

控制与决策

Control and Decision

空间连接系统的稳定与镇定

刘华波, 于海生

引用本文:

刘华波, 于海生. 空间连接系统的稳定与镇定[J]. 控制与决策, 2020, 35(3): 749–756.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0633>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

混合值逻辑网络的集合稳定

Set stability of mix-valued logical networks

控制与决策. 2019, 34(2): 269–273 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0371>

一类半线性抛物型偏微分方程描述的分布参数系统的边界控制

Boundary control of the distributed parameter systems described by a class of semi-linear parabolic partial differential equations

控制与决策. 2019, 34(12): 2594–2602 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0289>

具有1+N节点的多重边赋权驱动响应复杂网络复域函数投影同步

Complex function projective synchronization in drive-response complex networks with 1+N nodes and multi-links

控制与决策. 2017, 32(5): 935–938 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0350>

离散重复过程的有限频率范围迭代学习容错控制

Iterative learning fault-tolerant control in finite frequency range for discrete repetitive process

控制与决策. 2016, 31(9): 1685–1691 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0809>

Markov系统矩阵未知情况下的控制器设计

Stabilization of Markovian jump systems with unknown system matrices

控制与决策. 2016, 31(7): 1265–1271 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0787>

线性连续周期系统的模型参考跟踪控制

Model reference tracking control of linear continuous periodic system

控制与决策. 2016, 31(7): 1279–1284 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0325>

有向图下考虑暂态响应的多智能体 H_∞ 一致性控制

H_∞ consensus control of multi-agent systems synthesised with transient performance in directed networks

控制与决策. 2016, 31(11): 2053–2058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1581>

时变线性系统同时强镇定控制器设计

Controllers design of simultaneously strong stabilization for two linear time-varying systems

控制与决策. 2015(10): 1890–1894 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1341>

空间连接系统的稳定与镇定

刘华波[†], 于海生

(1. 青岛大学 自动化学院, 山东 青岛 266071; 2. 青岛大学 未来研究院, 山东 青岛 266071)

摘要: 研究连续时间线性时不变空间连接系统的稳定性分析与镇定控制器设计问题, 其具有不同动态特性的子系统之间的连接关系为任意且时不变的. 推导空间连接系统稳定性分析易于计算的充分必要条件, 并给出系统稳定的基于单个子系统参数的充分条件和必要条件; 在此基础上, 进行基于单个子系统状态反馈的镇定控制器设计. 所提方法能够避免高维矩阵的求逆等运算, 而且充分利用了系统参数矩阵的块对角结构和子系统连接矩阵的稀疏特性. 仿真结果显示, 所得到的条件在大规模网络化系统的分析与综合中, 计算效率有很大的提高.

关键词: 大规模系统; 网络化系统; 稳定; 镇定; 稀疏; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Stability and stabilization of spatially interconnected systems

LIU Hua-bo[†], YU Hai-sheng

(1. School of Automation, Qingdao University, Qingdao 266071, China; 2. Institute for Future, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: The stability and stabilization are investigated for continuous-time linear time-invariant spatially interconnected systems composed of many subsystems with different dynamics and arbitrary and fixed connections. A computationally attractive necessary and sufficient condition is first derived for stability analysis of the systems, some necessary or sufficient conditions are then obtained, which essentially depend only on parameter matrices of each individual subsystem. Based on these stability conditions, a state feedback stabilizing controller is derived. These conditions avoid some algebraic computations such as inversion of high dimensional matrices, and utilize sufficiently the block-diagonal structure of system parameter matrices and the sparseness of the subsystem connection matrix. Numerical simulations show that they are computationally attractive in the analysis and synthesis of a large scale networked system.

Keywords: large-scale system; networked system; stability; stabilization; sparseness; LMI

0 引 言

随着科学技术的飞速发展, 工业生产中智能传感器和执行器及各种网络技术的大量运用, 使得系统规模越来越大, 系统结构越来越复杂^[1-2]. 许多复杂网络系统或大规模系统可以认为是由很多个空间位置不同的子系统通过一定的连接方式组成, 相邻的子系统之间存在着相互的影响或作用, 称其为空间连接系统^[3-5]. 通常, 空间连接系统中子系统的动态是易于处理的, 子系统之间的连接关系是简单且可预测的, 但是其整体可以表现出丰富而复杂的行为. 例如, 自动高速公路系统^[6]、飞行器编队飞行^[7]、卫星星座系统^[8]、电力网络及微电网系统^[9-10]、纸张生产中的交叉控制^[11]、原子力显微镜中很多紧密结合的微悬臂

阵列^[12]等. 对于这些空间连接系统, 直接利用已有的基于线性系统的理论进行分析和综合, 对实现装置的计算速度、计算精度以及存储容量都有很苛刻的要求, 不可避免地存在计算上的困难, 甚至完全无法实现计算, 从而影响其在工程上的应用. 因此, 充分利用系统结构特性, 或者得到基于子系统参数的分析与综合方法, 对大规模网络化系统的研究有非常重要的工程意义.

近年来, 关于此类大规模连接系统的性能分析成果很多. 有些成果引入空间轴的概念, 从多维系统的角度进行性能分析和控制器设计, 得到易于计算的方法. 例如, 文献[3]给出了时间上特性不变和空间上特性不变的空间连接系统同时满足适应性、稳定性和收缩

收稿日期: 2018-05-13; 修回日期: 2018-12-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61573203, 61573204, 61573205, 61873138); 中国博士后科学基金项目 (2017M612190); 山东省高等学校科技计划项目 (J18KA355); 青岛市博士后应用研究项目.

责任编辑: 何勇.

[†]通讯作者. E-mail: hbliu@qdu.edu.cn.

性的线性矩阵不等式(linear matrix inequity, LMI)形式的充分条件,并给出了系统取得上述性能的分布式控制器设计方法;文献[4]给出了空间特性不变的分布参数系统指数稳定的充分必要条件,并进行了分布式控制问题的研究;文献[13]基于矩阵多项式零空间的几何结构得到了关于空间连接系统稳定性更小保守性的充分条件;文献[14]给出了存在特性随时间和空间都不变化的不确定性而名义模型时间不变空间不变的空间连接系统的鲁棒 l_2 稳定性条件;文献[12]给出了空间连接系统存在时间上和空间上任意变化的不确定性时取得 l_∞ 和 l_2 鲁棒稳定性的充分必要条件;文献[5]讨论了空间连接系统存在有界、线性、时空变化和有结构性约束的模型误差时,取得鲁棒性能的条件.采用多维模型描述空间连接系统,假定子系统数量无穷多,子系统特性相同,且具有特定形式的连接关系,实际应用时存在一定的局限性.

还有一些成果采用子系统连接矩阵刻画系统的连接关系,利用系统的结构特性得到易于检验的条件.例如文献[15-16]对由多个被动子系统组成特定结构形式的网络化系统的稳定性进行了研究;文献[17]利用系统的循序半分离结构给出了子系统直连型的大规模连接系统的稳定性、 H_∞ 分析及次优控制器综合的方法等.这些结果针对特定结构形式的大规模系统进行分析与设计,在实际工程中仍存在一定的应用限制.文献[18]基于积分二次型约束研究了子系统任意连接的大规模连接系统的鲁棒稳定性问题,给出了利用系统稀疏连接关系进行高效计算的方法;文献[19]研究了离散时间线性时不变空间连接系统的稳定性充分必要条件,并给出了系统鲁棒稳定的基于单个子系统参数的充分条件;文献[20]也讨论了空间连接系统基于单个子系统参数的稳定性条件;文献[10]针对 n 个同步发电机互联电力系统暂态过程中出现的发电机失步现象,提出了一种新的分布式协调控制设计方法,估计子系统的局部稳定区域,给出判定联结稳定性的定理,简化系统稳定性分析的复杂性,降低计算量.

大规模连接系统的系统结构通常具有稀疏特性或者特定的结构形式^[2-3,19].多智能体系统^[21]中子系统之间的相互作用通过其状态进行刻画,本文研究的空间连接系统,引入中间变量来描述子系统之间的连接关系,更具一般性,且显式刻画大规模系统的结构特性.本文给出充分利用系统结构特性的LMI形式的稳定性分析条件和镇定控制器综合方法,基于已有的且正在快速发展的稀疏半定规划工具^[18,22],能够得

到更高的计算效率,且相比基于集总式描述得到的方法,避免了高维矩阵求逆等运算导致的数值不稳定等问题.

采用的符号: \mathbf{R} 表示实数集合, $\mathbf{R}^\#$ 表示合适维数的实数构成的向量空间; $\mathcal{F}_u(*,\#)$ 表示上线性分式变换; $\text{diag}\{X_i|_{i=1}^L\}$ 表示块对角矩阵,其第 i 个对角块为 X_i ; $\text{col}\{X_i|_{i=1}^L\}$ 表示向量或矩阵 $X_i(i=1,2,\dots,L)$ 的堆叠; $\{X_{ij}|_{i=1}^M, j=1}^N\}$ 表示 $M \times N$ 的分块矩阵,其第 i 行 j 列块矩阵为 X_{ij} ; 0_m 和 $0_{m \times n}$ 分别表示 0 向量和 0 矩阵,不引起歧义时略去维数下标,单位矩阵 \mathbf{I} 同理;上标 \mathbf{T} 表示一个矩阵或向量的转置, $X^T W X$ 或者 $X W X^T$ 必要时简写为 $(*)^T W X$ 和 $X W (*)^T$;对于对称矩阵 A 和 B , $A < (\leq, >, \geq) B$ 表示 $A - B$ 为负定(负半定,正定,正半定)的.

1 问题描述

考虑由 N 个线性时不变子系统组成的空间连接系统 Σ ,第 i 个子系统 Σ_i 的动态由以下类似状态空间方程描述:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t, i) \\ z(t, i) \\ y(t, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{TT}(i) & A_{TS}(i) & B_T(i) \\ A_{ST}(i) & A_{SS}(i) & B_S(i) \\ C_T(i) & C_S(i) & D_T(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t, i) \\ v(t, i) \\ u(t, i) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其中: t 为时间, i 为子系统编号, $i=1,2,\dots,N$; $x(t, i)$ 为子系统状态, $y(t, i)$ 和 $u(t, i)$ 分别为外部输出和外部输入.子系统之间的连接关系为

$$v(t) = \Phi z(t). \quad (2)$$

其中: $z(t) = \text{col}\{z(t, i)|_{i=1}^N\}$, $v(t) = \text{col}\{v(t, i)|_{i=1}^N\}$,分别称 $z(t, i)$ 和 $v(t, i)$ 为内部输出和内部输入,用来刻画空间连接系统子系统之间的相互作用.图1给出了由3个子系统组成的空间连接系统的示意图.

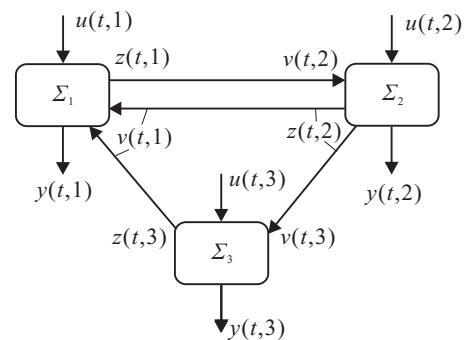


图1 3个子系统组成的空间连接系统

向量 $x(t, i)$ 、 $v(t, i)$ 、 $z(t, i)$ 、 $u(t, i)$ 和 $y(t, i)$ 的维

数分别假定为 m_{xi} 、 m_{vi} 、 m_{zi} 、 m_{ui} 和 m_{yi} . 不失一般性, 假定子系统连接矩阵 Φ 的每列只有一个非零元素^[19-20]; 此外, Φ 与子系统维数相对应的对角块元素全为 0. 易知, $\Phi\Phi^T = \Sigma^2$. 其中: $\Sigma^2 = \text{diag}\{\Sigma_j^2|_{j=1}^N\}$, $\Sigma_j^2 = \text{diag}\{m(i)|_{i=M_{v,j-1}+1}^{M_{v,j}}\}$, $M_{v,i} = \sum_{k=1}^i m_{vk}$, $m(i)$ 表示直接影响向量 $z(t)$ 的第 i 个元素影响的子系统数目, $i = 1, 2, \dots, \sum_{k=1}^N m_{zk}$, $j = 1, 2, \dots, N$.

为表示简洁, 定义如下向量和矩阵: $f(t) = \text{col}\{f(i, t)|_{i=1}^N\}$, $f = x, y, u$, $A_{*\#} = \text{diag}\{A_{*\#}(i)|_{i=1}^N\}$, $B_* = \text{diag}\{B_*(i)|_{i=1}^N\}$, $C_* = \text{diag}\{C_*(i)|_{i=1}^N\}$, $*, \# = T, S, D_T = \text{diag}\{D_T(i)|_{i=1}^N\}$. 直接的代数运算可以得到动态系统 Ξ 由以下状态空间形式等价描述:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A_{SS} & A_{ST} \\ A_{TS} & A_{TT} \end{bmatrix}, \Phi \right), \\ B &= \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A_{SS} & B_S \\ A_{TS} & B_T \end{bmatrix}, \Phi \right), \\ C &= \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A_{SS} & A_{ST} \\ C_S & C_T \end{bmatrix}, \Phi \right), \\ D &= \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A_{SS} & B_S \\ C_S & D_T \end{bmatrix}, \Phi \right). \end{aligned}$$

显然, Ξ 的适定性意味着 $(I - A_{SS}\Phi)^{-1}$ 是存在的, 进而 $(I - \Phi^T A_{SS}^T)$ 和 $(I - A_{SS}^T \Phi)$ 可逆.

为研究空间连接系统的稳定性分析及镇定控制器设计问题, 需要用到下面一些基本结果.

引理 1 假定矩阵 M 和 U 有以下形式, $M = [M_1^T \ M_2^T]^T$, $U = [\Phi^T U_1 \ \Phi^T U_2]$. 其中: Φ 为式(2)中的子系统连接矩阵, $M_i, U_i (i = 1, 2)$ 为合适维数的块对角矩阵. 定义对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_1\}$, 其中 $\Lambda_1 = \text{diag}\{\alpha_1 I, \dots, \alpha_N I\}$, $\alpha_i > 0$. 若 $\Phi\Lambda_1 = \Lambda_1\Phi$ 成立, 则有 $\Lambda U^T U = U^T \Lambda_1 U$, 以及

$$MU + U^T M^T \leq \Lambda M M^T + \Lambda^{-1} U^T U. \quad (4)$$

类似地, $MU + U^T M^T \geq -M M^T - U^T U$.

证明 由 $M_i, U_i (i = 1, 2)$ 为合适维数的块对角矩阵, 可以得到

$$\Lambda U^T U = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \Phi \\ U_2^T \Phi \end{bmatrix} [\Phi^T U_1 \ \Phi^T U_2] =$$

$$\begin{bmatrix} U_1^T \Lambda_1 \Phi \\ U_2^T \Lambda_1 \Phi \end{bmatrix} [\Phi^T U_1 \ \Phi^T U_2].$$

代入 $\Phi\Lambda_1 = \Lambda_1\Phi$ 并提取 Λ_1 , 可以得到 $\Lambda U^T U = U^T \Lambda_1 U$.

由矩阵基本性质可知, 对于合适维数的矩阵 M 和 U , 有

$$(M - \Lambda^{-1} U^T)(M^T - U \Lambda^{-1}) \geq 0.$$

展开上式, 根据矩阵 M, U 以及 Λ^{-1} 的结构, 可以得到

$$M M^T + \Lambda^{-2} U^T U \geq \Lambda^{-1} U^T M^T + \Lambda^{-1} M U.$$

由 $\alpha_i > 0$, 上式两边同乘 Λ , 可以得到式(4).

同理, 由 $(M + U^T)(M^T + U) \geq 0$ 展开得到 $MU + U^T M^T \geq -M M^T - U^T U$. 证明成立. \square

注 1 显然, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N > 0$ 时, 式(4)总是成立的. 但是, Λ 中采用尽可能多的不同的 α_i 在本文后续的稳定性分析和镇定控制器设计充分或必要条件中将会提高计算效率或减少保守性.

引理 2^[23] 给定合适维数的对称矩阵 F 和 G , 若对于满足 $v^T G v = 0$ 的每一个非零向量 v , 可以得到 $v^T F v > 0$, 则必存在一个实数 r 使得 $F - rG$ 为正定的. 反之, 亦然成立.

2 稳定性分析

由经典控制理论可知, 系统(3)稳定的充分必要条件是: 存在合适维数的正定矩阵 P , 使得

$$AP + PA^T < 0 \quad (5)$$

可解.

然而, 对大规模空间连接系统而言, 尽管系统(3)的参数矩阵 $A_{*\#}, B_*, C_*(*, \# = T, S)$ 和 D_T 都是块对角的, 且子系统连接矩阵 Φ 是稀疏的, 由凯莱-汉密尔顿定理^[24]可知矩阵 A, B, C, D 是稠密的, 文献[18-19]对此也进行了说明. 这种情况下, 当空间连接系统存在大量子系统时, 基于集总式描述的稳定性分析会遇到计算上的困难.

本节在式(5)的基础上推导了空间连接系统 Ξ 稳定性分析的一个计算上有效的充分必要条件.

定理 1 系统 Ξ 是稳定的, 当且仅当存在合适维数的正定矩阵 P 使得

$$\begin{bmatrix} I - \Phi^T A_{SS}^T - A_{SS} \Phi + A_{SS} \Sigma^2 A_{SS}^T & & & \\ & -P A_{ST}^T - A_{TS} \Phi + A_{TS} \Sigma^2 A_{SS}^T & & \\ & & -A_{ST} P - \Phi^T A_{TS}^T + A_{SS} \Sigma^2 A_{TS}^T & \\ & & & -A_{TT} P - P A_{TT}^T + A_{TS} \Sigma^2 A_{TS}^T \end{bmatrix} > 0. \quad (6)$$

证明 式(5)可以改写为

$$[I \ A] \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^T \end{bmatrix} < 0,$$

代入矩阵

$$A^T = A_{TT}^T + A_{ST}^T \Phi^T (I - A_{SS}^T \Phi^T)^{-1} \times A_{TS}^T,$$

可得

$$(*)^T \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{ST}^T & A_{TT}^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Phi^T (I - A_{SS}^T \Phi^T)^{-1} A_{TS}^T \\ I \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

定义矩阵 F_1 如下所示:

$$F_1 = (*)^T \begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{ST}^T & A_{TT}^T \end{bmatrix}. \quad (8)$$

令 P_2 和 H_1 分别表示为

$$P_2 = \begin{bmatrix} \Phi^T (I - A_{SS}^T \Phi^T)^{-1} A_{TS}^T \\ I \end{bmatrix},$$

$$H_1 = [I \ -\Phi^T] \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{SS}^T & A_{TS}^T \end{bmatrix},$$

记其维数分别为

$$\left(\sum_{i=1}^N m_{zi} + \sum_{i=1}^N m_{vi} \right) \times \left(\sum_{i=1}^N m_{vi} \right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^N m_{zi} \right) \times \left(\sum_{i=1}^N m_{zi} + \sum_{i=1}^N m_{vi} \right).$$

由 $I - \Phi^T A_{SS}^T$ 的可逆性可知 H_1 是行满秩的, P_2 是列满秩的, 则根据 H_1 、 P_2 的维数及 $H_1 P_2 = 0$ 可知 H_1 右零空间由矩阵 P_2 的列向量张开.

当向意 $v = P_2 \zeta$, $\zeta \in \mathbf{R}^\#$ 时, 对于任意 $v \neq 0$, $H_1 v = 0$ 意味着 $v^T F_1 v > 0$. 根据引理2, 存在着一个实数 $y \in \mathbf{R}$, 使得

$$(*)^T \begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{ST}^T & A_{TT}^T \end{bmatrix} - y \times (*)^T [I \ -\Phi^T] \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{SS}^T & A_{TS}^T \end{bmatrix} > 0. \quad (9)$$

由式(9)左边第一项(1,1)分块为0矩阵可知, 若有解则必有 $y < 0$. 由于矩阵 P 为待求解变量, 式(9)两边除以 $-y > 0$, 则必要性得证.

式(6)左右两边分别同时乘以矩阵 P_2^T 和 P_2 , 常规的代数运算可以完成充分证明. \square

注2 相比基于Lyapunov不等式的式(5), 定理1条件的显著特点是式(6)的左边线性依赖于 P , 且系

统 Ξ 的网络结构显式地反映在其中. 对于小规模系统, 该矩阵不等式通过常用的LMI求解器很容易求解. 另一方面, 注意到矩阵 $A_{* \#}$ ($*$, $\# = T, S$) 都是分块对角的, 同时大规模网络化连接系统通常拥有稀疏的结构^[18-19], 这由子系统连接矩阵 Φ 明确反映. 因此, 结合现有对稀疏半定规划问题求解的研究^[18,22]可知, 定理1中的条件对中等规模的系统也是有效的. 此外, 对于较大规模的空间连接系统采用式(5)进行稳定性分析时, 矩阵 A 、 B 、 C 和 D 的计算涉及到高维矩阵的求逆等运算, 而高维矩阵的求逆运算存在着数值稳定性的问题, 以及计算上的困难等. 定理1给出的条件直接利用系统参数, 避免了高维矩阵的求逆运算.

注3 由定理1的证明过程可知, 虽然 $A_{* \#}$ 是块对角的, 但是矩阵 P 是稠密而非稀疏的矩阵. 此外, 对于任意结构形式的子系统连接矩阵 Φ , 当式(6)中的 Σ^2 替换为 $\Phi \Phi^T$ 时, 定理1仍然成立.

对于子系统数目非常大的网络化系统, 检验定理1中的条件仍然会遇到计算上的困难. 因此, 仅仅依赖于单个子系统参数的稳定性分析的条件更有吸引力.

引理3是关于分块LMI性质的^[25], 其在推导基于单个子系统参数的稳定性条件时将会用到.

引理3 对一个 $M \times M$ ($M \geq 1$) 分块矩阵形式的LMI: $G(P) < 0$, 除了对称的自变量矩阵 P , 其他已知的系数矩阵或者常数矩阵皆为合适维数的分块对角矩阵, 且都有 N ($N > 1$) 个对角分块, 则对该LMI存在满块的可行解 P , 其必存在合适维数的对角分块的可行解.

基于引理3, 下面的注释给出了空间连接系统稳定性与单个子系统稳定性的关系.

注4 由LMI的性质可知, 式(6)可行的一个必要条件是

$$A_{TT} P + P A_{TT}^T - A_{TS} \Sigma^2 A_{TS}^T < 0.$$

由引理3, 其等价于: 存在一组合适维数的正定矩阵 $P(i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 使得

$$A_{TT}(i) P(i) + P(i) A_{TT}^T(i) - A_{TS}(i) \Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) < 0.$$

后者可以针对单个子系统独立检验.

由关系

$$\begin{bmatrix} I & -\Phi^T \\ -\Phi & \Phi \Phi^T \end{bmatrix} \leq 2 \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} [I \ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \end{bmatrix} [0 \ \Phi^T] \right), \quad (10)$$

结合引理3和子系统连接矩阵 Φ 的性质, 可以得到一

个只依赖于单个子系统参数的稳定性分析的必要条件如下. 其证明过程由直接的代数运算即可得到,故略去.

定理2 系统 Ξ 稳定的一个必要条件是对每个子系统都存在着合适维数的正定矩阵 $P(i)$,使得下式成立:

$$\left[\begin{array}{l} I + A_{SS}(i)\Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \\ -P(i)A_{ST}^T(i) + A_{TS}(i)\Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \\ -A_{ST}(i)P(i) + A_{SS}(i)\Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) \\ -A_{TT}(i)P(i) - P(i)A_{TT}^T(i) + \\ A_{TS}(i)\Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) \end{array} \right] > 0. \quad (11)$$

对于大规模的空间连接系统,有时多个子系统的参数是相同的,这种情形下,类似于定理2的仅仅基于单个子系统参数的条件更能凸显其优越性.

注意到,对于任意 $\alpha > 0$,由引理1得

$$\left[\begin{array}{l} I - \Phi^T \\ -\Phi \quad \Phi\Phi^T \end{array} \right] \geq (1 - \alpha) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (*)^T + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \end{bmatrix} (*)^T. \quad (12)$$

由 $\Phi\Phi^T = \Sigma^2$ 以及定理1的式(6),可以得到系统 Ξ 稳定性的一个充分条件如下.

定理3 如果对每个子系统存在合适维数的正定矩阵 $P(i)$ 和实数 $y > 1$,使得

$$\left[\begin{array}{l} I - y \times A_{SS}(i)\Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \\ -P(i)A_{ST}^T(i) - y \times A_{TS}(i)\Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \\ -A_{ST}(i)P(i) - y \times A_{SS}(i)\Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) \\ -A_{TT}(i)P(i) - P(i)A_{TT}^T(i) - \\ y \times A_{TS}(i)\Sigma_i^2 A_{TS}^T(i). \end{array} \right] > 0 \quad (13)$$

成立,或者合适维数的正定矩阵 $P(i)$ 和实数 $0 < y < 1$ 使得

$$\left[\begin{array}{l} -I + y \times A_{SS}(i)\Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \\ -P(i)A_{ST}^T(i) + y \times A_{TS}(i)\Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \\ -A_{ST}(i)P(i) + y \times A_{SS}(i)\Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) \\ -A_{TT}(i)P(i) - P(i)A_{TT}^T(i) + \\ y \times A_{TS}(i)\Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) \end{array} \right] > 0 \quad (14)$$

成立,则系统 Ξ 是稳定的.

证明 由式(12)中的关系和定理1中的结论,可以得到系统 Ξ 稳定的一个充分条件是:存在一个合适维数的正定矩阵 P 以及实数 $\alpha > 0$ 使得下式成立:

$$(*)^T \begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{ST}^T & A_{TT}^T \end{bmatrix} + (*)^T \left((1 - \alpha) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (*)^T + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \end{bmatrix} (*)^T \right) \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{SS}^T & A_{TS}^T \end{bmatrix} > 0. \quad (15)$$

当 $\alpha = 1$ 时,式(15)无解. 令 $y = 1/\alpha$,考虑到矩阵 P 是待求解变量,结合引理3可以完成证明. \square

注5 定理3中的式(13)和(14)是矩阵 $P(i)$ 和标量 y 的LMI,可以采用对 y 划分区间取固定值的方法,也可以直接联立求解. 对比定理1,当每个子系统的状态维数固定时,定理2和定理3(y 取固定值时)的计算复杂度只是线性依赖于子系统数目 N . 这就意味着对于大规模的空间连接系统而言,定理2和定理3的计算负担要远远低于定理1,但是需要指出定理2和定理3是保守的.

3 镇定控制器设计

对空间连接系统的每个子系统 Ξ_i 考虑控制律 $u(t, i) = K(i)x(t, i)$,得到闭环控制系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t, i) \\ z(t, i) \\ y(t, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{TT}(i) + B_T(i)K(i) & A_{TS}(i) \\ A_{ST}(i) + B_S(i)K(i) & A_{SS}(i) \\ C_T(i) + D_T(i)K(i) & C_S(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t, i) \\ v(t, i) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

定义矩阵 $K = \text{diag}\{K(i)|_{i=1}^N\}$, 记 $\bar{A}_{TT} = A_{TT} + B_T K$, $\bar{A}_{ST} = A_{ST} + B_S K$.

应用定理1到闭环系统,可以得到一个镇定控制器设计的充分必要条件如下.

定理4 当且仅当存在合适维数的正定矩阵 P 和合适维数的分块对角普通矩阵 K ,使得

$$\left[\begin{array}{l} I - \Phi^T A_{SS}^T - A_{SS}\Phi + A_{SS}\Sigma^2 A_{SS}^T \\ -P\bar{A}_{ST}^T - A_{TS}\Phi + A_{TS}\Sigma^2 A_{SS}^T \\ -\bar{A}_{ST}P - \Phi^T A_{TS}^T + A_{SS}^T \Sigma^2 A_{TS}^T \\ -\bar{A}_{TT}P - P\bar{A}_{TT}^T + A_{TS}\Sigma^2 A_{TS}^T \end{array} \right] > 0 \quad (17)$$

成立时,系统 Ξ 是可镇定的.

式(17)所示的条件是系统镇定的充分必要条件,但是式(17)对于矩阵 P 和 K 是双线性的.虽然现有很多关于双线性矩阵不等式(BMI)优化求解的结果,本质上其为一个非凸优化问题,对于一般的BMI仍然没有有效的算法进行求解.

为了克服非凸计算的问题,通过限制 P 为分块对角矩阵,并在式(17)中采用变量替换的方式令 $L = KP$,得到一个LMI形式的充分条件如下,其证明过程略.

定理5 若存在合适维数的分块对角正定矩阵 P 和合适维数的分块对角普通矩阵 L 使得

$$\begin{bmatrix} I - \Phi^T A_{SS}^T - A_{SS} \Phi + A_{SS} \Sigma^2 A_{SS}^T \\ -PA_{ST}^T - L^T B_S^T - A_{TS} \Phi + A_{TS} \Sigma^2 A_{SS}^T \\ -A_{ST} P - B_S L - \Phi^T A_{TS}^T + A_{SS} \Sigma^2 A_{TS}^T \\ -A_{TT} P - B_T L - PA_{TT}^T - \\ L^T B_T^T + A_{TS} \Sigma^2 A_{TS}^T \end{bmatrix} > 0, \quad (18)$$

且增益矩阵 $K(i) = L(i)P^{-1}(i), i = 1, 2, \dots, N$,其中 $L(i)$ 和 $P(i)$ 分别为矩阵 L 和 P 相应的块子矩阵,则系统 Ξ 是可镇定的.

注6 与定理1类似,定理5将 Σ^2 替换为 $\Phi\Phi^T$,对于任意的子系统连接矩阵 Φ 都是成立的.

下面定理给出了基于单个子系统参数的状态反馈镇定控制器的设计,其证明过程与定理3类似,故略去.

定理6 若对每个子系统存在正定矩阵 $P(i)$ 、矩阵 $L(i)$ 及一个实数 $\lambda_2 > 1$,使得

$$\begin{bmatrix} I - y \times A_{SS}(i) \Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \\ -P(i) A_{ST}^T(i) - L^T(i) B_S^T(i) - \\ y \times A_{TS}(i) \Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \\ -A_{ST}(i) P(i) - B_S(i) L(i) - \\ y \times A_{SS}(i) \Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) \\ -A_{TT}(i) P(i) - B_T(i) L(i) - \\ P(i) A_{TT}^T(i) - L^T(i) B_T^T(i) - \\ y \times A_{TS}(i) \Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) \end{bmatrix} > 0 \quad (19)$$

成立,或者实数 $\lambda_2 < 1$ 使得

$$\begin{bmatrix} -I + y \times A_{SS}(i) \Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \\ -P(i) A_{ST}^T(i) - L^T(i) B_S^T(i) + \\ y \times A_{TS}(i) \Sigma_i^2 A_{SS}^T(i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -A_{ST}(i) P(i) - B_S(i) L(i) + \\ y \times A_{SS}(i) \Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) \\ -A_{TT}(i) P(i) - B_T(i) L(i) - \\ P(i) A_{TT}^T(i) - L^T(i) B_T^T(i) + \\ y \times A_{TS}(i) \Sigma_i^2 A_{TS}^T(i) \end{bmatrix} > 0 \quad (20)$$

成立,则系统 Ξ 是可镇定的.

4 数值仿真

本节通过数值仿真来说明本文所提出方法的计算效率.仿真实验中,假定 $m_{u_i} = m_{x_i} = m_{v_i} = m_{z_i} = m_{y_i} = 2$.仿真实验在个人计算机上完成,其主要配置为: Intel(R) Core(TM) i5-4690 CPU 3.50 GHz 和4G RAM.本例中,子系统连接矩阵 Φ 随机产生,但每行每列仅有一个非零元素1,且不在对角块位置.每个子系统参数根据一个区间为 $[-0.4, 0.4]$ 的连续均匀分布独立随机产生.采用以下几种方法检验系统的稳定性,分别是基于Lyapunov不等式的式(5)、定理1和定理3.其中,定理3分别计算 y 为固定值及 y 为变量两种情况.LMI计算采用文献[22]中提供的算法.对由 N 个子系统构成的空间连接系统,产生10个系统进行计算,统计了系统稳定性分析计算时间的平均值和标准差.表1和表2提供了子系统数目从2到40时的一些代表性结果.

由表1和表2可以看出,当子系统数目在10个及以下时,基于Lyapunov不等式的计算效率与本文定理1的相当,这是因为定理1中矩阵不等式的维数比基于Lyapunov不等式所得到条件的维数高,故子系统数目较少时二者的计算时间相当.但是,随着系统规模的扩大,子系统数目为20、30、35、40时,基于Lyapunov不等式所用计算时间与定理1时间之比分别为:1.078 260、1.350 093、1.449 304、1.510 661,定理1方法的计算效率越来越高.这是因为基于Lyapunov不等式条件需要进行高维矩阵的求逆等运算.对于定理3两种情形下的应用,当子系统数目较少时,其计算效率与定理1和基于Lyapunov不等式的相当,这是因为定理3需要计算多个矩阵不等式;但是,随着子系统数目的增多,定理3的计算效率比定理1更高,这是由于定理3是基于单个子系统参数进行检验的.需要指出的是,相比定理1和基于Lyapunov不等式的条件,定理3仅仅是系统稳定的充分条件.

另外,基于单个子系统状态反馈镇定控制器设计的仿真实验结果与稳定性分析仿真实验一致,故在此略去.

表1 稳定性计算时间的平均值

子系统数目 N	Lyapunov 不等式	定理1	定理3中 y 为固定值	定理3中 y 为变量
2	0.021 529	0.023 960	0.038 262	0.022 437
10	0.185 082	0.211 740	0.189 856	0.044 374
20	2.010 095	1.864 202	0.377 117	0.088 558
30	14.968 670	11.087 140	0.569 294	0.225 320
35	31.872 010	21.991 260	0.660 199	0.235 623
40	60.304 170	39.919 050	0.754 290	0.310 031

表2 稳定性计算时间的标准差

子系统数目 N	Lyapunov 不等式	定理1	定理3中 y 为固定值	定理3中 y 为变量
2	0.001 782	0.001 361	0.000 814	0.001 130
10	0.030 232	0.023 326	0.003 950	0.001 403
20	0.136 298	0.140 068	0.006 506	0.002 606
30	2.106 619	0.823 904	0.012 386	0.162 131
35	1.661 720	1.245 283	0.007 490	0.002 780
40	3.955 155	1.706 082	0.004 751	0.007 822

5 结 论

本文提出了连续时间线性时不变空间连接系统稳定性分析的一些LMI形式的充分必要条件,该条件只依赖于子系统的参数和子系统连接矩阵,有效利用了系统参数矩阵的块对角特性和子系统连接矩阵的稀疏特性,对于中等规模的空间连接系统在计算效率上是有吸引力的;给出了仅仅依赖于单个子系统参数的充分条件和必要条件,更适用于拥有大量子系统的空间连接系统的稳定性分析.在稳定性分析的基础上,推导了基于单个子系统状态反馈的镇定控制器设计方法.相比于基于集总式描述的分析综合方法,本文给出的方法避免了高维矩阵的求逆等运算,计算效率更高.

下一步将研究连续时间线性时不变空间连接系统稠密连接时,易于计算的稳定性分析及其鲁棒稳定性问题等.

参考文献(References)

[1] 姜钟平, 刘腾飞. 网络稳定性与控制的小增益原理: 回顾与近期进展[J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 809-823.
(Jiang Z P, Liu T F. A small-gain principle for network stability and control: An overview and recent results[J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 809-823.)

[2] 席裕庚. 大系统控制论与复杂网络-探索与思考[J]. 自动化学报, 2013, 39(11): 1758-1768.
(Xi Y G. Large-scale systems control and complex networks-exploration and thinking[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(11): 1758-1768.)

[3] D'andrea R, Dullfrud G E. Distributed control design for spatially interconnected systems[J]. IEEE Transactions

on Automatic Control, 2003, 48(9): 1478-1495.

[4] Bamieh B, Paganini F, Dahleh M A. Distributed control of spatially invariant systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(7): 1091-1107.

[5] 刘华波, 周彤. 模型误差变化率有界的空间连接系统鲁棒性能分析[J]. 自动化学报, 2014, 40(10): 2098-2107.
(Liu H B, Zhou T. Robust performance analysis of spatially interconnected systems with rate-of-variation bounded time-varying and space-varying uncertainties[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(10): 2098-2107.)

[6] Raza H, Ioannou P. Vehicle following control design for automated highway systems[J]. IEEE Control Systems, 1996, 16: 43-60.

[7] Chichka D F, Speyer J L. Solar-powered, formation-enhanced aerial vehicle system for sustained endurance[C]. Proceedings of the American Control Conferences. Philadelphia: AACC, 1998: 684-688.

[8] Shaw G B, Miller D W, Hastings D E. The generalized information network analysis methodology for distributed satellite systems[D]. Cambridge: Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 1998.

[9] Kekatos V, Giannakis G. Distributed robust power system state estimation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(2): 1617-1626.

[10] 马连增, 陈雪波. 网络化多机电力系统的分布协调控制和暂态联结稳定性分析[J]. 控制与决策, 2017, 32(11): 1980-1984.
(Ma L Z, Chen X B. Distributed coordination control and

transient connective stability of networked multi-machine power systems[J]. Control and Decision, 2017, 32(11): 1980-1984.)

[11] Stewart G E. Two dimensional loop shaping controller design for paper machine crossdirectional processes[D]. Vancouver: Department of Electrical and Computer Engineering, University of British Columbia, 2000: 1-26.

[12] Sarwar A, Voulgaris P G, Salapaka S M. On l_∞ and l_2 robustness of spatially invariant systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20: 607-622.

[13] Zhou T. On the stability of spatially distributed systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(10): 2385-2391.

[14] Gorinevsky D, Stein G. Structured uncertainty analysis of robust stability for multidimensional array systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(9): 1557-1568.

[15] Arcak M. Diagonal stability on cactus graphs and application to network stability analysis[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(12): 2766-2777.

[16] Summers E, Arcak M, Packard A. Delay robustness of interconnected passive systems: An integral quadratic constraint approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(3): 712-724.

[17] Rice J K, Verhaegen M. Distributed control: A sequentially semi-separable approach for spatially heterogeneous linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1270-1283.

[18] Andersen M S, Pakazad S K, Hansson A, et al. Robust stability of sparsely interconnected uncertain systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(8): 2151-2156.

[19] Zhou T, Zhang Y. On the stability and robust stability of networked dynamic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(6): 1595-1600.

[20] Liu H B, Zhou T. Distributed state observer design for networked dynamic systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(9): 1001-1008.

[21] Liu X Z, Ji Z J. Controllability of multi-agent systems based on path and cycle graphs[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(1): 296-309.

[22] Benson S J. Mathematics and Computer Science, YE Y. DSDP5 user guide-software for semidefinite programming[M]. United States, Department of Energy, Office of Science, 2006.

[23] Polik I, Terlaky T. A survey of the S -lemma[J]. Siam review, 2007, 49(3): 371-418.

[24] Zhou K M, Doyle J C, Glover K. Robust and optimal control[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.

[25] Liu H B, Yu H S. Decentralized state estimation for a large-scale spatially interconnected system[J]. ISA Transactions, 2018, 74: 67-76.

作者简介

刘华波(1979—), 男, 副教授, 博士, 从事大规模连接系统的分析与综合等研究, E-mail: hbliu@qdu.edu.cn;

于海生(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂工程系统等研究, E-mail: yu.hs@163.com.

(责任编辑: 齐 霖)

下 期 要 目

一类状态/输入受限的不确定非仿射非线性系统鲁棒自适应backstepping控制 张 强, 等

结合多特征和模糊偏好关系的高分辨率遥感影像分割 陈 焯, 等

基于观测器的发动机转矩跟踪模型预测控制 康铭鑫, 等

面向协同检测与跟踪的多传感器长时调度方法 乔成林, 等

基于正多胞体线性规划的滤波故障诊断方法 王子赞, 等

带自相关约束的NARX动态软测量模型 熊伟丽, 等

基于 R^2 指标的昂贵多目标进化算法 刘建昌, 等

轮子打滑状态下全向移动机器人轨迹跟踪控制 贾松敏, 等

基于复杂网络的多电机同步控制系统故障诊断与切换容错研究 毛海杰, 等

全相似高阶规范割算法研究 张敬茂, 等