

控制与决策

Control and Decision

完全分布式异构多智能体系统有限时间跟踪

董新民, 丁超, 陈勇, 刘棕成, 徐浩军

引用本文:

董新民, 丁超, 陈勇, 等. 完全分布式异构多智能体系统有限时间跟踪[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 870–876.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0869>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于观测器的线性时变时滞多智能体系统一致性

Observer-based consensus of linear multi-agent systems with time-varying delays
控制与决策. 2019, 34(9): 1885–1892 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0103>

基于事件驱动的二次凸优化问题分布式优化算法

Distributed event-triggered algorithm for quadratic convex optimization problem
控制与决策. 2019, 34(8): 1635–1644 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0080>

基于记忆状态的多智能体系统快速分组一致性

Fast group consensus of multi-agent systems based on memory states
控制与决策. 2017, 32(3): 535–540 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0126>

事件触发机制下的二阶多智能体系统的一致性

Event-triggered consensus control of second-order multi-agent systems
控制与决策. 2017, 32(12): 2261–2267 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1248>

具有时滞和时变系数的离散多智能体系统的一致性

Consensus of discrete multi-agent systems with delay and time-variant coefficients
控制与决策. 2016, 31(10): 1785–1790 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1193>

一类离散时间异构多智能体系统的一致平衡点分析

Consensus equilibrium point analysis for a class of discrete-time heterogeneous multi-agent systems
控制与决策. 2015, 30(8): 1479–1484 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0960>

基于自适应加权融合的分布式滤波算法

Adaptive weighted fusion based linear distributed filtering algorithm
控制与决策. 2015(4): 605–610 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2013.1780>

考虑时序约束的多智能体协同任务分配

Multi-agents cooperative task allocation with precedence constrains
控制与决策. 2015, 30(11): 1999–2003 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1114>

完全分布式异构多智能体系统有限时间跟踪

董新民¹, 丁超^{1,2}, 陈勇^{1†}, 刘棕成¹, 徐浩军¹

(1. 空军工程大学 航空工程学院, 西安 710038; 2. 空军工程大学 研究生院, 西安 710051)

摘要: 针对异构二阶非线性多智能体系统有限时间跟踪问题, 提出一种完全分布式一致性控制方法, 消除对于误差上界与 Laplacian 矩阵特征值等全局信息的依赖. 设计一种只包含局部信息的有限时间一致性协议, 并提出自适应增益的分布式切换机制, 使得各增益以分段常数的方式进行调节, 简化了相邻两次切换时间区间内稳定性分析过程. 通过反证法证明多智能体系统必将实现有限时间一致性, 并且自适应增益保持有界. 仿真结果验证了所提出的完全分布式一致性协议的有效性.

关键词: 异构多智能体系统; 完全分布式; 有限时间一致性; 自适应切换逻辑

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Fully distributed finite-time tracking of heterogeneous multi-agent systems

DONG Xin-min¹, DING Chao^{1,2}, CHEN Yong^{1†}, LIU Zong-cheng¹, XU Hao-jun¹

(1. Aeronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China; 2. Graduate College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: For the finite-time tracking problem for heterogeneous second-order nonlinear multi-agent systems, a fully distributed consensus control method is proposed to eliminate the dependence of the global information, including the upper bound of errors and the eigenvalues of the Laplacian matrix. Based on local information only, a finite-time consensus protocol is designed. To simplify the stability analysis of the time interval between two adjacent switching times, a distributed switching mechanism of the adaptive gains is proposed with the gains regulated as piecewise constants. By seeking a contradiction, it is proved that the multi-agent systems must reach finite-time consensus and the adaptive gains are bounded. A simulation example is provided to illustrate the effectiveness of the proposed fully distributed consensus protocol.

Keywords: heterogeneous multi-agent systems; fully distributed; finite-time consensus; adaptive switching logic

0 引言

近年来, 由于在群集运动^[1]、编队控制^[2]和无线传感器网络^[3]等问题上的大量应用, 多智能体系统协调控制理论得到了广泛而深入的研究. 一致性问题是多智能体系统协调控制的基本问题, 旨在通过合理地设计控制协议, 在满足一定的通信拓扑条件下, 实现全局的状态或输出一致.

由于以机械系统为代表的二阶系统广泛存在于实际问题中, 研究二阶多智能体系统一致性控制问题具有重要的实际意义. 文献[4-7]针对二阶积分器形式的同构多智能体系统, 提出了几种经典的一致性协议. 文献[8-9]基于上述一致性协议, 分别研究了具有二阶积分和二阶线性形式的同构多智能体系统,

揭示了控制增益的选择与图的 Laplacian 矩阵特征值之间的关系. 进一步, 文献[10]将上述结果拓展到了 Lipschitz 非线性同构系统. 为了解决增益设计依赖于 Laplacian 矩阵特征值的问题, 文献[11]设计了增益的分布式自适应律, 实现了 Lipschitz 非线性同构系统的自适应一致性. 考虑到多智能体系统同构的假设对实际使用提出了较高的限制条件, 文献[12]研究了异构非线性多智能体系统的一致性问题, 提出了相应的一致性协议. 但是, 上述文献都只能实现二阶多智能体系统的渐近一致, 这意味着理论上调节时间趋于无穷.

相比而言, 有限时间一致性是一种更为理想的一致性形式, 它具有更快的收敛速度, 更高的收敛精度

收稿日期: 2018-06-25; 修回日期: 2018-08-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61473307, 61603411, 61304120); 中国博士后科学基金项目 (2016M592966, 2017M613417).

责任编辑: 关新平.

†通讯作者. E-mail: chen_y043@163.com.

以及更强的抗扰动性能^[13-14]. 针对二阶多智能体系统有限时间一致性问题, 大量文献对其进行了深入研究. 文献[15-16]研究了同构二阶积分多智能体系统的有限时间一致性问题, 分别基于观测器和滑模控制器设计了相应的控制协议. 文献[17]针对此类多智能体系统, 考虑了有界扰动存在的情况, 所提出的一致性协议能够保证一致性误差在有限时间内收敛到与误差上界和Laplacian矩阵特征值有关的某个邻域. 为了实现零误差的有限时间收敛, 文献[18]设计了积分滑模控制协议, 解决了扰动存在时此类多智能体系统的有限时间一致性问题. 此外, 文献[19]将问题拓展到了异构二阶非线性多智能体系统, 在非线性和误差存在已知上界的假设下, 通过合理设计控制增益实现了有限时间一致性. 进一步, 文献[20]针对异构二阶非线性多智能体系统, 在获得有限时间一致性的同时还实现了连通性保持. 但是, 文献[17-20]所提出的控制协议都需要使用误差上界与Laplacian矩阵特征值信息, 应该指出的是, 上述信息均属于全局信息, 对于这类信息的依赖一定程度上降低了控制协议的分布式程度.

基于此, 本文研究完全分布式异构二阶非线性多智能体系统有限时间一致性问题, 设计了增益的自适应切换逻辑, 在不需要知道任何全局信息的条件下实现了有限时间一致性, 并且自适应切换增益有限时间稳定. 首次在未使用包括误差上界与Laplacian矩阵特征值在内的任何全局信息的基础上, 实现了异构二阶非线性多智能体系统有限时间一致性, 相比于其他异构有限时间一致性结果^[17-20]分布式程度更高. 将多智能体系统自适应增益设计为以分段常数的方式进行调节, 与连续变化方式相比, 简化了相邻两次切换时间区间内的稳定性分析过程, 同时将反证法用于稳定性分析. 仿真结果表明, 切换增益在短时间内完成了自适应过程, 并且多智能体系统最终实现了有限时间一致性.

1 问题描述

对于由1个领导者和 N 个跟随者组成的多智能体系统, 其通信关系由图 $G = (V, E, A)$ 描述. 其中 $V = \{0, 1, \dots, N\}$ 为顶点集, 顶点0代表领导者, 其余顶点代表各跟随者; $E \subseteq V \times V$ 为边集, 边 $(j, i) \in E$ 表示智能体 i 能够获得智能体 j 的信息, 且智能体 j 称为智能体 i 的邻居; 邻接矩阵 $A = [a_{ij}]_{(N+1) \times (N+1)}$ 描述了边的连接权重, 如果 $(j, i) \in E$, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$, 特别地, $a_{ii} = 0$. 对于 $\forall i, j \in V$, 若 $(j, i) \in E$, 则 $(i, j) \in E$, 那么图 G 称为无向图. 如果存在一个顶

点序列 i_1, i_2, \dots, i_l , 使得 $(i_k, i_{k+1}) \in E, k = 1, 2, \dots, l - 1$, 则称存在一条从顶点 i_1 到顶点 i_l 的路径. 如果无向图 G 中任意两个相异顶点之间都存在至少一条路径, 则称 G 为无向连通图. 图的Laplacian矩阵定义为 $L = [l_{ij}]_{(N+1) \times (N+1)}$, 其中 $l_{ii} = \sum_{j=0}^N a_{ij}, l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$.

本文所述多智能体间的通信关系满足如下假设.

假设1 领导者不能从 N 个跟随者处获得任何信息, N 个跟随者之间的通信关系由无向连通图描述, 且至少存在一个跟随者能获得领导者的状态信息. 即 $N + 1$ 个智能体对应的Laplacian矩阵 L 可以表示为

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ b & L_1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其中: b 为 nonzero 列向量, $L_1 = L_f - \text{diag}\{b\}$, L_f 为由 N 个跟随者组成的无向连通图的Laplacian矩阵.

考虑 N 个具有如下二阶不确定非线性动力学的跟随者:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i, \\ \dot{v}_i &= u_i + f_i(x_i, v_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $x_i \in R^n$ 为位置, $v_i \in R^n$ 为速度, $u_i \in R^n$ 为控制输入, $f_i(x_i, v_i, t) : R^n \times R^n \times R \mapsto R^n$ 为未知非线性函数.

领导者的非线性动力学描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= v_0, \\ \dot{v}_0 &= f_0(x_0, v_0, t). \end{aligned} \quad (3)$$

对于非线性多智能体系统(2)和(3), 满足如下假设.

假设2 所有跟随者和领导者的非线性动力学误差有界, 即

$$\|f_i(x_i, v_i, t) - f_0(x_0, v_0, t)\|_\infty \leq c < \infty. \quad (4)$$

其中: 上界 c 为未知常数, $i = 1, 2, \dots, N$.

下面对本文需要解决的问题进行定义.

定义1 若对于每一个跟随者 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 都存在有限时刻 $T_i > 0$ 使得 $\lim_{t \rightarrow T_i} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0, \lim_{t \rightarrow T_i} \|v_i(t) - v_0(t)\| = 0$, 且 $\forall t \geq T_i, x_i(t) = x_0(t), v_i(t) = v_0(t)$ 成立, 则称多智能体系统实现了有限时间跟踪一致性.

定义2 若协议 $u_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的表达式中只含有智能体 i 的邻居的信息, 而未使用包括Laplacian矩阵 L 特征值和误差上界 c 等信息在内的全局信息, 则称协议 u_i 是完全分布式的.

为了解决完全分布式异构多智能体系统有限时

间跟踪问题,首先给出如下引理^[21-24].

引理1 在假设1所述的通信拓扑下, L_1 是对称正定阵.

引理2 对于 $\forall x \geq 0, y \geq 0$, 若 $\varepsilon > 0, p > 1, q > 1$, 且满足 $(p-1)(q-1) = 1$, 则有

$$xy \leq \frac{\varepsilon^p x^p}{p} + \frac{y^q}{q\varepsilon^q}. \quad (5)$$

引理3 对于 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, 定义向量 p -范数为

$$\|x\|_p \triangleq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

若 $1 \leq p \leq q < \infty$, 则 $\forall x \in R^n, \|x\|_q \leq \|x\|_p$.

引理4 若 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, 则

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

式(6)意味着 $\forall x \in R^n, \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$.

引理5 假设 $V(t)$ 是定义在时间区间 $[0, +\infty)$ 上的非负函数, 且满足

$$\dot{V}(t) \leq -\rho(V(t))^v, \quad (7)$$

其中常数 $\rho > 0$ 且 $0 < v < 1$, 则

$$\begin{cases} V^{1-v}(t) \leq [V^{1-v}(0) - (1-v)\rho t], \\ 0 \leq t < V^{1-v}(0)/(\rho(1-v)); \\ V^{1-v}(t) = 0, t \geq V^{1-v}(0)/(\rho(1-v)). \end{cases} \quad (8)$$

2 主要结果

对于多智能体系统(2)、(3), 其Laplacian矩阵 L 特征值和误差上界 c 未知, 将完全分布式协议设计如下:

$$u_i = \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j - \lambda k_i \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=0}^N a_{ij} (x_i - x_j) \right) - k_i \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=0}^N a_{ij} (v_i - v_j) \right) \right) \left(\sum_{j=0}^N a_{ij} \right)^{-1}. \quad (9)$$

其中: $\lambda > 1$ 为任意常数; k_i 为正的自适应增益, 按图1中基于逻辑的分布式切换机制进行在线调节; a_{ij} 为邻接矩阵 A 的第 (i, j) 个元素; $\operatorname{sgn}(\xi)$ 为对向量 $\xi \in R^n$ 的每个元素取符号函数.

本文以分段常数的变化方式设计自适应增益 $k_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的切换机制如下.

1) 初始化.

step 1: 任意选择 $\delta_i, h_{i0}, \Delta h_i > 0$, 选择 $\lambda > 1$ 与式(9)一致, 令 $\theta_i = 2\lambda h_{i0} \sqrt{n}$.

step 2: 定义严格单调递增的自适应增益序列 $h_i(p_i) = h_{i0} + p_i \Delta h_i, p_i \in N$. 令 $k_i = h_{i0}, t_{si} = 0$, 即 h_{i0} 为第 i 个自适应增益的初始值.

2) 切换逻辑.

step 1: 定义如下切换判断函数:

$$V_i = \left[\lambda k_i \left\| \sum_{j=0}^N a_{ij} (x_i - x_j) \right\|_1 + \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=0}^N a_{ij} (v_i - v_j) \right\|_2 \right]^2 + \theta_i \sum_{j=0}^N a_{ij} (x_i - x_j)^T \sum_{j=0}^N a_{ij} (v_i - v_j). \quad (10)$$

当 $t > t_{si}$ 时, 如果

$$V_i^{\frac{1}{3}}(t) > \max \left\{ V_i^{\frac{1}{3}}(t_{si}^+) + \frac{1}{3} [\delta_i - (\lambda - 1) \times h_{i0} \sqrt{n} (t - t_{si})], 0 \right\}, \quad (11)$$

则 k_i 切换为序列 $\{h_i\}$ 中的下一个值, 并且 t_{si} 重设为当前时刻 t .

step 2: 重复执行上述操作.

需要指出的是, 在每一个切换时刻 t_{si} , 由于 k_i 会发生跳变, $V_i(t_{si}^-) \neq V_i(t_{si}^+)$. 取式(11)所示切换条件, 理论上可证明有限时间跟踪一致性, 从而 k_i 也是有界的, 但由于计算误差的存在, 在实际应用或仿真中, 函数 $\max\{\cdot\}$ 中包含理想值 0 可能会造成 k_i 无限增大, 在实际应用中, 应将零更换为一个很小的正值 ε . 图1详细描述了上述切换机制.

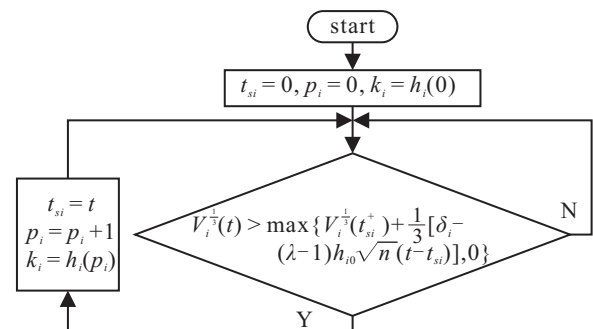


图1 自适应增益 k_i 的分布式切换逻辑

定理1 在完全分布式协议(9)和图1所述的切换机制下, 多智能体系统将会实现有限时间跟踪一致性, 且自适应增益 k_i 保持有界, $i = 1, 2, \dots, N$.

证明 令 $\tilde{x}_i = x_i - x_0, \tilde{v}_i = v_i - v_0, \tilde{f}_i(\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, t) = f_i(x_i, v_i, t) - f_0(x_0, v_0, t)$, 多智能体误差系统可写为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i &= \tilde{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{\tilde{v}}_i &= u_i + \tilde{f}_i(\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, t). \end{aligned} \quad (12)$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= [\tilde{x}_1^T, \dots, \tilde{x}_N^T]^T, \quad \tilde{V} = [\tilde{v}_1^T, \dots, \tilde{v}_N^T]^T, \\ U &= [u_1^T, \dots, u_N^T]^T, \quad k = [k_1, \dots, k_N]^T, \\ F &= [\tilde{f}_1^T(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, t), \dots, \tilde{f}_N^T(\tilde{x}_N, \tilde{v}_N, t)]^T, \end{aligned}$$

则系统(12)可写为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}} &= \tilde{V}, \\ \dot{\tilde{V}} &= U + F. \end{aligned} \quad (13)$$

根据完全分布式协议(9),并引入 \otimes 表示矩阵的Kronecker积,可得

$$(L_1 \otimes I_n)U = -\lambda(\text{diag}\{k\} \otimes I_n)\text{sgn}((L_1 \otimes I_n)\tilde{X}) - (\text{diag}\{k\} \otimes I_n)\text{sgn}((L_1 \otimes I_n)\tilde{V}). \quad (14)$$

进一步,令

$$e_x = [e_{x1}^T, \dots, e_{xN}^T]^T = (L_1 \otimes I_n)\tilde{X} \in R^{Nn},$$

$$e_v = [e_{v1}^T, \dots, e_{vN}^T]^T = (L_1 \otimes I_n)\tilde{V} \in R^{Nn}.$$

其中

$$e_{xi} = [e_{xi1}, \dots, e_{xin}]^T \in R^n,$$

$$e_{vi} = [e_{vi1}, \dots, e_{vin}]^T \in R^n.$$

对式(13)两边同时乘以 $L_1 \otimes I_n$,并将式(14)代入,可得

$$\dot{e}_x = e_v,$$

$$\dot{e}_v = -[\lambda(\text{diag}\{k\} \otimes I_n)\text{sgn}(e_x) + (\text{diag}\{k\} \otimes I_n)\text{sgn}(e_v) - (L_1 \otimes I_n)F]. \quad (15)$$

记 $(L_1 \otimes I_n)F = [\bar{f}_1^T, \dots, \bar{f}_N^T]^T \in R^{Nn}$,由假设2可知 $\|F\|_\infty \leq c$,因此 $\|(L_1 \otimes I_n)F\|_\infty$ 有界,记其上界为未知常数 \bar{c} ,则对于每个跟随者 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$,有

$$\dot{e}_{xi} = e_{vi},$$

$$\dot{e}_{vi} = -\lambda k_i \text{sgn}(e_{xi}) - k_i \text{sgn}(e_{vi}) + \bar{f}_i, \quad (16)$$

其中 $\|\bar{f}_i\|_\infty \leq \bar{c}, i = 1, 2, \dots, N$.

取切换逻辑中的切换判断函数 V_i 为稳定性证明的Lyapunov函数,进一步可简记为

$$V_i = \left[\lambda k_i \|e_{xi}\|_1 + \frac{1}{2} e_{vi}^T e_{vi} \right]^{\frac{3}{2}} + \theta_i e_{xi}^T e_{vi}. \quad (17)$$

下面分3步对定理1的结果进行证明.

step 1: 证明Lyapunov函数 V_i 的正定性.

根据引理2和引理3,有

$$|\theta_i e_{xi}^T e_{vi}| \leq \theta_i \sum_{m=1}^n |e_{xim}| |e_{vim}| \leq \theta_i \sum_{m=1}^n \left[\frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} |e_{xim}|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3h^3} |e_{vim}|^3 \right] = \frac{2\theta_i}{3} h^{\frac{3}{2}} \sum_{m=1}^n |e_{xim}|^{\frac{3}{2}} + \frac{\theta_i}{3h^3} \|e_{vi}\|_3^3 \leq \frac{2\theta_i}{3} h^{\frac{3}{2}} \sum_{m=1}^n |e_{xim}|^{\frac{3}{2}} + \frac{\theta_i}{3h^3} \|e_{vi}\|_1^3, \quad (18)$$

其中 $h > 0$ 为一正常数. 根据引理3和引理4,有

$$\left[\lambda k_i \|e_{xi}\|_1 + \frac{1}{2} e_{vi}^T e_{vi} \right]^{\frac{3}{2}} \geq \left[\lambda k_i \|e_{xi}\|_1 + \frac{1}{2} e_{vi}^T e_{vi} \right]^{\frac{3}{2}} \geq$$

$$\lambda^{\frac{3}{2}} k_i^{\frac{3}{2}} \sum_{m=1}^n |e_{xim}|^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2n} \right)^{\frac{3}{2}} \|e_{vi}\|_1^3. \quad (19)$$

根据式(18)、(19),可得

$$V_i \geq \left(\lambda^{\frac{3}{2}} k_i^{\frac{3}{2}} - \frac{2\theta_i}{3} h^{\frac{3}{2}} \right) \sum_{m=1}^n |e_{xim}|^{\frac{3}{2}} + \left[\left(\frac{1}{2n} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\theta_i}{3h^3} \right] \|e_{vi}\|_1^3. \quad (20)$$

令式(20)两项常系数为正数,即 $\lambda^{\frac{3}{2}} k_i^{\frac{3}{2}} - 2\theta_i h^{\frac{3}{2}}/3 > 0$ 和 $(1/2n)^{\frac{3}{2}} - \theta_i/3h^3 > 0$,等价于 $(\theta_i/3)^{\frac{1}{3}}/\sqrt{2n} < h < (3/2\theta_i)^{\frac{2}{3}} \lambda k_i$,满足此条件的 h 存在当且仅当

$$\theta_i < \frac{3\lambda k_i \sqrt{n}}{2^{\frac{1}{3}}}. \quad (21)$$

对于单调递增的自适应增益向量 k_i ,由图1中的切换机制可知 $k_i(t) \geq k_i(0) = h_{i0} > 0$. 由于 $\theta_i = 2\lambda h_{i0} \sqrt{n}$,此时式(21)恒成立,即 V_i 正定.

step 2: 分析图1所示相邻两次切换时刻之间Lyapunov函数 V_i 对时间的导数.

注意到,在图1所示相邻的两次切换时刻之间,自适应增益 k_i 为常数,此时Lyapunov函数 V_i 对 t 求导并将式(16)代入,可得

$$\dot{V}_i = \frac{3}{2} \left[\lambda k_i \|e_{xi}\|_1 + \frac{1}{2} e_{vi}^T e_{vi} \right]^{\frac{1}{2}} [\lambda k_i e_{vi}^T \text{sgn}(e_{xi}) - e_{vi}^T (\lambda k_i \text{sgn}(e_{xi}) + k_i \text{sgn}(e_{vi}) - \bar{f}_i)] + \theta_i e_{vi}^T e_{vi} - \theta_i e_{xi}^T (\lambda k_i \text{sgn}(e_{xi}) + k_i \text{sgn}(e_{vi}) - \bar{f}_i) = -\frac{3}{2} \left[\lambda k_i \|e_{xi}\|_1 + \frac{1}{2} e_{vi}^T e_{vi} \right]^{\frac{1}{2}} [k_i \|e_{vi}\|_1 - e_{vi}^T \bar{f}_i] + \theta_i e_{vi}^T e_{vi} - \theta_i [\lambda k_i \|e_{xi}\|_1 + k_i e_{xi}^T \text{sgn}(e_{vi}) - e_{xi}^T \bar{f}_i]. \quad (22)$$

下面分析当 $k_i > \bar{c}$ 时相邻的两次切换时刻之间 \dot{V}_i 的情况,此时有

$$k_i \|e_{vi}\|_1 - e_{vi}^T \bar{f}_i > 0. \quad (23)$$

因为

$$[\lambda k_i \|e_{xi}\|_1 + e_{vi}^T e_{vi}/2]^{\frac{1}{2}} \geq \|e_{vi}\|_2/\sqrt{2} \geq \|e_{vi}\|_1/\sqrt{2n},$$

可得

$$\dot{V}_i \leq - \left[\frac{3}{2\sqrt{2n}} (k_i - \bar{c}) - \theta_i \right] \|e_{vi}\|_1^2 - \theta_i [(\lambda - 1)k_i - \bar{c}] \|e_{xi}\|_1. \quad (24)$$

显然,若进一步满足 $k_i > \bar{c} + 2\theta_i \sqrt{2n}/3$ 且 $k_i > \bar{c}/(\lambda - 1)$,则 \dot{V}_i 在对应的两次切换时刻之间负定.

利用引理3和引理4可知,对任意 $z \in R^n$,均有 $\|z\|_1^{\frac{3}{2}} \leq n^{\frac{3}{4}} \|z\|_2^{\frac{3}{2}} \leq n^{\frac{3}{4}} \|z\|_3^{\frac{3}{2}}$,故考虑如下放缩:

$$\left[\lambda k_i \|e_{xi}\|_1 + \frac{1}{2} e_{vi}^T e_{vi} \right]^{\frac{3}{2}} \leq 2^{\frac{3}{4}} \left[(\lambda k_i \|e_{xi}\|_1)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2} e_{vi}^T e_{vi} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \leq$$

$$2^{\frac{3}{4}} \left[(\lambda k_i \|e_{xi}\|_1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \|e_{vi}\|_1^3 \right]. \quad (25)$$

将式(18)和(25)代入(17),进一步可以得到关于 V_i 的上界估计如下:

$$\begin{aligned} V_i &\leq \left[(\sqrt{2}\lambda k_i)^{\frac{3}{2}} + \frac{2\theta_i}{3} h^{\frac{3}{2}} \right] \|e_{xi}\|_1^{\frac{3}{2}} + \\ &\left[\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} + \frac{\theta_i}{3h^3} \right] \|e_{vi}\|_1^3 = \\ &\beta_{i1} \|e_{xi}\|_1^{\frac{3}{2}} + \beta_{i2} \|e_{vi}\|_1^3. \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta_{i1} &= (\sqrt{2}\lambda k_i)^{\frac{3}{2}} + 2\theta_i h^{\frac{3}{2}}/3, \\ \beta_{i2} &= 1/2^{\frac{3}{4}} + \theta_i/3h^3. \end{aligned}$$

令 $\alpha_{i1} = \theta_i[(\lambda - 1)k_i - \bar{c}]$, $\alpha_{i2} = (k_i - \bar{c}) \times 3/2\sqrt{2n} - \theta_i$, 由式(24), 当 $k_i > \max\{\bar{c}/(\lambda - 1), \bar{c} + 2\theta_i\sqrt{2n}/3\}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\alpha_{i1} \|e_{xi}\|_1 - \alpha_{i2} \|e_{vi}\|_1^2 \leq \\ &-(\alpha_{i1}^{\frac{2}{3}} \|e_{xi}\|_1^{\frac{3}{2}} + \alpha_{i2}^{\frac{2}{3}} \|e_{vi}\|_1^3)^{\frac{3}{2}} \leq -\gamma_i V_i^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (27)$$

其中 γ_i 满足 $\alpha_{i1}^{\frac{2}{3}} - \gamma_i^{\frac{2}{3}} \beta_{i1} \geq 0$ 和 $\alpha_{i2}^{\frac{2}{3}} - \gamma_i^{\frac{2}{3}} \beta_{i2} \geq 0$, 令 $\gamma_{i1} = \alpha_{i1}/\beta_{i1}^{\frac{2}{3}}$, $\gamma_{i2} = \alpha_{i2}/\beta_{i2}^{\frac{2}{3}}$, 可取 $\gamma_i = \min\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}\}$.

经过简单计算, 有

$$\begin{aligned} \gamma_{i1}(k_i) &= \frac{\theta_i[(\lambda - 1)k_i - \bar{c}]}{[(\sqrt{2}\lambda k_i)^{\frac{3}{2}} + 2\theta_i h^{\frac{3}{2}}/3]^{\frac{2}{3}}}, \\ \gamma_{i2}(k_i) &= \frac{3(k_i - \bar{c})/2\sqrt{2n} - \theta_i}{[1/2^{\frac{3}{4}} + \theta_i/3h^3]^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned} \quad (28)$$

注意到, 当 $k_i > \max\{\sqrt{c}/(\lambda - 1), \sqrt{c} + 2\theta_i\sqrt{2n}/3\}$ 时, $\gamma_{i1}(k_i)$ 和 $\gamma_{i2}(k_i)$ 均是 k_i 的单调递增函数, 且

$$\begin{aligned} \gamma_{i1}(k_i) &: (\bar{c}/(\lambda - 1), +\infty) \mapsto (0, (\lambda - 1)\theta_i/\sqrt{2}\lambda), \\ \gamma_{i2}(k_i) &: (\bar{c} + 2\theta_i\sqrt{2n}/3, +\infty) \mapsto (0, +\infty). \end{aligned}$$

存在某个有限的值 $\kappa_i > 0$ 使得当 $k_i > \kappa_i$ 时, $\gamma_{i2}(k_i) > \gamma_{i1}(k_i) > (\lambda - 1)\theta_i/\theta_i 2\lambda$, 此时将 $\theta_i = 2\lambda h_{i0}\sqrt{n}$ 代入 $(\lambda - 1)\theta_i/2\lambda$, 有

$$\gamma_i > \frac{(\lambda - 1)\theta_i}{2\lambda} = (\lambda - 1)h_{i0}\sqrt{n}. \quad (29)$$

step 3: 证明图1所示的切换逻辑只会发生有限次切换, 并且多智能体系统将实现有限时间一致性.

先由反证法证明只会发生有限次切换. 假设存在无限次切换, 根据图1中 k_i 的更新机制, 一定存在某个切换时刻 t_{i1} 使得, $k_i(t_{i1}) > \max\{\bar{c}/(\lambda - 1), \bar{c} + 2\theta_i\sqrt{2n}/3\}$. 令 t_{i2} 为 t_{i1} 的下一相邻切换时刻, 根据式(27)和(29)可知, 在时间区间 (t_{i1}, t_{i2}) 内, 必有

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &\leq -\gamma_i(k_i(t_{i1}))V_i^{\frac{2}{3}}(t) \leq \\ &-(\lambda - 1)h_{i0}\sqrt{n}V_i^{\frac{2}{3}}(t). \end{aligned} \quad (30)$$

因此, 当 $t \in (t_{i1}, t_{i2})$ 时, 根据引理5有

$$V_i^{\frac{1}{3}}(t) \leq V_i^{\frac{1}{3}}(t_{i1}^+) - \frac{1}{3}(\lambda - 1)h_{i0}\sqrt{n}(t - t_{i1}). \quad (31)$$

而 t_{i2} 时刻也将发生一次切换, 即有

$$\begin{aligned} V_i^{\frac{1}{3}}(t_{i2}^-) &> \max\left\{V_i^{\frac{1}{3}}(t_{i1}^+) + \frac{1}{3}[\delta_i - (\lambda - 1) \times \right. \\ &\left. h_{i0}\sqrt{n}(t_{i2} - t_{i1})], 0\right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

因此有

$$V_i^{\frac{1}{3}}(t_{i2}^-) > V_i^{\frac{1}{3}}(t_{i1}^+) - \frac{1}{3}(\lambda - 1)h_{i0}\sqrt{n}(t_{i2} - t_{i1}). \quad (33)$$

式(31)与(33)相矛盾, 假设不成立, 因此图1所示的切换逻辑只会发生有限次切换, 从而自适应增益 k_i 保持有界.

下面证明只发生有限次切换时, 不存在有限时间逃逸现象, 并且经过有限时间后, $\|e_{xi}\| \equiv \|e_{vi}\| \equiv 0$.

记最后一次切换时刻为 t_{im} , 根据切换逻辑图1, 当 $t > t_{im}$ 时, 下式恒成立:

$$\begin{aligned} V_i^{\frac{1}{3}}(t) &\leq \max\left\{V_i^{\frac{1}{3}}(t_{im}^+) + \frac{1}{3}[\delta_i - (\lambda - 1) \times \right. \\ &\left. h_{i0}\sqrt{n}(t - t_{im})], 0\right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

V_i 有界, 从而 e_{xi} 和 e_{vi} 都是有界的, 不会存在有限时间逃逸现象.

此外, 由于 $V_i^{\frac{1}{3}}(t_{im}^+) + \delta_i/3$ 有界, 存在某一有限时刻 $T_i^* > t_{im}$, 使得

$$V_i^{\frac{1}{3}}(T_i^*) + \frac{1}{3}[\delta_i - (\lambda - 1)h_{i0}\sqrt{n}(T_i^* - t_{im})] = 0. \quad (35)$$

因此当 $t \geq T_i^*$ 时, $V_i(t) \equiv 0$, 进而 $\|e_{xi}\| \equiv \|e_{vi}\| \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. 特别地, 当 $t \geq \max\{T_1^*, \dots, T_N^*\}$ 时, 有 $\|e_x\| \equiv \|e_v\| \equiv 0$, 即 $(L_1 \otimes I_n)\tilde{X} \equiv (L_1 \otimes I_n)\tilde{V} \equiv 0$. 由于 L_1 是对称正定阵, $\tilde{X} \equiv \tilde{V} \equiv 0$, 表明多智能体系统(2)、(3)实现了有限时间跟踪一致性. \square

3 数值仿真

为了验证上文的主要结论, 考虑由1个领导者和4个跟随者组成的多智能体系统, 其动力学方程满足式(4)和(5), 且 $f_i(x_i, v_i, t) = \sin((i + 1)x_i) + \cos((i + 1)v_i) + 0.1 \times (i + \sin(it))$, $i = 0, 1, \dots, 4$, 假设2满足. 4个跟随者组成无向连通图, 对应的Laplacian矩阵为

$$L_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

假设只有第1个跟随者能接收领导者的信息, 即 $b = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 假设1满足. 选择 $\lambda = 2$, $\delta_i = 5$, $h_{i0} = \Delta h_i = 1$, 则 $\theta_i = 4$, $i = 1, 2, 3, 4$, 智能体的初始状态随机选取, 考虑到仿真计算误差, 取 $\varepsilon = 0.00001$.

通过仿真,图2~图4分别展示了自适应增益 k_i 、位置误差 \tilde{x}_i 和速度误差 \tilde{v}_i 的变化. 图2表明,所有分布式切换增益 k_i 在0.1s内即实现了自适应,此后保持不变. 由于仿真离散化进行的,计算误差不可避免,经过有限时间理论上一致性误差保持为零的系统,在实际仿真过程中误差不可能恒为零,但是会保持在原点的一个极小邻域内. 图3和图4表明,在仿真过程中,即使多智能体系统存在异构未知非线性函数,所有的跟随者相对于领导者的位置误差 \tilde{x}_i 和速度误差 \tilde{v}_i 仍以相当高的精度在有限时间内趋近于零,分别保持在 10^{-4} 和 10^{-1} 以下,验证了文中切换自适应控制方法的有效性.

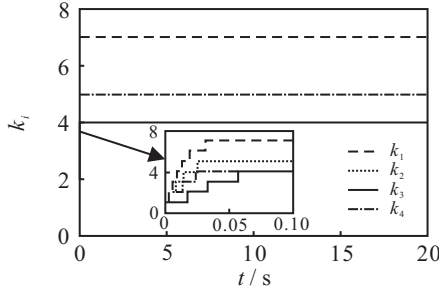


图2 自适应增益 k_i 的调节曲线

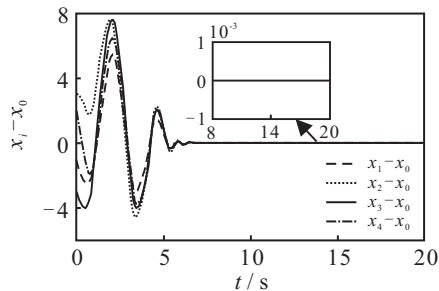


图3 采用分布式切换机制的位置误差 \tilde{x}_i

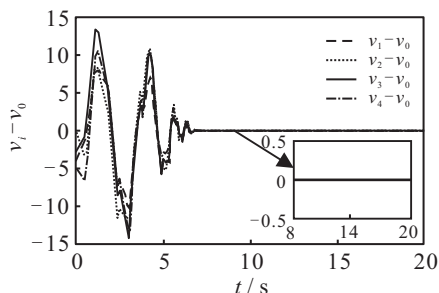


图4 采用分布式切换机制的速度误差 \tilde{v}_i

仅采用完全分布式协议(9),而不按照图1所示的分布式切换机制在线调节各增益 k_i ,在这种情况下作进一步仿真研究. 出于对比,仿真在相同条件下进行:多智能体系统的模型、初始状态与通信拓扑同上文,控制参数选为 $\lambda = 2$ 和 $k_i \equiv 1, i = 1, 2, 3, 4$. 通过数值仿真,图5和图6分别展示了该条件下位置误差 \tilde{x}_i 和速度误差 \tilde{v}_i 的变化情况. 由图5和图6可见,无论是位置误差还是速度误差都不能收敛到零,这充分表明了

文中自适应增益 k_i 的分布式切换机制对于实现完全分布式有限时间一致性的重要性. 事实上,由于误差上界 c 与Laplacian矩阵特征值等全局信息未知, k_i 初值的选择是盲目的,必须为其设计合适的在线调节机制才能保证多智能体系统一致性的实现.

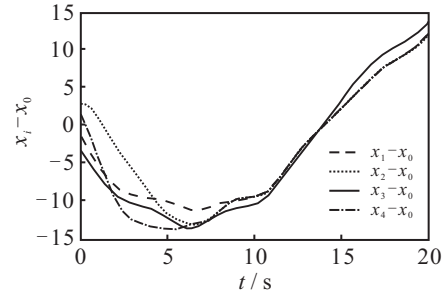


图5 不采用分布式切换机制的位置误差 \tilde{x}_i

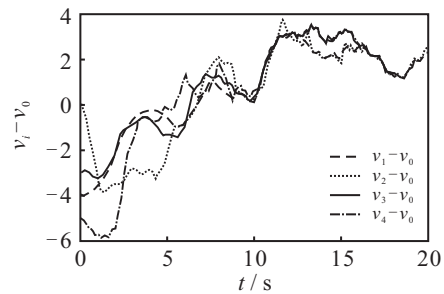


图6 不采用分布式切换机制的速度误差 \tilde{v}_i

4 结论

本文研究异构二阶非线性多智能体系统有限时间跟踪问题,提出了一种完全分布式一致性协议以及对应的自适应切换逻辑,一致性协议和自适应切换逻辑只需要使用到智能体本身及其邻居的状态和输入信息,消除了对于误差上界与Laplacian矩阵特征值等全局信息的依赖. 仿真结果表明,一方面,切换增益短时间内即完成了自适应过程;另一方面,即使多智能体系统存在异构未知非线性函数,所有跟随者相对于领导者的位置和速度误差仍将以相当高的精度在有限时间内趋近于零. 考虑到现实情况下各智能体之间的通信可能会存在带宽限制,本文所提协议需要各智能体与其邻居交换位置、速度和输入3种信息,为减小通信量,接下来可进一步研究只包含位置信息交换的完全分布式异构多智能体系统有限时间跟踪问题.

参考文献(References)

[1] Lin J, Morse A S, Anderson B D O. The multi-agent rendezvous problem[C]. Proc of the 42nd IEEE Conf Decision Control. Hawaii: IEEE Press, 2003: 1508-1513.
 [2] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.

- [3] Di P, Petitti A, Rizzo A. Distributed Kalman filtering via node selection in heterogeneous sensor networks[J]. *International Journal of Systems Sciences*, 2015, 46(14): 2572-2583.
- [4] Hong Y, Hu J, Gao L. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology[J]. *Automatica*, 2006, 42(7): 1177-1182.
- [5] Ren W, Atkins E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange[J]. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2007, 17(10): 1002-1033.
- [6] Ren W. Second-order consensus algorithm with extensions to switching topologies and reference models[C]. *Proc of the 26th American Control Conference*. New York: IEEE Press, 2007: 1431-1436.
- [7] Ren W. On consensus algorithms for double-integrator dynamics[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 58(6): 1503-1509.
- [8] Yu W, Chen G, Cao M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(4): 1089-1095.
- [9] Hou W, Fu M, Zhang H, et al. Consensus conditions for general second-order multi-agent systems with communication delay[J]. *Automatica*, 2017, 75(1): 293-298.
- [10] Yu W, Chen G, Cao M, et al. Second-order consensus for multi-agent systems with directed topologies and nonlinear dynamics[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 2010, 40(3): 881-891.
- [11] Yu W, Ren W, Zheng W, et al. Distributed control gains design for consensus in multi-agent systems with second-order nonlinear dynamics[J]. *Automatica*, 2013, 49(4): 2107-2115.
- [12] Meng Z, Lin Z, Ren W. Robust cooperative tracking for multiple non-identical second-order nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2363-2372.
- [13] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751-766.
- [14] Li S, Ding S, Li Q. Global set stabilisation of the spacecraft attitude using finite-time control technique[J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(5): 822-836.
- [15] Zhao Y, Duan Z, Wen G, et al. Distributed finite-time tracking control for multi-agent systems: an observer-based approach[J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(1): 22-28.
- [16] Zhao Y, Duan Z, Wen G, et al. Distributed finite-time tracking for a multi-agent system under a leader with bounded unknown acceleration[J]. *Systems & Control Letters*, 2015, 81(7): 8-13.
- [17] Li S, Du H, Lin X. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics[J]. *Automatica*, 2011, 47(3): 1706-1712.
- [18] Yu S, Long X. Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode[J]. *Automatica*, 2015, 54(2): 158-165.
- [19] Zhao Y, Duan Z, Wen G, et al. Distributed finite-time tracking of multiple non-identical second-order nonlinear systems with settling time estimation[J]. *Automatica*, 2016, 64(1): 86-93.
- [20] Sun C, Hu G, Xie L, et al. Robust finite-time connectivity preserving coordination of second-order multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2018, 89(1): 21-27.
- [21] Li Z, Liu X, Ren W, et al. Distributed tracking control for linear multi-agent systems with a leader of bounded unknown input[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(2): 518-523.
- [22] Dennis S B. *Matrix mathematics*[M]. Princeton: Princeton University Press, 2009: 52, 545.
- [23] Bhat S P, Bernstein D D. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(4): 751-766.
- [24] Fu J, Ma R, Chai T. Adaptive finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via logic-based switchings[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(11): 5998-6003.

作者简介

董新民(1963—),男,教授,博士生导师,从事导航、制导与控制等研究, E-mail: dongxinmin@139.com;

丁超(1994—),男,硕士生,从事多智能体系统协调控制与高次非线性系统控制的研究, E-mail: dingchao529@163.com;

陈勇(1984—),男,副教授,博士,从事飞行器控制理论及其应用等研究, E-mail: chen_y_043@163.com;

刘棕成(1985—),男,副教授,博士,从事非线性系统控制及其在飞行控制器中的应用等研究, E-mail: liu434853780@163.com;

徐浩军(1964—),男,教授,博士生导师,从事飞行动力学与控制等研究, E-mail: xuhaojun403@163.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)