

# 控制与决策

Control and Decision

## 轮子打滑状态下全向移动机器人轨迹跟踪控制

贾松敏, 卢兴阳, 张祥银<sup>y</sup>, 张国梁

引用本文:

贾松敏, 卢兴阳, 张祥银<sup>y</sup>, 等. 轮子打滑状态下全向移动机器人轨迹跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2020, 35(4): 833–842.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0644>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 一种室内移动机器人自主探索方法

An autonomous exploration method for an indoor mobile robot

控制与决策. 2019, 34(6): 1227–1233 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1358>

### 自由漂浮空间机器人末端轨迹优化自适应控制

Optimal adaptive tracking control of effector trajectory for free-floating space robot

控制与决策. 2018, 33(9): 1699–1707 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.0509>

### 基于动态精简式混合地图的移动机器人自主探索

Mobile robot autonomous exploration based on dynamically simplified hybrid map

控制与决策. 2017, 32(5): 817–822 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0127>

### 基于预测控制的时滞多机器人编队脉冲控制

Impulsive control for multi-robot formation with communication delay based on predictive control

控制与决策. 2016, 31(8): 1453–1460 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0564>

### 非线性迭代学习算法在机器人上肢康复中的应用

Nonlinear iterative learning algorithm and its application in upper limb rehabilitation

控制与决策. 2016, 31(7): 1325–1329 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0101>

### 基于腿部关节控制的仿人机器人偏摆力矩控制方法

Yaw moment control method for humanoid robot based on leg joints control

控制与决策. 2016, 31(1): 79–83 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1367>

### 基于混合位姿估计模型的移动机器人三维地图创建方法

Mobile robot 3D map building based on hybrid pose estimation model

控制与决策. 2015, 30(8): 1504–1508 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0521>

### 考虑空间系绳释放特性的空间绳系机器人协调耦合控制

Coordinated coupling control of tethered space robot for considering releasing characteristics of space tether

控制与决策. 2015(6): 961–968 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0408>

# 轮子打滑状态下全向移动机器人轨迹跟踪控制

贾松敏, 卢兴阳, 张祥银<sup>†</sup>, 张国梁

(1. 北京工业大学 信息学部, 北京 100124; 2. 北京工业大学 计算智能与智能系统北京市重点实验室, 北京 100124; 3. 北京工业大学 数字社区教育部工程研究中心, 北京 100124)

**摘要:** 针对全向移动机器人轨迹跟踪控制中存在未知轮子打滑干扰问题, 设计自抗扰反步控制器. 首先, 建立存在轮子打滑扰动的全向移动机器人的运动学模型; 然后, 融合自抗扰控制技术与反步控制技术, 设计基于全向移动机器人运动学模型的轨迹跟踪控制器, 该控制器分别从纵向控制、横向控制及姿态控制上对打滑干扰进行实时估计与补偿; 最后, 利用 Lyapunov 定理分析闭环系统的稳定性并通过仿真实验验证了所提出控制算法的有效性和鲁棒性.

**关键词:** 全向移动机器人; 自抗扰控制; 反步控制; 轮子打滑; 运动学模型

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Trajectory tracking control for omnidirectional mobile robot in presence of wheel slipping

JIA Song-min, LU Xing-yang, ZHANG Xiang-yin<sup>†</sup>, ZHANG Guo-liang

(1. Faculty of Information Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. Beijing Key Laboratory of Computational Intelligence and Intelligent System, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 3. Engineering Research Center of Digital Community of Ministry of Education, Beijing 100124, China)

**Abstract:** Aiming at the problem of unknown wheel skidding disturbance in trajectory tracking control of omnidirectional mobile robots, an active disturbance rejection backstepping controller (ADRBTC) is designed. Firstly, the kinematics model of an omnidirectional mobile robot in the presence of wheel skidding disturbance is established; Then, the trajectory tracking controller based on the kinematics model of the omnidirectional mobile robot is designed by combining the active disturbance rejection controller (ADRC) technology with the backstepping control technology, and the controller estimates and compensates the sliding disturbance in real time from longitudinal control, lateral control and attitude control, respectively; Finally the stability of the closed loop system is analyzed by using Lyapunov theorem. Simulation results verify the effectiveness and robustness of the proposed control algorithm.

**Keywords:** omnidirectional mobile robot; active disturbance rejection controller; backstepping control; wheel slipping; kinematic model

## 0 引言

近年来,复杂环境下移动机器人运动控制的研究越来越受人们关注. 全向移动机器人可以在不改变姿态的情况下实现任意方向的运动,在运动空间狭小、有限、对机动性及灵活性要求较高的场合尤其能发挥其运动优势,近年来在物流工厂、医院等许多场合得到广泛应用<sup>[1-3]</sup>. 全向移动机器人属于多输入多输出系统,且轮子结构特殊,在实际工作环境中,全向移动机器人常常因为地面湿滑、结冰和轮子外胶皮老化等原因而出现打滑现象,使机器人的位姿和运

动状态受到严重影响. 此外,打滑干扰未知且难以直接精确测量,增大了全向移动机器人轨迹跟踪控制的难度. 因此,研究考虑未知打滑干扰的全向移动机器人的控制方法具有重要的意义.

基于 Mecanum 轮的 4 轮全向移动机器人属于多输入多输出、强耦合、非线性的复杂系统,因而增加了实现全向移动机器人鲁棒、精确轨迹跟踪控制的难度. 为了提高全向移动机器人轨迹跟踪控制的鲁棒性,国内外的研究者利用不同的控制方法设计了各种轨迹跟踪控制器,如滑模变结构控制器<sup>[4-6]</sup>、反演控制

收稿日期: 2018-05-14; 修回日期: 2018-10-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61703012, 81471770); 北京自然科学基金项目(4182010); 北京工业大学智能制造领域大科研推进计划项目(040000546317552).

责任编辑: 牛玉刚.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: xy\_zhang@bjut.edu.cn.

器<sup>[3,7]</sup>、模糊PID控制器<sup>[8]</sup>、鲁棒自适应控制器<sup>[9]</sup>、基于模糊控制算法与神经网络控制算法的自适应控制器等<sup>[10-13]</sup>。文献[3]研究了基于全向移动机器人运动学及动力学模型的轨迹跟踪控制,设计了反演轨迹跟踪控制器。文献[8]考虑机器人模型参数不确定性问题,设计了鲁棒自适应控制器。文献[14]针对3轮全向移动机器人轨迹跟踪过程中存在干扰问题,设计了基于无源性的自抗扰控制器。然而,上述工作并未有针对地对轮子打滑这种常见、却难以直接测量的未知干扰进行专门考虑。文献[15]针对非完整约束轮式机器人纵向打滑问题,利用两个未知参数描述轮式机器人两个驱动轮的滑动参数,采用自适应非线性反馈控制器进行纵向滑动补偿,提出了一种基于反步法的自适应跟踪控制方法。文献[16]针对轮式机器人纵向与侧向滑动参数均未知的情况,考虑轮式机器人速度与位姿之间的关系,利用非线性滑模观测器对滑动参数进行在线估计,设计了一种轨迹跟踪控制算法。文献[17]针对轮式机器人轨迹跟踪控制中打滑干扰的问题,将轮式机器人的非线性模型线性化,应用LMI方法设计了轨迹跟踪控制器。上述工作主要是针对普通非全向轮的打滑问题,而并未考虑由Mecanum轮打滑造成的全向移动机器人控制失效问题。

基于此,本文主要研究基于Mecanum轮的4轮全向移动机器人存在未知轮子打滑干扰的轨迹跟踪控制问题。首先建立轮子打滑情况下的全向移动机器人运动学模型,利用自抗扰控制技术<sup>[18-19]</sup>与基于Lyapunov稳定性原理的反步控制技术设计全向移动机器人的轨迹跟踪控制器,该控制器利用扩张状态观测器从纵向控制、横向控制及姿态控制上对打滑干扰进行实时估计与补偿,最后通过仿真实验验证自抗扰反步控制器(ADRBTC)的有效性。

## 1 数学模型的建立

本文研究的全向移动机器人采用4个Mecanum轮对称排列的结构布局,每个轮子由一台直流伺服电机独立驱动,通过调节4个轮子的转速实现机器人的全方位移动,机器人的结构如图1所示。

为了描述全向移动机器人的位姿与运动状态,定义两个坐标系(如图1所示):以全向移动机器人几何中心为原点的移动坐标系 $O_M(X_M, Y_M)$ ,以及世界坐标系 $O(X, Y)$ 。

在移动坐标系 $O_M(X_M, Y_M)$ 下,轮子不打滑时

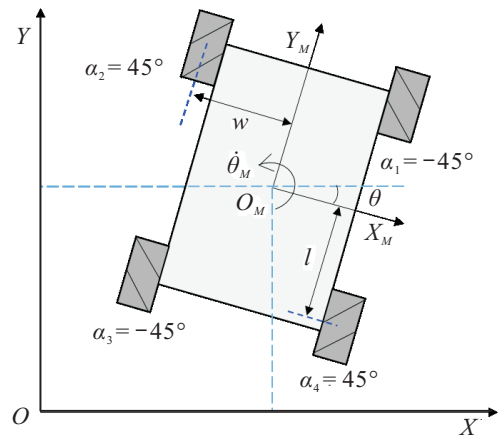


图1 Mecanum轮全向移动机器人结构示意图

全向移动机器人的运动学及逆运动学模型<sup>[8]</sup>为

$$\begin{cases} \dot{X}_M = \frac{r}{4}(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4), \\ \dot{Y}_M = \frac{r}{4}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4), \\ \dot{\theta}_M = \frac{r}{4(l+w)}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4); \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{r}[-\dot{X}_M + \dot{Y}_M + (l+w)\dot{\theta}_M], \\ \omega_2 = \frac{1}{r}[\dot{X}_M + \dot{Y}_M - (l+w)\dot{\theta}_M], \\ \omega_3 = \frac{1}{r}[-\dot{X}_M + \dot{Y}_M - (l+w)\dot{\theta}_M], \\ \omega_4 = \frac{1}{r}[\dot{X}_M + \dot{Y}_M + (l+w)\dot{\theta}_M]. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\omega_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示轮 $i$ 的角速度,为轮子半径, $\dot{X}_M$ 、 $\dot{Y}_M$ 和 $\dot{\theta}_M$ 分别表示全向移动机器人在移动坐标系下的 $X_M$ 方向的速度、 $Y_M$ 方向的速度以及绕自身几何中心的转速, $w$ 和 $l$ 分别表示Mecanum轮中心到移动坐标系纵轴和横轴的距离。

在轮子打滑情况下,轮 $i$ 的滑动率 $s_i$ <sup>[16]</sup>如下:

$$s_i = \frac{r\omega_i - v_i^s}{r\omega_i}, \quad (3)$$

其中 $v_i^s$ 表示Mecanum轮打滑时相对于地面的线速度。

**注1** 轮 $i$ 的滑动率的范围为 $0 \leq s_i < 1$ ,当 $s_i = 1$ 时表示轮子处于完全打滑状态,此时全向移动机器人不可控,不考虑此种情况。

根据式(3)可得轮 $i$ 打滑情况下相对于地面的线速度,其方程如下:

$$v_i^s = r\omega_i(1 - s_i). \quad (4)$$

在移动坐标系 $O_M(X_M, Y_M)$ 下,存在轮子打滑干扰时全向移动机器人的运动学模型为

$$\begin{cases} \dot{X}_M = \frac{r}{4}[-\omega_1(1-s_1) + \omega_2(1-s_2) - \omega_3(1-s_3) + \omega_4(1-s_4)]; \\ \dot{Y}_M = \frac{r}{4}[\omega_1(1-s_1) + \omega_2(1-s_2) + \omega_3(1-s_3) + \omega_4(1-s_4)]; \\ \dot{\theta}_M = \frac{r}{(4l+4w)}[\omega_1(1-s_1) - \omega_2(1-s_2) - \omega_3(1-s_3) + \omega_4(1-s_4)]. \end{cases} \quad (5)$$

由移动坐标系  $O_M(X_M, Y_M)$  到世界坐标系  $O(X, Y)$  的坐标转换矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ \theta_M \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由式(5)和(6)可得在世界坐标系  $O(X, Y)$  下, 存在轮子打滑干扰时, 全向移动机器人的运动方程为

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{X}_M \cos \theta - \dot{Y}_M \sin \theta = \\ \frac{r}{4}[-\omega_1(1-s_1) + \omega_2(1-s_2) - \omega_3(1-s_3) + \omega_4(1-s_4)] \cos \theta - \frac{r}{4}[\omega_1(1-s_1) + \omega_2(1-s_2) + \omega_3(1-s_3) + \omega_4(1-s_4)] \sin \theta; \\ \dot{Y} = \dot{X}_M \sin \theta + \dot{Y}_M \cos \theta = \\ \frac{r}{4}[-\omega_1(1-s_1) + \omega_2(1-s_2) - \omega_3(1-s_3) + \omega_4(1-s_4)] \sin \theta + \frac{r}{4}[\omega_1(1-s_1) + \omega_2(1-s_2) + \omega_3(1-s_3) + \omega_4(1-s_4)] \cos \theta; \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_M = \\ \frac{r}{(4l+4w)}[\omega_1(1-s_1) - \omega_2(1-s_2) - \omega_3(1-s_3) + \omega_4(1-s_4)]. \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $\dot{X}$ 、 $\dot{Y}$  和  $\dot{\theta}$  分别表示全向移动机器人在世界坐标系中  $X$  方向的速度、 $Y$  方向的速度以及机器人绕自身几何中心的旋转速度,  $[X \ Y \ \theta]^T$  为全向移动机器人在世界坐标系下的位姿。

## 2 轨迹跟踪动态误差建模

全向移动机器人轨迹跟踪位姿误差如图2所示。

假设轮子不打滑, 在世界坐标系  $O(X, Y)$  下全向移动机器人的初始位姿状态为  $p = [X, Y, \theta]^T$ , 期望位姿状态为  $p_d = [X_d, Y_d, \theta_d]^T$ , 通过坐标转换, 在移动坐标系下机器人的轨迹跟踪误差方程为

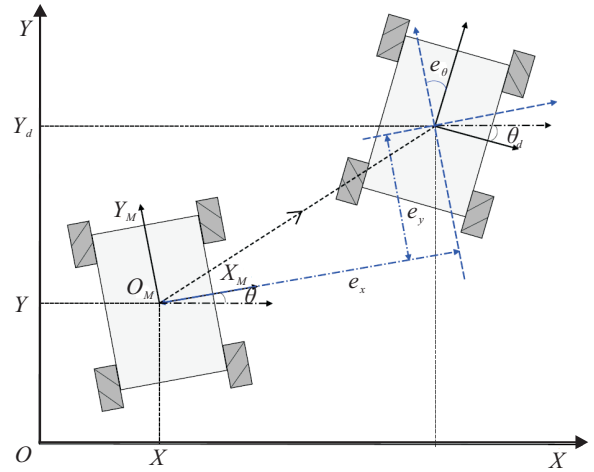


图2 全向机器人轨迹跟踪位姿误差示意图

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_d - X \\ Y_d - Y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}. \quad (8)$$

其中:  $e_x, e_y, e_\theta$  分别是机器人在移动坐标系下的横向位置误差、纵向位置误差及姿态误差. 在世界坐标系下, 全向移动机器人整体的线速度与角速度满足如下方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_d \\ \dot{Y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_d & 0 \\ \sin \theta_d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix}. \quad (9)$$

根据轨迹跟踪误差方程, 可得到其误差微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\theta e_y + v_d \cos e_\theta - v_x \\ -v_\theta e_x + v_d \sin e_\theta - v_y \\ \dot{\theta} - v_\theta \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中  $v_x, v_y, v_\theta$  为机器人在移动坐标系下的运动状态。

## 3 控制系统分析与设计

基于 Mecanum 轮的全向移动机器人具有在不改变姿态的条件下实现全方位移动的优点. 由其数学模型可知, 该系统属于多输入多输出的非线性系统. 全向移动机器人在轨迹跟踪控制过程中由于轮子打滑而导致机器人的位姿和运动状态受到影响, 反步法通过递归的思想可获得系统的反馈控制器, 但其对模型依赖性较高, 对未知扰动抵抗能力较差, 自抗扰控制算法对模型依赖性较低, 其扩张状态观测器可对未知的打滑干扰进行实时估计与补偿, 但自抗扰控制器参数较多且具有耦合性, 常因参数调节不当使控制器鲁棒性受到一定的影响, 因此为了降低反步法对模型的依赖性, 进一步提高自抗扰控制器的鲁棒性, 针对全向移动机器人运动控制中轮子打滑问题, 本文设计了自抗扰反步轨迹跟踪控制器 (ADRBTC), 使机器人快速精确地跟踪期望轨迹. 全向移动机器人控制系统原理如图3所示。

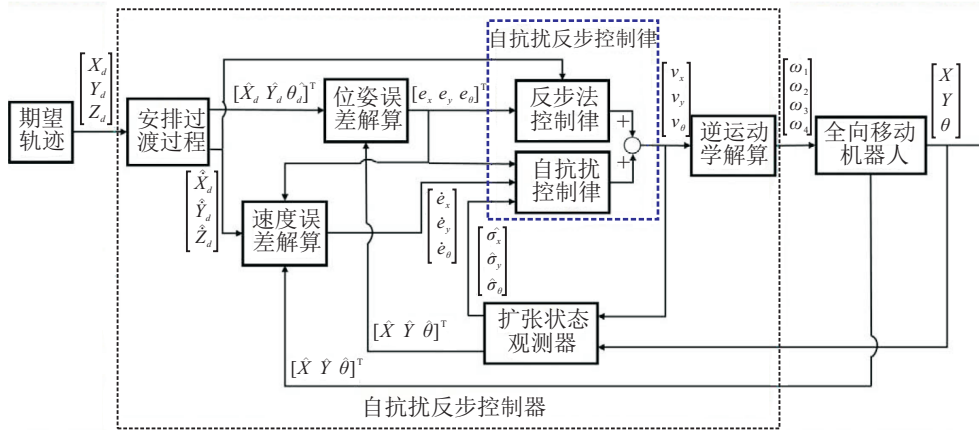


图3 全向移动机器人控制结构图

3.1 安排过渡过程

在自抗扰控制器中,安排过渡过程一般采用非线性跟踪微分器.传统的微分器会产生噪声放大效应,而且存在对于输入不可微的现象,而非线性跟踪微分器可解决以上缺点,有效地抑制噪声放大效应.本文采用基于滑模技术的非线性跟踪微分器来安排过渡过程,通过该微分器可以快速精确地获取机器人系统输入的期望轨迹信号的微分信号,即期望速度输入量,其表达式为

$$\begin{cases} \dot{u}_p = u_{p1}, \\ u_{p1} = u_{p2} - \gamma|u_p - p_d|^{1/2} \text{sgn}(u_p - p_d), \\ \dot{u}_{p2} = -\alpha \text{sgn}(u_p - p_d). \end{cases} \quad (11)$$

其中: $\alpha > C, \gamma^2 \geq 4C \frac{\alpha + C}{\alpha - C}, C > 0, C$ 是期望轨迹输入信号 $p_d$ 导数的Lischitz常数上届.采用式(11)的非线性跟踪微分器,可实现 $u_p$ 跟踪期望轨迹信号 $p_d, u_{p2}$ 跟踪速度信号 $\dot{p}_d$ .

3.2 扩张状态观测器

扩张状态观测器是自抗扰控制算法最核心的技术,它将系统受到的扰动扩张成一个系统状态,此状态可以对轮子打滑干扰进行实时估计.

扩张状态观测器是一个动态过程,它不依赖于控制系统精确的数学模型,只需要控制对象的输入信息和输出信息即可实时估计系统的状态变量及系统未知的动态扰动量.针对全向移动机器人控制系统,其结构如图4所示.

全向移动机器人运动学控制系统属于非线性耦合系统,对其进行解耦后每一个独立的子系统可写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = \sigma_i(s, \omega, \theta, t) + b_i v_i, \\ y_i = p_i(t). \end{cases} \quad (12)$$

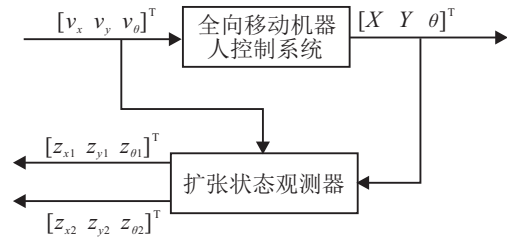


图4 扩张状态观测器结构示意图

其中: $p_i(t)$ 表示机器人 $i(i = x, y, \theta)$ 方向的位置信息, $\dot{p}_i(t)$ 表示机器人 $i$ 方向的速度信息, $\sigma_i(s, \omega, \theta, t)$ 表示机器人轮子打滑时在 $i$ 方向上产生的干扰量, $v_i$ 表示机器人系统的运动学控制输入.

这里针对全向移动机器人系统建立如下非线性扩张状态观测器:

$$\begin{cases} e_i = z_{i1} - y_i, \\ \dot{z}_{i1} = z_{i2} - \beta_1 e_i + b_i v_i, \\ \dot{z}_{i2} = -\beta_2 \text{fal}(e_i, \alpha_z, \delta). \end{cases} \quad (13)$$

其中: $\text{fal}(e, \alpha, \delta)$ 函数可以避免系统的高频振荡现象,其表达式<sup>[18]</sup>如下:

$$\text{fal}(e, \alpha, \delta) = \begin{cases} |e|^\alpha \text{sgn}(e), & |e| > \delta; \\ \frac{e}{\delta^{1-\alpha}}, & |e| \leq \delta. \end{cases} \quad (14)$$

扩张状态观测器(13)中 $z_{i1}$ 是全向移动机器人各状态变量的实时估计值,即 $z_{i1} \rightarrow p_i; z_{i2}$ 是全向移动机器人轮子打滑时产生的干扰 $\sigma_i(s, \omega, \theta, t)$ 的估计量; $\alpha_z$ 是 $\text{fal}(\cdot)$ 函数的幂次,取值范围为 $0 \sim 1$ ,且其值越小跟踪速度越快,但滤波效果会变差; $\beta_1, \beta_2$ 表示观测器的增益; $\delta$ 表示 $\text{fal}(\cdot)$ 函数线性段的区间长度.

3.3 非线性误差反馈控制律

跟踪误差非线性组合的方式在大量研究中被采用,相比于线性组合的方式有更好的控制效果.本文采用的非线性误差反馈控制表达式如下:

$$\begin{cases} e_{x1} = e_x = u_p^x - z_{x1}, \\ e_{x2} = \dot{e}_x, \\ u_{ox} = k_{x1} \text{fal}(e_{x1}, a_{x1}, \delta_k) + k_{x2} \text{fal}(e_{x2}, a_{x2}, \delta_k), \\ e_{y1} = e_y = u_p^y - z_{y1}, \\ e_{y2} = \dot{e}_y, \\ u_{oy} = k_{y1} \text{fal}(e_{y1}, a_{y1}, \delta_k) + k_{y2} \text{fal}(e_{y2}, a_{y2}, \delta_k), \\ e_{\theta1} = e_\theta = u_p^\theta - z_{\theta1}, \\ e_{\theta2} = \dot{e}_\theta, \\ u_{o\theta} = k_{\theta1} \text{fal}(e_{\theta1}, a_{\theta1}, \delta_k) + k_{\theta2} \text{fal}(e_{\theta2}, a_{\theta2}, \delta_k). \end{cases} \quad (15)$$

其中:  $u_p^i$  表示机器人  $i$  ( $i = x, y, \theta$ ) 通道的安排过渡过程输出的期望轨迹信号,  $z_{i1}$  表示  $i$  通道扩张状态观测器跟踪的机器人控制系统的实际轨迹信号,  $\text{fal}(\cdot)$  函数表达式如式(14)所示,  $a$  的取值范围为  $0 < a_{i1} < 1 < a_{i2}$ ,  $k_{i1}$  和  $k_{i2}$  分别是非线性误差反馈控制律的比例增益和微分增益. 通过观测器扰动补偿后得到控制律如下:

$$\begin{cases} v_{bx} = u_{ox} - z_{x2}/b_1, \\ v_{by} = u_{oy} - z_{y2}/b_2, \\ v_{b\theta} = u_{o\theta} - z_{\theta2}/b_3. \end{cases} \quad (16)$$

### 3.4 自抗扰反步控制律

为了提高全向移动机器人轮子打滑情况下闭环控制系统的鲁棒性, 首先在轮子不打滑情况下, 利用反步法设计运动学控制律, 选取 Lyapunov 函数如下:

$$V(t) = \frac{1}{2}e_x^2 + \frac{1}{2}e_y^2 + \frac{1 - \cos e_\theta}{k_4}. \quad (17)$$

将式(17)对时间  $t$  求导, 有

$$\dot{V}(t) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + \frac{\sin e_\theta}{k_4} \dot{e}_\theta. \quad (18)$$

将式(10)代入(18), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & e_x(v_\theta e_y + v_d \cos e_\theta - v_x) + \\ & e_y(-v_\theta e_x + v_d \sin e_\theta - v_y) + \\ & \frac{k_3 \sin e_\theta}{k_4} (\dot{\theta} - v_\theta). \end{aligned} \quad (19)$$

根据反步法设计思想设计如下运动学控制律:

$$\begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \\ v_{a\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \cos e_\theta + k_1 e_x \\ v_d \sin e_\theta + k_2 e_y \\ \omega_d + k_3 \sin e_\theta \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中  $k_1, k_2, k_3, k_4$  为可调的正常数, 有

$$\dot{V}(t) = -k_1 e_x^2 - k_2 e_y^2 - \frac{k_3}{k_4} \sin^2 e_\theta \leq 0. \quad (21)$$

结合反步法运动学控制律(20)与自抗扰非线性

误差反馈控制律(16), 得到全向移动机器人的控制输入如下:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ax} + v_{bx} \\ v_{ay} + v_{by} \\ v_{a\theta} + v_{b\theta} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

利用逆运动学模型将全向移动机器人系统的控制输入解算为4个轮子的转速, 如下所示:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{r}[-v_x + v_y + (l+w)v_\theta], \\ \omega_2 = \frac{1}{r}[v_x + v_y - (l+w)v_\theta], \\ \omega_3 = \frac{1}{r}[-v_x + v_y - (l+w)v_\theta], \\ \omega_4 = \frac{1}{r}[v_x + v_y + (l+w)v_\theta]. \end{cases} \quad (23)$$

当全向移动机器人打滑时, ADRBTC 通过扩张状态观测器对打滑干扰进行实时估计与补偿, 通过控制4个 Mecanum 轮的转速, 使其轨迹跟踪误差满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|[e_x \ e_y \ e_\theta]^T\| = 0$ .

## 4 稳定性分析

全向移动机器人轮子打滑时影响机器人的位姿与运动状态, 将  $X$  方向、 $Y$  方向及机器人姿态上产生的打滑干扰分别定义为  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_\theta$ . 假设打滑干扰有界, 误差微分方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_\theta + \sigma_\theta)e_y + v_d \cos e_\theta - (v_x + \sigma_x) \\ v_d \sin e_\theta - (v_\theta + \sigma_\theta)e_x - (v_y + \sigma_y) \\ \dot{\theta}_d - (v_\theta + \sigma_\theta) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

**定理1** 全向移动机器人运动过程中受到轮子打滑干扰时, 在控制律(22)作用下的闭环控制系统, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 轨迹跟踪误差  $e_x, e_y, e_\theta$  渐近收敛到零.

**证明** 首先证明通过打滑干扰补偿后反步法控制器的稳定性. 选取如式(17)所示的 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}e_x^2 + \frac{1}{2}e_y^2 + \frac{1 - \cos e_\theta}{k_4}.$$

对于任意  $[e_x \ e_y \ e_\theta]^T \neq 0$ , 有  $V(t) > 0$ . 将式(24)代入 Lyapunov 函数的微分方程(18), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & e_x[(v_\theta + \sigma_\theta)e_y + v_d \cos e_\theta - (v_x + \sigma_x)] + \\ & e_y[-(v_\theta + \sigma_\theta)e_x + v_d \sin e_\theta - (v_y + \sigma_y)] + \\ & \frac{k_3 \sin e_\theta}{k_4} [\dot{\theta}_d - (v_\theta + \sigma_\theta)]. \end{aligned} \quad (25)$$

控制律中扩张状态观测器可对全向移动机器人系统打滑扰动进行实时估计与补偿, 假设扩张状态观测器能较为精确地估计轮子打滑干扰, 即  $z_{x2}/b_1 =$

$\sigma_x, z_{y2}/b_2 = \sigma_y, z_{\theta 2}/b_3 = \sigma_\theta$ , 将反步法运动学控制律(20)及观测器扰动补偿律代入式(25), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \quad (26) \\ e_x & \left[ \left( u_{a\theta} - \frac{z_{\theta 2}}{b_3} + \sigma_\theta \right) e_y + v_d \cos e_\theta - \right. \\ & \left. \left( u_{ax} - \frac{z_{x2}}{b_1} + \sigma_x \right) \right] + e_y \left[ - \left( u_{a\theta} - \frac{z_{\theta 2}}{b_3} \right) e_x + \right. \\ & \left. v_d \sin e_\theta - \left( u_{ay} - \frac{z_{y2}}{b_2} + \sigma_y \right) \right] + \\ & \frac{k_3 \sin e_\theta}{k_4} \left[ \dot{\theta}_d - \left( u_{a\theta} - \frac{z_{\theta 2}}{b_3} + \sigma_\theta \right) \right] = \\ & -k_1 e_x^2 - k_2 e_y^2 - \frac{k_3}{k_4} \sin^2 e_\theta. \quad (27) \end{aligned}$$

取  $k_i (i = 1, 2, 3, 4) > 0$ , 则  $\dot{V}(t) \leq 0$ , 故  $V(t)$  单调非递增且有界, 由式(17)知跟踪误差有界. 期望输入量有界, 由式(10)知  $\dot{e}_x, \dot{e}_y, \dot{e}_\theta$  有界. 根据 Barbalat 引理可知, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 跟踪误差  $e_x, e_y, e_\theta$  可收敛到零.  $\square$

自抗扰控制器对系统模型的依赖性较低, 在文献[18]中分析了非线性扩张状态观测器及自抗扰控制器的收敛性, 即自抗扰控制器可通过扩张状态观测器对轮子打滑扰动进行较为精确的估计与补偿, 从而提高机器人控制系统的鲁棒性.

综上所述, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 轨迹跟踪误差  $e_x, e_y, e_\theta$  渐近收敛到零, 即全向移动机器人可以从任意位姿状态  $p = [X, Y, \theta]^T$  收敛到期望位姿状态  $p_d = [X_d, Y_d, \theta_d]^T$ , 以实现轨迹跟踪控制的目标.

## 5 仿真实验

为了验证本文提出的全向移动机器人存在打滑干扰时自抗扰反步控制器的有效性, 将通过仿真实验进行验证. 考虑到全向移动机器人实际运动模式, 位置与姿态可单独控制, 可以先保持姿态不变到达期望位置后, 再改变姿态, 或先改变姿态, 再移动到期望位置. 因此在仿真实验中对位置控制与姿态控制两种模式分别进行验证.

全向移动机器人的物理参数如下:

$$r = 0.076 \text{ m}, w = 0.25 \text{ m}, l = 0.225 \text{ m}.$$

微分器的参数设置为

$$\alpha = 2, \gamma = 5;$$

扩张状态观测器的参数设置为

$$\alpha_z = 0.5, \delta = 0.0025, \beta_1 = 100, \beta_2 = 300,$$

其中  $x, y, \theta$  三个通道的微分器与扩张状态观测器的参数值设置相同. 自抗扰反步控制律的参数设置如下:

$$\alpha_{i1} = 0.75, \alpha_{i2} = 1.25, \delta_k = 0.02,$$

$$k_{x1} = 50, k_{x2} = 30, k_{y1} = 100,$$

$$k_{y2} = 10, k_{\theta 1} = 300, k_{\theta 2} = 50,$$

$$k_1 = 100, k_2 = 100, k_3/k_4 = 120.$$

选择直线和圆形曲线两种参考轨迹进行跟踪控制, 在轮子打滑干扰相同的条件下, 将本文设计的自抗扰反步控制算法与自抗扰控制算法以及传统的PID控制算法进行了对比.

### 5.1 直线轨迹跟踪

全向移动机器人直线参考轨迹的方程为

$$x = t, y = t, \theta = 0.$$

其中  $t \geq 0$  为仿真时间. 机器人的初始位姿状态为

$$[X \ Y \ \theta]^T = [-2 \ 1 \ 0]^T,$$

为验证系统的鲁棒性, 其滑动参数的变化情况设置为

$$\begin{cases} s_1 = 0.5, s_4 = 0.3, s_2 = s_3 = 0, & 10 \leq t \leq 20; \\ s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

相同打滑干扰实验条件下使用不同的控制器进行对比, 得到仿真实验结果: 图5~图7分别为机器人直线轨迹跟踪结果及轨迹跟踪误差变化曲线; 图8为机器人速度变化曲线; 扩张状态观测器实际轨迹估计结果及打滑干扰估计曲线如图9和图10所示.

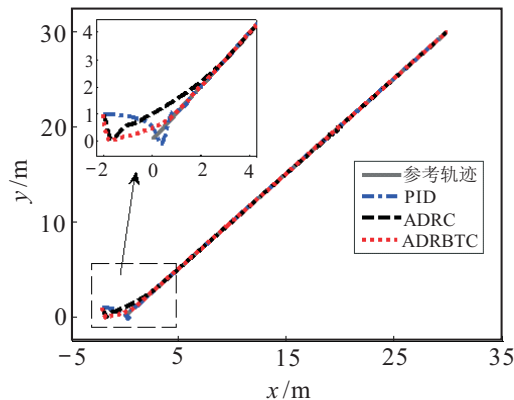


图5  $x$ - $y$  平面直线跟踪轨迹(直线轨迹跟踪实验)

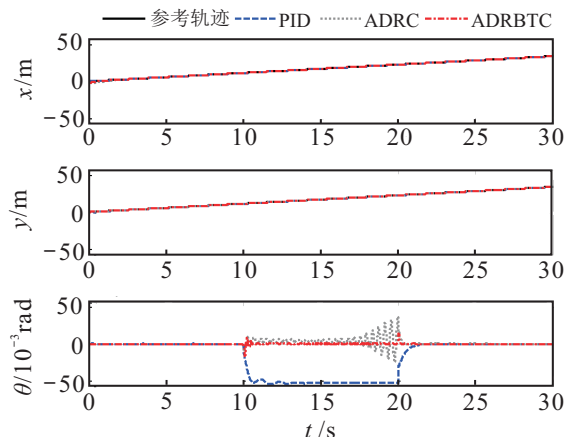


图6  $x, y$  方向轨迹与姿态跟踪曲线(直线轨迹跟踪实验)

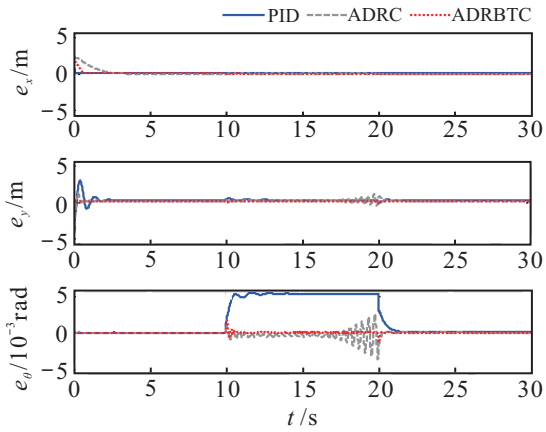


图7 轨迹跟踪误差曲线(直线轨迹跟踪实验)

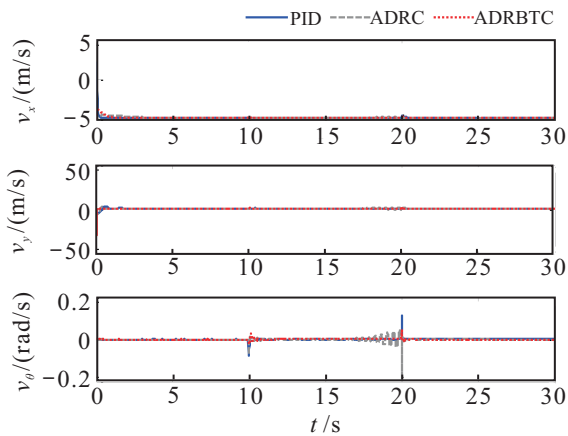


图8 直线速度与角速度曲线(直线轨迹跟踪实验)

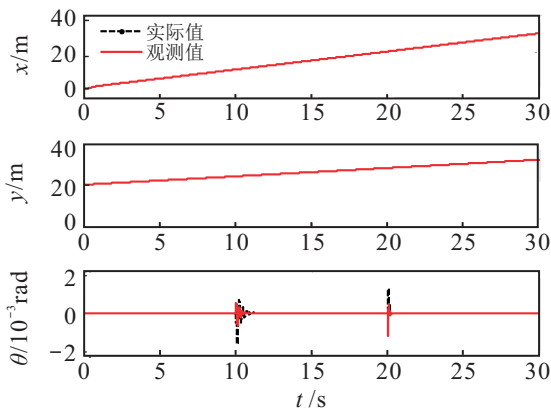


图9 观测器轨迹估计结果(直线轨迹跟踪实验)

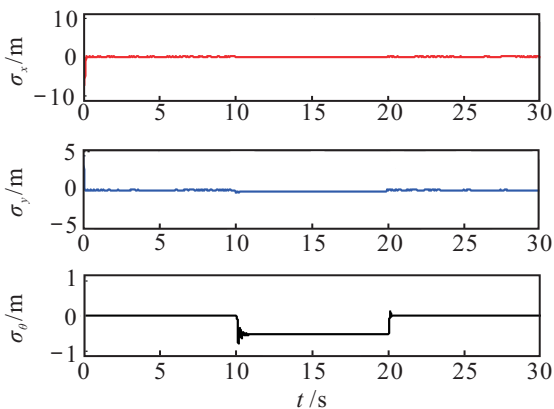


图10 观测器打滑干扰估计结果(直线轨迹跟踪实验)

### 5.2 圆形轨迹跟踪

圆形参考轨迹的方程为

$$\begin{cases} x = 2 \sin t, \\ y = 2 \cos t, \\ \theta = 0. \end{cases}$$

其中:  $t \geq 0$  为仿真时间, 机器人的初始位姿状态为  $[X \ Y \ \theta]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ , 其滑动参数的变化情况设置为

$$\begin{cases} s_1 = 0.4, s_3 = 0.2, s_2 = s_4 = 0, & 10 \leq t \leq 20; \\ s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

相同打滑干扰实验条件下使用不同控制器得到的轨迹跟踪结果如图11~图16所示.

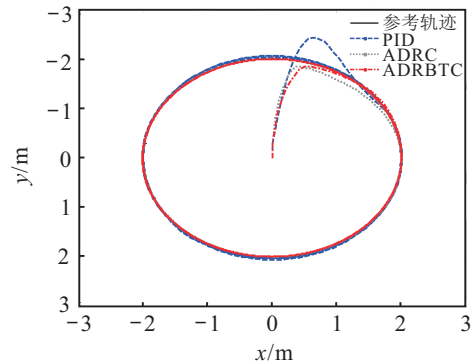


图11 x-y平面直线跟踪轨迹(圆形轨迹跟踪实验)

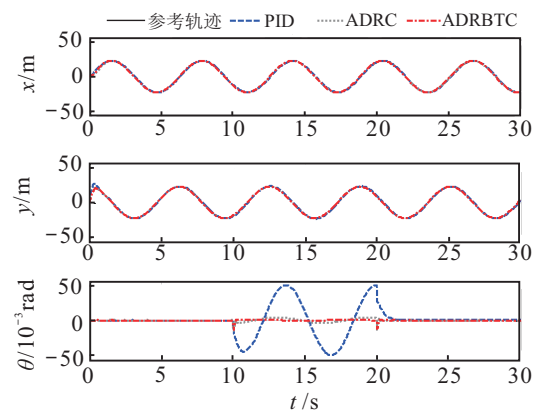


图12 x、y方向轨迹与姿态跟踪曲线(圆形轨迹跟踪实验)

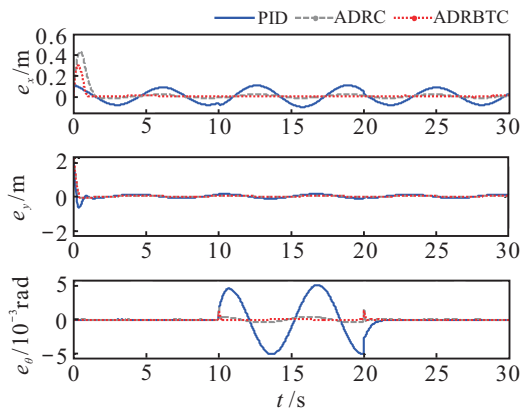


图13 轨迹跟踪误差曲线(圆形轨迹跟踪实验)

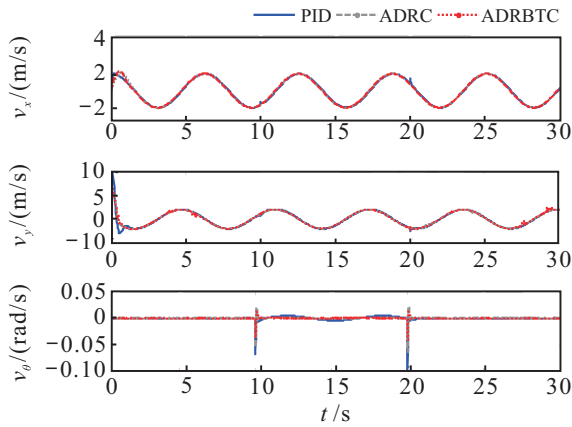


图 14 直线速度与角速度曲线(圆形轨迹跟踪实验)

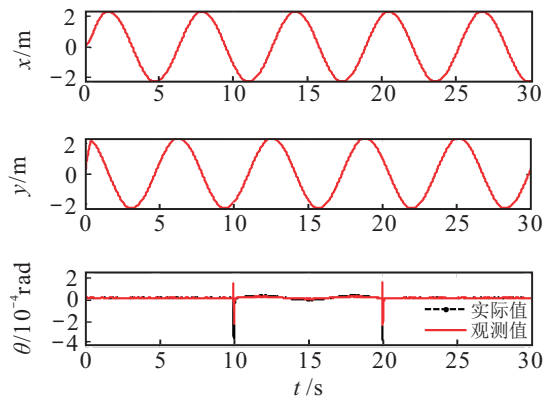


图 15 观测器轨迹估计结果(圆形轨迹跟踪实验)

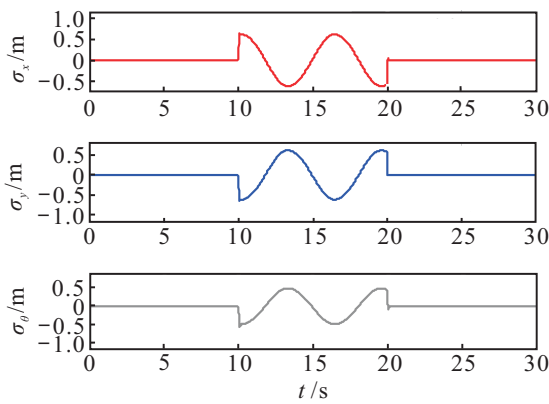


图 16 观测器打滑干扰估计结果(圆形轨迹跟踪实验)

图 11~图 13 为机器人圆形轨迹跟踪结果及轨迹跟踪误差曲线,机器人速度变化曲线如图 14 所示,图 15 和图 16 分别为扩张状态观测器实际轨迹估计结果与打滑干扰估计结果。

### 5.3 姿态控制

在对全向移动机器人进行单独姿态控制时保持位置不变,即输入的期望轨迹信号  $x = 0, y = 0$ ; 期望的姿态方程为

$$\theta = \begin{cases} t, & t < 15; \\ 30 - t, & t \geq 15. \end{cases}$$

其中  $t \geq 0$  为仿真时间,机器人的初始位姿状态为

$$[X \ Y \ \theta]^T = [0 \ 0 \ 0]^T,$$

其滑动参数的变化情况设置为

$$\begin{cases} 0, & t < 3; \\ s_1 = 0.5|\sin(t)|, & 3 \leq t < 5; \\ 0, & 5 \leq t < 15; \\ s_2 = 0.3, s_4 = 0.2, & 15 \leq t < 17; \\ 0, & 17 \leq t < 24; \\ s_1 = 0.2, & 24 \leq t < 26; \\ 0, & t \geq 26. \end{cases}$$

这里未设置的  $s_i$  的值均为 0. 相同打滑干扰实验条件下不同控制器得到的仿真结果如图 17~图 21 所示。

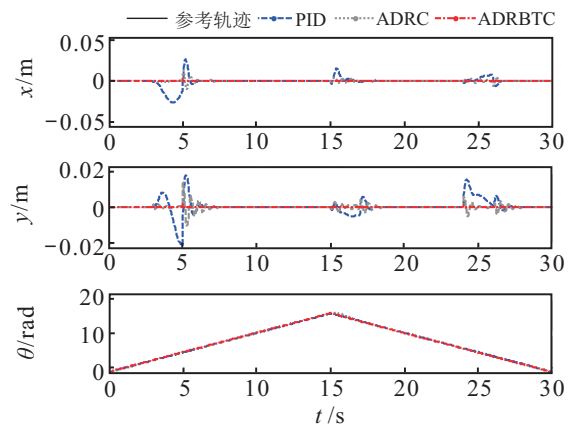


图 17  $x, y$  方向轨迹与姿态跟踪曲线(姿态控制实验)

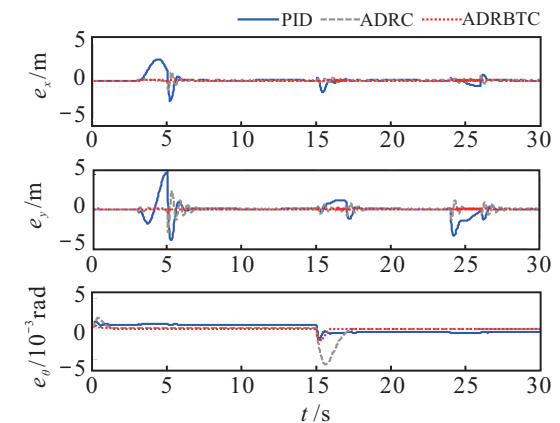


图 18 轨迹跟踪误差曲线(姿态控制实验)

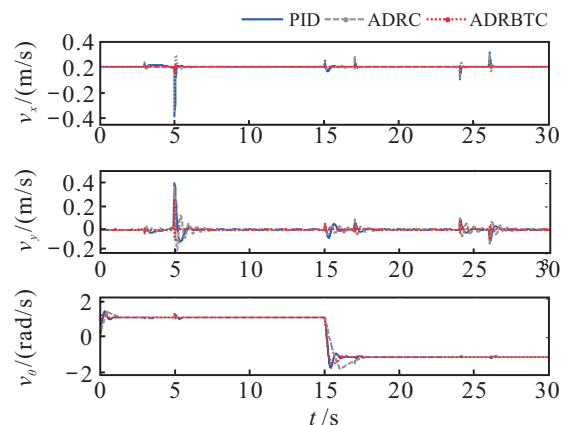


图 19 直线速度与角速度曲线(姿态控制实验)

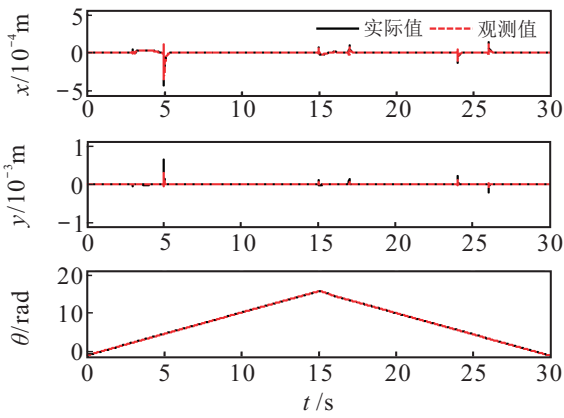


图20 观测器轨迹估计结果(姿态控制实验)

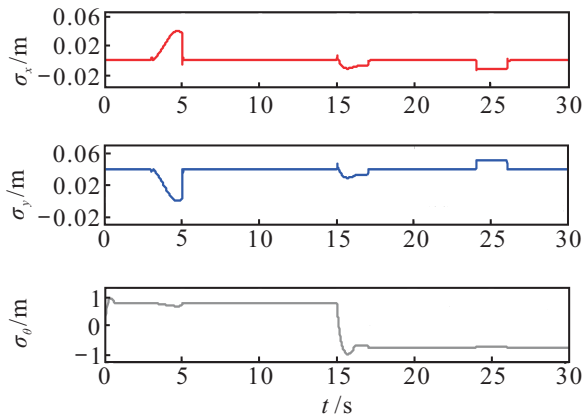


图21 观测器打滑干扰估计结果(姿态控制实验)

图17和图18为机器人轨迹跟踪结果及轨迹跟踪误差变化曲线,图19为机器人速度曲线,图20和图21分别为扩张状态观测器实际轨迹估计结果与打滑干扰估计结果。

仿真实验结果表明,当全向移动机器人出现轮子打滑干扰时,采用传统PID控制器的3组轨迹跟踪曲线均出现较为剧烈的振荡,轨迹跟踪误差较大,误差收敛速度较慢,自抗扰反步控制器与自抗扰控制器均表现出一定的抗干扰能力,但本文所设计的控制器相对于自抗扰控制器与PID控制器,轨迹跟踪曲线稳定性更好,抗打滑干扰能力更强,轨迹跟踪误差更小,且跟踪误差收敛到0的速度更快。图9、图10、图15、图16、图20和图21表明本文所采用的扩张状态观测器具有较好的状态估计能力,可以实时估计机器人系统的实际轨迹及轮子打滑干扰。

综上所述,针对轮子打滑状态下全向移动机器人轨迹跟踪控制问题,自抗扰反步控制器具有良好的鲁棒性,机器人可以较为快速精确地跟踪期望轨迹。仿真实验结果验证了自抗扰反步控制算法的有效性。

## 6 结论

本文针对轮子打滑状态下的Mecanum轮全向移动机器人轨迹跟踪控制问题设计了自抗扰反步轨迹

跟踪控制器,该控制方法利用扩张状态观测器实时地估计系统状态量及打滑干扰状态量,并对控制系统进行扰动补偿,得到系统的控制输入量。应用Lyapunov方法从理论上分析了系统的稳定性。仿真结果表明,存在轮子打滑干扰的情况下,应用所提出的控制方法的全向机器人轨迹跟踪时具有良好的鲁棒性能,控制精度更高,轨迹跟踪能力更强,对模型的依赖性较低,具有更好的抗干扰能力。仿真实验结果验证了该控制算法的有效性,这为后期的实物平台实验提供了理论依据。下一步工作将在全向移动机器人实验平台上对本文所设计的控制算法进行验证和进一步的完善。

## 参考文献(References)

- [1] Kang J W, Kim B S, Chung M J. Development of omni-directional mobile robots with mecanum wheels assisting the disabled in a factory environment[C]. Proc of the 8th International Conference on Control, Automation and Systems. Seoul: IEEE, 2008: 2070-2075.
- [2] 贾松敏, 郑鹏, 徐涛, 等. 基于激光和单目相机信息融合的智能轮椅避障策略研究[J]. 计算机测量与控制, 2015, 23(12): 4156-4160.  
(Jia S M, Zheng P, Xu T, et al. Obstacle avoidance of intelligent wheelchair based on laser and monocular vision fusion[J]. Computer Measurement & Control, 2015, 23(12): 4156-4160.)
- [3] 杨源鑫. 轮式全向移动物流平台的运动学建模与轨迹跟踪控制[D]. 北京: 北京印刷学院机电工程学院, 2017.  
(Yang Y X. Kinematics modeling and trajectory tracking control of wheeled omni-directional mobile logistics platform[D]. Beijing: School of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, 2017.)
- [4] Tsai C C, Wu H L, Tai F C. Intelligent sliding-mode formation control for uncertain networked heterogeneous Mecanum-wheeled omnidirectional platforms[C]. Proc of the 20th IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Banff: IEEE, 2017: 539-544.
- [5] 李运奇, 杨宜民, 王建彬. 基于动力学模型的四轮全向机器人滑模轨迹跟踪控制[J]. 科技广场, 2014(1): 89-93.  
(Li Y Q, Yang Y M, Wang J B. Sliding mode trajectory tracking control based on dynamic model for four-wheel drive omni-directional mobile robots[J]. Science Mosaic, 2014(1): 89-93.)
- [6] 吴靖楠, 贾英民. 基于Mecanum轮的自由基座设计与滑模控制[J]. 计算机仿真, 2015, 32(7): 402-407.  
(Wu J N, Jia Y M. Design and sliding mode control of free base based on mecanum wheel[J]. Computer Simulation,

- 2015, 32(7): 402-407.)
- [7] Tsai C C, Wu H L, Tai F C, et al. Adaptive backstepping decentralized formation control using fuzzy wavelet neural networks for uncertain mecanum-wheeled omnidirectional multi-vehicles[C]. IEEE International Conference on Industrial Technology. Taipei, 2016: 1446-1451.
- [8] 田琦, 李琪, 姚鹏, 等. 基于模糊PID的全方位移动机器人运动控制[J]. 电子科技, 2011, 24(9): 131-133.  
(Tian Q, Li Q, Yao P, et al. Motion control of omnidirectional robot based on fuzzy PID control[J]. Electronic Science & Technology, 2011, 24(9): 131-133.)
- [9] Alakshendra V, Chiddarwar S S. Adaptive robust control of mecanum-wheeled mobile robot with uncertainties[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87(4): 2147-2169.
- [10] Tsai C C, Wu H L, Tai F C, et al. Distributed consensus formation control with collision and obstacle avoidance for uncertain networked omnidirectional multi-robot systems using fuzzy wavelet neural networks[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2016, 19(5): 1-17.
- [11] 吴定会, 黄旭东, 纪志成. 全方位移动机器人模糊自适应PID控制[J]. 微特电机, 2007, 35(11): 32-34.  
(Wu D H, Huang X D, Ji Z C. Velocity control of an omnidirectional mobile robot based on fuzzy adaptive PID[J]. Small & Special Electrical Machines, 2007, 35(11): 32-34.)
- [12] Lin L, Shih H Y. Modeling and adaptive control of an omni-mecanum-wheeled robot[J]. Intelligent Control & Automation, 2013, 2013(2): 166-179.
- [13] 康升征, 吴洪涛. 全向移动机器人模糊自适应滑模控制方法研究[J]. 机械设计与制造工程, 2017, 46(3): 70-75.  
(Kang S Z, Wu H T. Research on fuzzy adaptive sliding mode control of omni-directional mobile robot[J]. Machine Design & Manufacturing Engineering, 2017, 46(3): 70-75.)
- [14] 马书根, 赵珈靓, 任超. 基于无源性的全方位移动机器人自抗扰控制[J]. 控制与决策, 2018, 33(6): 1081-1086.  
(Ma S G, Zhao J L, Ren C. Passivity-based active disturbance rejection control of an omni-directional mobile robot[J]. Control & Decision, 2018, 33(6): 1081-1086.)
- [15] 崔明月, 孙棣华, 李永福, 等. 轮子纵向打滑条件下的移动机器人自适应跟踪控制[J]. 控制与决策, 2013, 28(5): 664-670.  
(Cui M Y, Sun D H, Li Y F, et al. Adaptive tracking control of wheeled mobile robots in presence of longitudinal slipping[J]. Control & Decision, 2013, 28(5): 664-670.)
- [16] Cui M, Huang R, Liu H, et al. Adaptive tracking control of wheeled mobile robots with unknown longitudinal and lateral slipping parameters[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 78(3): 1811-1826.
- [17] Gonzalez R, Fiacchini M, Alamo T, et al. Adaptive control for a mobile robot under slip conditions using an LMI based approach[C]. Proc of the 10th European Control Conf. Budapest, 2009: 23-26.
- [18] 韩京清. 自抗扰控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2013: 243-287.  
(Han J Q. Active disturbance rejection control technique[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2013: 243-287.)
- [19] Levanta A. Robust exact differentiation via sliding mode technique[J]. Automatica, 1998, 34(3): 379-384.

### 作者简介

- 贾松敏(1964—), 女, 教授, 博士生导师, 从事智能服务机器人、计算机视觉等研究, E-mail: jsm@bjut.edu.cn;
- 卢兴阳(1992—), 男, 硕士生, 从事机器人运动控制的研究, E-mail: xingyanglu@emails.bjut.edu.cn;
- 张祥银(1986—), 男, 讲师, 博士, 从事机器人运动控制的研究, E-mail: xy\_zhang@bjut.edu.cn;
- 张国梁(1990—), 男, 博士生, 从事机器视觉、图像处理的研究, E-mail: zhangglmxy@gmail.com.

(责任编辑: 孙艺红)