gamma = \max(\gamma_i)$ .

**证明** 对于参数变量每个子区域的LPV系统,将LPV系统转换为多胞模型.根据引理2的Riccati方程(5)和(6),构造LMI不等式

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i A_{i,j}^T + A_{i,j} \bar{X}_i - B_2 B_2^T & \bar{X}_i C_{1,i,j}^T & B_{1,i,j} \\ C_{1,i,j} \bar{X}_i & -I & 0 \\ B_{1,i,j}^T & 0 & -\gamma_i^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_i A_{\text{tmp},i,j}^T + A_{\text{tmp},i,j}^T \bar{Y}_i - C_2^T C_2 & \bar{Y}_i B_{1,i,j} & X_i B_2 \\ B_{1,i,j}^T \bar{Y}_i & -I & 0 \\ B_{2,i,j}^T X_i & 0 & -\gamma_i^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

可以得到LPV控制器 $K_i(\theta)$ 结构如式(9)所示,使系统稳定并满足 $H_\infty$ 性能,其中 $K_i(\theta) = \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) K_{i,j}$ .任意稳定的控制器 $K(\theta)$ 都可以用稳定 $Q(\theta)$ 表示, $K(\theta) = F_l(M(\theta), Q(\theta))$ .根据引理3,对于所有的 $\theta$ ,可容许的控制器满足 $H_\infty$ 性能准则 $\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2$ ,等价于所有从 $y$ 到 $u$ 的状态空间实现 $Q(\theta)$ 的集合,且满足 $H_\infty$ 性能 $\gamma$ .如果每个 $Q_i(\theta)$ 系统构造如图3所示, $Q_i(\theta) = F_l(\hat{J}, K_i(\theta))$ ,则 $Q_i(\theta)$ 每个状态空间的实现可表述为

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{Q_i}(\theta) & B_{Q_i}(\theta) \\ \hline C_{Q_i}(\theta) & D_{Q_i}(\theta) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} A(\theta) + B_2 D_{k,i}(\theta) C_2 & B_2 C_{k,i}(\theta) & B_2 D_{k,i}(\theta) - L \\ \hline B_{k,i}(\theta) C_2 & A_{k,i}(\theta) & B_{k,i}(\theta) \\ \hline D_{k,i}(\theta) C_2 - F & C_{k,i}(\theta) & D_{k,i}(\theta) \end{array} \right].$$

如果每个 $Q_i(\theta)$ 都分别满足 $H_\infty$ 性能 $\gamma_i$ ,则根据引理1,存在正定矩阵 $X_i$ 满足以下 $n$ 个线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} A_{Q,i}^T(\theta) X_i + X_i A_{Q,i}(\theta) & X_i B_{Q,i}(\theta) & C_{Q,i}^T(\theta) \\ * & -\gamma_i I & D_{Q,i}^T(\theta) \\ * & * & -\gamma_i I \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

对于多胞LPV系统,这些线性矩阵不等式可以写成如下有限个 $r + n$ 的LMI集,其中 $r$ 是顶点的数目, $n$ 是子系统的数量:

$$\begin{bmatrix} A_{Q,i,j}^T X_i + X_i A_{Q,i,j} & X_i B_{Q,i,j} & C_{Q,i,j}^T \\ * & -\gamma_i I & D_{Q,i,j}^T \\ * & * & -\gamma_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

且有

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{Q,i}(\theta) & B_{Q,i}(\theta) \\ \hline C_{Q,i}(\theta) & D_{Q,i}(\theta) \end{array} \right] = \sum_{j=1}^r \alpha_j \left[ \begin{array}{c|c} A_{Q,i,j} & B_{Q,i,j} \\ \hline C_{Q,i,j} & D_{Q,i,j} \end{array} \right]. \quad (14)$$

式(14)在区域 $\Omega_i$ 内是凸胞模型, $i = i(t) \in \tau = \{1, 2, \dots, n\}, j \in Z = \{1, 2, \dots, r\}$ .

将式(13)左边乘以  $T_i = \begin{bmatrix} R_i^{-T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ , 右边乘以  $T_i^T$ , 其中  $R_i$  是  $X_i = R_i^T R_i$  的上三角矩阵, 由于  $T_i$  是行满秩的, 可以得到

$$T_i \begin{bmatrix} A_{Q,i,j}^T X_i + X_i A_{Q,i,j} & X_i B_{Q,i,j} & C_{Q,i,j}^T \\ * & -\gamma_i I & D_{Q,i,j}^T \\ * & * & -\gamma_i I \end{bmatrix} T_i^T < 0, \quad (15)$$

可简化成

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{Q,i,j}^T + \tilde{A}_{Q,i,j} & \tilde{B}_{Q,i,j} & \tilde{C}_{Q,i,j}^T \\ * & -\gamma_i I & \tilde{D}_{Q,i,j}^T \\ * & * & -\gamma_i I \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

然而, 如果每个  $X_i$  选择一个单位矩阵作为李雅普诺夫矩阵, 则LMI不等式(16)成立. 引用Bianchi等<sup>[13]</sup>的结论, 总是可以找到一个共同的李雅普诺夫矩阵, 使得如下切换LPV系统在任意切换时满足二次增益  $H_\infty$  性能:

$$Q_{i,j} \begin{cases} \dot{x}_Q = \tilde{A}_{Q,i,j} x_Q + \tilde{B}_{Q,i,j} v, \\ h = \tilde{C}_{Q,i,j} x_Q + \tilde{D}_{Q,i,j} v. \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\tilde{A}_{Q,i,j} = R_i A_{Q,i,j} R_i^{-1}, \quad \tilde{B}_{Q,i,j} = R_i B_{Q,i,j}, \\ \tilde{C}_{Q,i,j} = C_{Q,i,j} R_i^{-1}, \quad \tilde{D}_{Q,i,j} = D_{Q,i,j}.$$

由于每个  $Q_{i,j}$  可以独立于其他子集进行设计, 在每个子区域  $\Omega_i$  中实现的性能不受其他子区的  $Q_{i,j}$  影响.

将  $\{\tilde{A}_{Q_i}(\theta), \tilde{B}_{Q_i}(\theta), \tilde{C}_{Q_i}(\theta), \tilde{D}_{Q_i}(\theta)\}$  转换为多胞模型

$$\tilde{A}_{Q_i}(\theta) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tilde{A}_{Q,i,j}, \quad \tilde{B}_{Q_i}(\theta) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tilde{B}_{Q,i,j}, \\ \tilde{C}_{Q_i}(\theta) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tilde{C}_{Q,i,j}, \quad \tilde{D}_{Q_i}(\theta) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tilde{D}_{Q,i,j}.$$

方程(17)可以重新描述为

$$Q_i(\theta) \begin{cases} \dot{x}_Q = R_i A_{Q,i}(\theta) R_i^{-1} x_Q + R_i B_{Q,i}(\theta) v, \\ h = C_{Q,i}(\theta) R_i^{-1} x_Q + D_{Q,i}(\theta) v. \end{cases} \quad (18)$$

当每个  $Q_i(\theta)$  都满足相应的  $H_\infty$  性能时, 总是可以找到一个共同的李雅普诺夫矩阵, 在任意切换下能够保证整个闭环系统满足  $H_\infty$  性能  $\gamma = \max(\gamma_i)$ ; 同时, 也保证了每个子系统各自局部的  $H_\infty$  性能  $\gamma_i$ . □

### 4 数值算例

为验证所设计的切换控制器的有效性, 本文采用文献[13]中的主动磁轴承(AMB)系统模型进行仿真

实验, 具体的系统参数参见文献[21].

AMB系统是一种转子与定子间无任何机械接触的理想轴承. 电磁轴承无需使用润滑油及密封装置, 通过可控电磁力使转子始终悬浮在设定的平衡位置. 对系统进行简化之后, 可以通过以下LPV模型描述其动态行为

$$G(\rho) = \begin{cases} \dot{x} = A(\rho)x + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (19)$$

其中状态空间矩阵为

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4c_2}{m} & 0 & 0 & -\frac{\rho J_a}{J_r} & \frac{2c_1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{4c_2}{m} & \frac{\rho J_a}{J_r} & 0 & 0 & \frac{2c_2}{m} \\ \frac{2d_2}{m} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2d_2}{m} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_1}{m} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

状态向量  $x^T = [l\theta \quad l\psi \quad l\dot{\theta} \quad l\dot{\psi} \quad \phi\theta \quad \phi\psi]$ , 外部扰动  $w^T = [f_{d\theta} \quad f_{d\psi}]$ , 控制输入  $u^T = [e_\theta \quad e_\psi]$ . 对于增益调度控制, 假设转子转速  $\rho$  是实时可测的. 磁轴承系统的加权开环互连如图4所示.

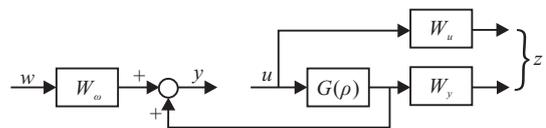


图4 AMB系统的加权开环互连结构

切换LPV控制器的设计目标是在大转子转速范围内稳定系统, 最大限度地减小轴承位置对间隙位移的干扰影响. 这些设计要求通过参数设计中的加权函数来量化. 图4中的加权函数选择为

$$W_y(s) = \frac{10(s+8)}{s+0.001} I_2, \quad W_u(s) = \frac{0.01(s+100)}{s+100000} I_2, \\ W_w(s) = 0.001 I_2.$$

假定转子转速在  $315 \sim 1100 \text{ rad/s}$  之间变化, 其变化率小于  $100 \text{ rad/s}^2$ . 转子动力学在此转速范围内表现出较强的陀螺效应, 参数随时间变化情况如图5

所示.

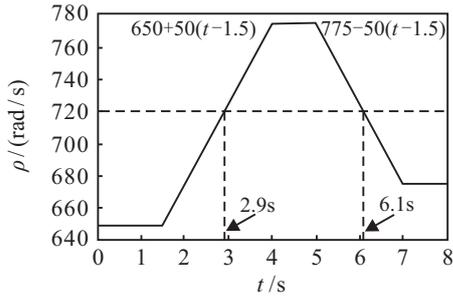


图5 参数轨迹变化

当转子转速在315~1100 rad/s之间变化时,由于转子转速的较大变化,在整个参数范围内使用单一的LPV控制器的保守性较高.对于具有任意切换逻辑的LPV控制,将参数空间划分为两个子区域[315 720]和[720 1100].仿真结果如图7所示,扰动输入幅值为0.001的阶跃响应,而参数变化则遵循图5所示的轨迹.由仿真结果可以看出,即使参数轨迹在2.9s和6.1s时穿过切换表面,也只是出现了较小的瞬态响应,很快又趋于平稳.

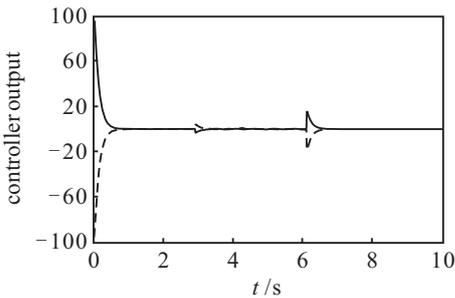


图6 本文方法的控制器输出响应

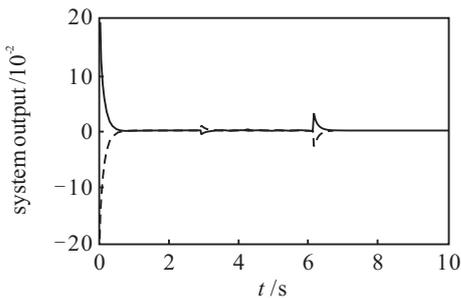


图7 本文方法的系统输出响应

然而,在文献[13]的控制器设计中,其设计方法分为2个步骤:第1步侧重于确保全局稳定性,第2步则是执行局部的性能.该方法求解到的控制器维数较高,计算过程复杂.如图3所示,假设对象的阶数为 $n$ ,即使只考虑可控和可观的状态,在计算 $F(\theta)$ 和 $L(\theta)$ 的过程中, $M(\theta)$ 的阶数是 $2n$ ,图2设计的控制器维数则为 $3n$ .本文提出用Riccati不等式求解中心控制器,然后采用LFT方法,通过中央控制器的线性分式变换,得到状态空间的实现 $Q(\theta)$ .当对象的阶数是

$n$ 时,中心控制器维数也是 $n$ ,用线性分式变换实现 $Q(\theta)$ 状态空间的维数小于 $n$ .因此,图2所设计的控制器的维数小于 $2n$ .当考虑中心控制器设计时,文献[13]利用求解LMI保证闭环系统的全局稳定性,仿真结果如图9所示.而本文是利用Riccati不等式求解中心控制器,以保证整个闭环系统满足 $H_\infty$ 性能.图7和图9相比,图9的抗干扰能力明显弱于图7.

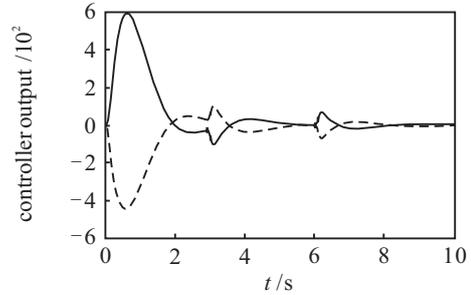


图8 文献[13]方法的控制器输出响应

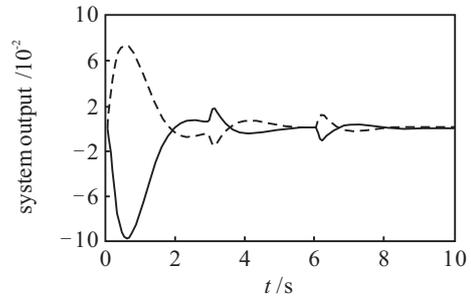


图9 文献[13]方法的系统输出响应

### 5 结论

传统的LPV控制器设计通常使用单个LPV控制器稳定被控对象.但是,当LPV对象的参数变化范围很大时,单个LPV控制器通常会导致较为保守的控制性能,或者是寻找稳定LPV控制器变得难以实现.为了解决保守性或不可行性问题,将增益调度变量的变化区域划分为若干个子区域,并且为每个局部子区域设计一个增益调度的LPV控制器,并在它们之间切换以实现更好的控制性能.本文提出了一种基于分离原理的Youla参数化切换LPV控制器设计方法,该方法分解为2个步骤.首先,设计一个中心控制器保证闭环系统的全局 $H_\infty$ 性能.其次,根据参数变化轨迹,划分为若干个子区域,在每个子区域中将中心控制器进行线性分式变换,得到切换控制器自由参数的状态空间实现,将切换控制器转换为自由参数之间的切换.通过任意切换控制器的自由参数避免控制器之间因切换导致可能出现的瞬态不稳定性.不仅能够保证在任意切换的情况下子系统各自局部的 $H_\infty$ 性能,而且可以保证整个闭环系统满足整体的 $H_\infty$ 性能,该方法可以有效扩展到其他多目标的切换LPV控制器设计问题中.

## 参考文献(References)

- [1] Apkarian P, Adams R J. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1998, 6(1): 21-32.
- [2] 王明昊, 刘刚, 赵鹏涛, 等. 多胞约束LPV系统多面体不变集RMPC算法[J]. *控制与决策*, 2013, 28(11): 1661-1666.  
(Wang M H, Liu G, Zhao P T, et al. RMPC algorithm for polytopic constrained LPV systems using polyhedral invariant sets[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(11): 1661-1666.)
- [3] Zhang Q H, Ljung L. From structurally independent local LTI models to LPV model[J]. *Automatica*, 2017, 84: 232-235.
- [4] Cai G B, Duan G R, Hu C H. A velocity-based lpv modeling and control framework for an airbreathing hypersonic vehicle[J]. *International Journal of Innovative Computing Information and Control*, 2011, 7(5): 2269-2281.
- [5] Lim S. Analysis and control of linear parameter-varying systems[M]. Palo Alto: Stanford University, 1999: 3-7.
- [6] 何塘, 章卫国, 王敏文, 等. 基于多目标控制的变体飞行器切换线性变参数控制器[J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(11): 1518-1525.  
(He Y, Zhang W G, Wang M W, et al. Switching linear-parameter-varying controller for morphing aircraft based on multi-objective[J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(11): 1518-1525.)
- [7] Yang D, Liu Y Y, Zhao J. Guaranteed cost control for switched LPV systems via parameter and state-dependent switching with dwell time and its application[J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 2017, 38(4): 601-617.
- [8] Zhang L X, Zheng W X, Gao H J.  $H_\infty$  model reduction of switched LPV systems via semi-time-varying reduced-order model[J]. *Systems & Control Letters*, 2016, 98: 25-32.
- [9] Lu B, Wu F. Switching LPV control designs using multiple parameter-dependent Lyapunov functions[J]. *Automatica*, 2004, 40(11): 1973-1980.
- [10] Lu B, Wu F, Kim S W. Switching LPV control of an F-16 aircraft via controller state reset[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(2): 267-277.
- [11] 李艳辉, 黄娜, 关正伟. 连续切换LPV系统的鲁棒 $H_\infty$ 滤波[J]. *控制与决策*, 2013, 28(3): 456-460.  
(Li Y H, Huang N, Guan Z W. Robust  $H_\infty$  filtering for continuous switched LPV systems[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(3): 456-460.)
- [12] Zhao P, Nagamune R. Switching LPV controller design under uncertain scheduling parameters[J]. *Automatica*, 2017, 76: 243-250.
- [13] Bianchi F D, Sánchez-Pena R S. A novel design approach for switched LPV controllers[J]. *International Journal of Control*, 2010, 83(8): 1710-1717.
- [14] Blanchini F, Miani S, Mesquine F. A separation principle for linear switching systems and parametrization of all stabilizing controllers[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 279-292.
- [15] Xie W, Eisaka T. Design of LPV control systems based on Youla parameterisation[J]. *IEE Proceedings—Control Theory and Applications*, 2004, 151(4): 465-472.
- [16] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421-448.
- [17] Apkarian P, Gahinet P, Becker G. Self-scheduled  $H_\infty$  control of linear parameter-varying systems: A design example[J]. *Automatica*, 1995, 31(9): 1251-1261.
- [18] Hong B S. Observer-based parameterized LPV  $L_2$ -gain control synthesis[C]. *Proceedings of the 2002. American Control Conference*. Anchorage: IEEE, 2002: 4427-4432.
- [19] Wu F. Switching LPV control design for magnetic bearing systems[C]. *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*. Mexico City: IEEE, 2001: 41-46.
- [20] Xie W. Quadratic  $L_2$ -gain performance linear parameter-varying realisation of parametric transfer functions and state-feedback gain scheduling control[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(11): 1577-1582.
- [21] Mohamed A M, Busch-Vishniac I. Imbalance compensation and automation balancing in magnetic bearing systems using the  $Q$ -parameterization theory[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1995, 3(2): 202-211.

## 作者简介

吴伟林(1986—), 男, 博士生, 从事切换系统及鲁棒控制的研究, E-mail: wuweilin\_520@163.com;

谢巍(1974—), 男, 教授, 博士生导师, 从事线性参数变化系统、鲁棒控制、机器视觉等研究, E-mail: weixie@scut.edu.cn;

何伟(1986—), 男, 博士生, 从事线性参数变化系统的研究, E-mail: weihescut@126.com;

张浪文(1986—), 男, 讲师, 博士, 从事分布式预测控制理论与应用的研究, E-mail: aulwzhang@scut.edu.cn.

(责任编辑: 闫妍)