

控制与决策

Control and Decision

具有随机延时的网络控制系统的均方可镇定性分析

李俊辉, 卢洁莹, 苏为洲

引用本文:

李俊辉, 卢洁莹, 苏为洲. 具有随机延时的网络控制系统的均方可镇定性分析[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 943–948.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0999>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一类半线性抛物型偏微分方程描述的分布参数系统的边界控制

Boundary control of the distributed parameter systems described by a class of semi-linear parabolic partial differential equations

控制与决策. 2019, 34(12): 2594–2602 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0289>

基于自适应模糊 H^∞ 控制的可重复使用运载器再入姿态控制

Adaptive fuzzy H^∞ attitude control design for reentry RLV

控制与决策. 2018, 33(7): 1181–1189 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.0348>

无线接入网中一类联合调度算法的鲁棒稳定性分析

Robust stability analysis of a kind of joint scheduling algorithms in wireless access network

控制与决策. 2018, 33(11): 2094–2098 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.0767>

随机时滞系统的神经网络输出反馈动态面控制

Output-feedback neural DSC control for stochastic nonlinear time-delay systems

控制与决策. 2017, 32(8): 1377–1385 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0758>

基于非二次Lyapunov函数的不确定模糊系统鲁棒 H^∞ 控制

Robust H^∞ control for uncertain fuzzy systems based on non-quadratic Lyapunov function

控制与决策. 2017, 32(12): 2247–2253 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1238>

基于ESO的一类线性时变系统自学习滑模控制方法

Self-learning sliding mode control method of a class of linear time-varying systems based on ESO

控制与决策. 2016, 31(11): 2101–2105 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1260>

基于Razumikhin方法的随机时变时滞非线性系统的状态反馈

State feedback of stochastic nonlinear systems with time-varying delay base on Razumikhin-type approach

控制与决策. 2015, 30(8): 1519–1522 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0984>

输入饱和和受限下的刚体飞行器姿态系统的有限时间镇定

Finite-time attitude stabilization of rigid spacecraft under input saturation

控制与决策. 2015, 30(8): 1386–1392 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0840>

具有随机延时的网络控制系统的均方可镇定性分析

李俊辉, 卢洁莹, 苏为洲[†]

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640)

摘要: 针对网络系统的可镇定性问题, 研究整数步随机延时离散时间线性系统的均方可镇定性. 利用 Youla 参数化与内外分解方法, 结合均方小增益定理得到系统输出反馈均方可镇定的充分必要条件. 该条件明确给出系统可镇定性与被控对象特性(不稳定极点、非最小相位零点、相对阶)和信道特性(频域信噪比函数)的关系, 其中频域信噪比函数在被控对象不稳定极点的取值对可镇定影响甚大. 利用仿真算例量化被控对象的非最小相位零点及相对阶对可镇定性的影响, 验证可镇定性条件的正确性.

关键词: 网络系统; 均方小增益定理; 均方可镇定性; 随机延时; 频域信噪比; 有色噪声

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Mean-square stabilizability of networked control system with random communication delays

LI Jun-hui, LU Jie-ying, SU Wei-zhou[†]

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: This paper studies the mean-square stabilizability for linear system with random integer-steps delays in discrete time. The fundamental condition of mean-square stabilizability which ensures that an open-loop unstable system can be stabilized by output feedback in the mean-square sense is obtained in terms of applying the Youla parametrization and inner-outer factorization methods to the innovative mean-square small gain theorem. This condition, both necessary and sufficient, provides a fundamental limit imposed by the plant's characteristic (unstable poles, nonminimum phase zeros, relative degree) and the channel's feature (frequency signal-to-noise ratio). The values of the frequency signal-to-noise ratio function at the unstable poles may aggravate the stabilizability condition. Some examples are used to quantify the effect of nonminimum-phase zeros and relative degree of the plant on stabilizability and confirm the correctness of the stabilizability condition.

Keywords: networked system; mean-square small gain theorem; mean-square stabilizability; random delay; frequency SNR; colored noise

0 引言

在过去的二十年里, 网络控制系统在控制领域引起了广泛的关注^[1]. 网络控制系统相对于传统控制系统拥有较低的安装成本, 系统具有高可靠性. 尽管如此, 网络传输面临的量化误差、数据率限制^[2]以及传输过程导致的丢包^[3]和延时^[4-5]等各种不确定性却深刻影响着系统的稳定性和性能. 文献[6-7]分别研究了具有有限比特率及丢包约束和具有量化约束的线性系统的均方可镇定性, 均给出了系统可镇定性和系统不稳定极点、比特率与丢包概率或量化约束的明确关系.

网络诱导延时是一个重要且普遍存在的信道不

确定性, 它出现在传感器、执行器与控制器等需要通过网络传输数据的过程中, 可分为常延时、时变延时和随机延时. 随着计算机控制技术的发展, 随机整数步延时由于能够更好地描述采样系统信道的主要延时特征而越来越受到研究者的重视. 马尔可夫模型和概率质量函数模型是常用的整数步延时模型^[8-9]. 文献[8]研究了具有双边马尔可夫随机延时的离散时间线性系统的随机稳定性; 文献[9]基于概率质量函数模型研究了网络控制系统状态反馈的均方稳定性. 上述文献均通过状态空间的角度分析了系统的稳定性, 并通过求解矩阵不等式的方法获得可镇定性条件, 然而被控对象特性(如不稳定极点、相对

收稿日期: 2018-07-19; 修回日期: 2018-10-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61673183).

责任编辑: 虞文武.

[†]通讯作者. E-mail: wzhsu@scut.edu.cn.

阶等)和网络特性(延时率与丢包率)对系统可镇定性的显性影响仍然是不清晰的.明确可镇定性与被控对象特性和网络特性之间的关系,对于研究网络系统性能极限和简化网络系统设计至关重要.

本文基于网络诱导延时的概率质量函数模型研究网络化系统的输出反馈可镇定性问题.将同一控制周期内接收到的信号根据其延时步长做线性组合,并将其作为接收器输出,使闭环系统可分解为标称模型与零均值有色噪声的互连系统.采用频域分析方法和内外分解技术得到网络系统均方可镇定的充分必要条件,明确系统可镇定性与系统特性(不稳定极点、非最小相位零点、相对阶)和通信网络参数(频域信噪比函数)之间的紧密关系.接收器线性组合结构的提出,使得该网络系统成为具有乘性有色噪声的系统,因此本文结果可从理论上指导网络延时系统的设计和乘性有色噪声系统的可镇定性分析.

1 问题描述

本文研究具有整数步随机延时网络的离散时间单输入单输出线性时不变系统的均方可镇定性.反馈控制系统如图1所示.在图1中: P 为被控对象, K 为线性输出反馈控制器,控制器 K 与被控对象 P 之间存在一个不可靠通信信道; w 为外部输入; y 为测量输出; u_P 为控制信号;信号 u 为具有时间戳的编码控制信号; v 为信道输出; u_d 为远端接收器的输出信号.这里,假设接收器具有解码和计算功能.

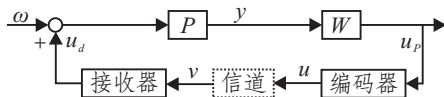


图1 网络控制系统

设被控对象 $P(z)$ 的状态空间模型为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k) + Bu_d(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x(k)$ 为状态变量.设编码器与接收器之间的通信存在整数步随机延时 τ_k ,即在 k 时刻发射的信号 $u(k)$ 将可能在 $k + \tau_k$ 时刻接收到.

假设1^[9] 随机过程 $\{\tau_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$ 是一个独立同分布过程,且 τ_k 根据以下概率质量函数从有界整数子集 $D = \{0, 1, 2, \dots, \hat{\tau}\}$ 中取值,即

$$p_i = \Pr\{\tau_k = i\}, \quad i \in D,$$

其中 $p_i \in [0, 1]$ 且满足 $\sum_{i \in D} p_i = 1$.

基于假设1,在 $k \geq \hat{\tau}$ 时刻到达接收器的信号可能是 $u(k), u(k-1), \dots, u(k-\hat{\tau})$,在 $k < \hat{\tau}$ 时刻到达接收器的信号则可能是 $u(k), u(k-1), \dots, u(0)$.可用函

数 $\delta(\tau_{k-i} - i), i \in D$ 来指示 $u(k-i)$ 是否在 k 时刻到达接收器:若 $\delta(\tau_{k-i} - i) = 1$,即 $\tau_{k-i} = i$,则表示信号 $u(k-i)$ 在 k 时刻被接收到;否则不被接收到.因此, k 时刻的信道输出 $v(k) = [v_0(k), v_1(k), \dots, v_{\hat{\tau}}(k)]^T$,其中 $v_i(k) = \delta(\tau_{k-i} - i)u(k-i), i = 0, 1, \dots, \hat{\tau}$.对于给定时刻 k 以及该时刻下随机变量 τ_k 的一个实现而言,指示函数 $\delta(\tau_k - i)$ 保证了发射信号只被接收到一次,与实际通信相符.取 k 时刻接收器输出信号为控制周期 $(k-1, k]$ 内接收到的所有信号的线性组合,即

$$u_d(k) = \sum_{i=0}^{\hat{\tau}} \alpha_i v_i(k) = \sum_{i=0}^{\hat{\tau}} \alpha_i \delta(\tau_{k-i} - i)u(k-i). \tag{2}$$

其中:当 $k < i$ 时,设 $u(k-i) = 0$;权重 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\hat{\tau}}$ 根据延时长短分配给各个接收信号.

本文考虑的编码器为仅能采集到本地信息的线性时不变编码器^[10].

假设2 编码器为一个线性时不变编码器,具有传递函数 $K_{\mathcal{E}}(z)$.

由于在仅考虑镇定与可镇定性指标时,分别设计控制器 $K(z)$ 和编码器 $K_{\mathcal{E}}(z)$ 可等价于设计全控制器 $K_{\mathcal{E}}(z)K(z)$.因此,不失一般性,取 $K_{\mathcal{E}}(z) = 1$.

在处理经典的独立同分布乘性噪声时,通常将噪声分解为均值部分与零均值的残差部分.受其启发,将接收器的输出 $u_d(k)$ 分解为

$$u_d(k) = \hat{u}(k) + d(k), \tag{3}$$

其中均值信号为

$$\hat{u}(k) = \sum_{i=0}^{\hat{\tau}} \alpha_i E\{\delta(\tau_{k-i} - i)\}u(k-i), \tag{4}$$

零均值的残差信号为

$$d(k) = \sum_{i=0}^{\hat{\tau}} \alpha_i [\delta(\tau_{k-i} - i) - E\{\delta(\tau_{k-i} - i)\}]u(k-i). \tag{5}$$

由延时 τ_k 的概率质量函数可知 $E\{\delta(\tau_{k-i} - i)\} = p_i$,从而式(4)可表示为一个以 $u(k)$ 为输入、 $\hat{u}(k)$ 为输出的离散时间线性时不变系统,即

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\hat{\tau}} \alpha_i p_i z^{-i}, \tag{6}$$

称 $H(z)$ 为均值信道.换言之,延时信道可分解为两部分:均值信道 $H(z)$ 和一个以式(5)描述的零均值不确定性 Ω ,如图2所示.

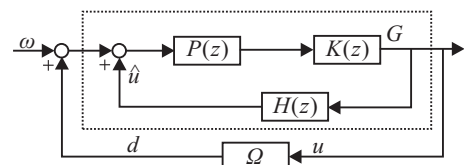


图2 标称系统与网络不确定性互连系统

在图2中: Ω 的输入为 u , 输出为 d .

定义 Ω 的脉冲响应序列 $\{\omega(0), \omega(1), \dots\}$ 的相关函数为

$$r_\omega(l) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k=0}^{k-1} E\{\omega(k)\omega(k+l)\}, \quad l = 0, \pm 1, \dots,$$

则 Ω 的功率谱密度定义为 $S(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_\omega(l)z^{-l}$.

引理1^[11] 存在一个关于 z^{-1} 的 $\hat{\tau}$ 阶实系数最小相位多项式 $\Phi(z)$ 使得 $\Phi(z^{-1})\Phi(z) = S(z)$, 其中 Ω 的功率谱密度为

$$S(z) = \frac{1}{2} \sum_{i_1=0}^{\hat{\tau}} \sum_{i_2=0}^{\hat{\tau}} (\alpha_{i_1} z^{i_1} - \alpha_{i_2} z^{i_2})(\alpha_{i_1} z^{-i_1} - \alpha_{i_2} z^{-i_2}) p_{i_1} p_{i_2}.$$

称 $\Phi(z)$ 为 $S(z)$ 的谱分解^[12].

在不考虑不确定性 Ω 时, 记从 $d(k)$ 到 $u(k)$ 的线性时不变系统为标称系统, 其传递函数为

$$G(z) = K(z)P(z)[1 - H(z)K(z)P(z)]^{-1}. \quad (7)$$

定义随机系统的均方稳定性和均方可镇定性如下.

定义1 考虑网络控制系统(1)和(2)满足假设1和假设2, 输出反馈控制器 $K(z)$ 内稳定标称系统(7). 若对于任意与网络延时不相关的零均值有限方差独立同分布输入序列 $\{w(k)\}$ 、信号序列 $\{u(k)\}$ 和 $\{d(k)\}$ 均为有限能量, 即 $\|u\|_p^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} E\{u^2(k)\} < \infty$ 及 $\|d\|_p^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} E\{d^2(k)\} < \infty$, 则称闭环系统是均方稳定的.

定义2 考虑网络控制系统(1)和(2)满足假设1和假设2. 若使标称系统 $G(z)$ 内稳定的输出反馈控制器 $K(z)$ 存在, 且图2所示的闭环系统是均方稳定的, 则称该网络控制系统是均方可镇定的.

值得注意的是, 若均值信道 $H(z)$ 与被控对象 $P(z)$ 存在不稳定零极点相消, 则标称系统 $G(z)$ 不可内稳定, 此时网络系统不是均方可镇定的. 但由式(6)可知, 通过选取合适的权重 $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\tau\}$ 来调节均值信道 $H(z)$ 的零点可避免不稳定零极点相消.

假设3 给定实数信号权重 $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\tau\}$, 使得均值信道 $H(z)$ 与 $P(z)$ 无不稳定零极点相消.

上述假设是网络系统均方镇定控制器存在的必要条件.

2 均方可镇定条件

本节基于均方小增益定理研究系统的均方可镇定性.

引理2(延时系统均方小增益定理^[11]) 设网络控制系统(1)和(2)满足假设1~假设3, 则闭环系统均

方稳定, 当且仅当

$$\|W(z)T(z)\|_2^2 < 1. \quad (8)$$

其中: $W(z) = \frac{\Phi(z)}{H(z)}$, 称 $W^{-1}(z)$ 为频域信噪比函数; $T(z) = \frac{H(z)KP}{1 - H(z)KP}$, $T(z)$ 为均值补灵敏度函数.

由引理2可知, 系统的可镇定性问题可转化为求解不等式(8)左端的最小值问题. 通过 Youla 参数化方法可将该问题转化为标准的 \mathcal{H}_2 模型匹配问题. 众所周知, 使系统 $T(z)$ 内稳定的控制器 $K(z)$ 可参数化为^[12]

$$K = -(Y + MQ)(X - NQ)^{-1}. \quad (9)$$

其中: $Q \in \mathcal{RH}_\infty$; $X, Y, N, M \in \mathcal{RH}_\infty$ 满足等式

$$H(z)P(z) = NM^{-1}, \quad MX + NY = 1. \quad (10)$$

将式(9)代入条件(8)可得以下结果.

引理3 网络控制系统(1)和(2)满足假设1~假设3, 则闭环系统均方可镇定, 当且仅当

$$\inf_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} \|W(Y + MQ)N\|_2^2 < 1. \quad (11)$$

引理3是系统均方可镇定的充分必要条件, 但要获得可镇定性与被控对象本征参数以及延时信道参数的明确关系, 仍需要对 Q 进行最优综合.

定理1 设网络控制系统(1)和(2)满足假设1~假设3. 被控对象 $P(z)$ 的相对阶 $\tau \geq 0$. 令 $\lambda_i \in \bar{D}^c (i = 1, 2, \dots, n)$ 和 $s_j \in \bar{D}^c (j = 1, 2, \dots, m)$ 分别为 $P(z)$ 的不稳定极点和非最小相位零点, 则闭环系统是均方可镇定的, 当且仅当

$$W_{pc}^* F_{pz}^* (D_p^*)^{\tau-1} Q_p (D_p)^{\tau-1} F_{pz} W_{pc} < 1. \quad (12)$$

其中

$$W_{pc} = \text{col}(W(\lambda_1), W(\lambda_2), \dots, W(\lambda_n)),$$

$$D_p = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

$$F_{pz} = \text{diag}\left(\frac{f_1(\lambda_1)}{N_{\text{Pin}}(\lambda_1)}, \frac{f_2(\lambda_2)}{N_{\text{Pin}}(\lambda_2)}, \dots, \frac{f_n(\lambda_n)}{N_{\text{Pin}}(\lambda_n)}\right),$$

$$[Q_p]_{ij} = \left[\frac{(|\lambda_i|^2 - 1)(|\lambda_j|^2 - 1)}{\lambda_i^* \lambda_j - 1} \right],$$

$$N_{\text{Pin}}(z) = \prod_{j=1}^m \frac{z - s_j}{1 - s_j^* z}, \quad f_i(z) = \prod_{j \neq i}^n \frac{1 - \lambda_j^* z}{z - \lambda_j},$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

证明 当 $H(z)$ 为最小相位系统时, 由于 $\Phi(z)$ 是与 $H(z)$ 同阶的最小相位多项式, $W(z) = \Phi(z)H^{-1}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$. 令 $M(z)$ 的内外分解^[12] 为 $M(z) = M_{\text{in}}(z)M_{\text{out}}(z)$, 其中

$$M_{\text{in}}^{-1} = \prod_{i=1}^n \frac{1 - \lambda_i^* z}{z - \lambda_i}. \quad (13)$$

类似地,将 $N(z)$ 内外分解成 $N(z) = N_{\text{out}}N_{\text{in}}$. 由于对于任意极点 λ , 有 $M(\lambda) = 0$, 将不稳定极点 λ_i 代入 Bézout 恒等式 (10) 可得 $Y(\lambda_i)N_{\text{out}}(\lambda_i) = N_{\text{in}}^{-1}(\lambda_i)$. 由部分分式分解得到

$$\begin{aligned} &M_{\text{in}}^{-1}(z)W(z)Y(z)N_{\text{out}}(z)z^\tau = \\ &\sum_{i=1}^n f_i(\lambda_i) \frac{1 - |\lambda_i|^2}{z - \lambda_i} W(\lambda_i)N_{\text{in}}^{-1}(\lambda_i)\lambda_i^\tau + Z(z) = \\ &\sum_{i=1}^n \left(f_i(\lambda_i) \frac{1 - |\lambda_i|^2}{z - \lambda_i} W(\lambda_i)N_{\text{in}}^{-1}(\lambda_i)\lambda_i^\tau + \right. \\ &\left. f_i(\lambda_i) \frac{1 - |\lambda_i|^2}{\lambda_i} W(\lambda_i)N_{\text{in}}^{-1}(\lambda_i)\lambda_i^\tau \right) + \\ &Z(z) - \sum_{i=1}^n f_i(\lambda_i) \frac{1 - |\lambda_i|^2}{\lambda_i} W(\lambda_i)N_{\text{in}}^{-1}(\lambda_i)\lambda_i^\tau = \\ &\sum_{i=1}^n f_i(\lambda_i) \frac{(1 - |\lambda_i|^2)z}{\lambda_i(z - \lambda_i)} W(\lambda_i)N_{\text{in}}^{-1}(\lambda_i)\lambda_i^\tau + \hat{Z}(z). \end{aligned}$$

其中: $Z(z)$ 、 $\hat{Z}(z)$ 是与 $W(z)Y(z)N_{\text{out}}(z)$ 的极点相关的部分分式分解余项, 因此 $Z(z)$ 、 $\hat{Z}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$. 由 $M_{\text{out}}QN_{\text{out}}z^\tau \in \mathcal{RH}_\infty$ 易知

$$\begin{aligned} &\hat{Z} + M_{\text{out}}QN_{\text{out}}z^\tau \in \mathcal{H}_2, \\ &\sum_{i=1}^n f_i(\lambda_i) \frac{(1 - |\lambda_i|^2)z}{\lambda_i(z - \lambda_i)} W(\lambda_i)N_{\text{in}}^{-1}(\lambda_i)\lambda_i^\tau \in \mathcal{H}_2^\perp. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} &\|W(Y + MQ)N\|_2^2 = \\ &\|W(Y + MQ)Nz^\tau\|_2^2 = \\ &\|M_{\text{in}}^{-1}WYN_{\text{out}}z^\tau + M_{\text{out}}QN_{\text{out}}z^\tau\|_2^2 = \\ &\left\| \sum_{i=1}^n f_i(\lambda_i) \frac{(1 - |\lambda_i|^2)z}{\lambda_i(z - \lambda_i)} W(\lambda_i)N_{\text{in}}^{-1}(\lambda_i)\lambda_i^\tau \right\|_2^2 + \\ &\|\hat{Z} + M_{\text{out}}QN_{\text{out}}z^\tau\|_2^2. \end{aligned}$$

由 M_{out}^{-1} 、 $(N_{\text{out}}z^\tau)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ 易知

$$\inf_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} \|\hat{Z} + M_{\text{out}}QN_{\text{out}}z^\tau\|_2^2 = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} &\inf_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} \|W(Y + MQ)N\|_2^2 = \\ &\left\| \sum_{i=1}^n f_i(\lambda_i) \frac{(1 - |\lambda_i|^2)z}{\lambda_i(z - \lambda_i)} W(\lambda_i)N_{\text{in}}^{-1}(\lambda_i)\lambda_i^\tau \right\|_2^2. \quad (14) \end{aligned}$$

设 $P(z)$ 的互质分解为 $P(z) = N_P M_P^{-1}$, 令 N_P 的内外分解为 $N_P = N_{\text{Pin}}N_{\text{Pout}}$. 由于 $H(z)$ 是 z^{-1} 的最小相位多项式, $H(z)$ 、 $H^{-1}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ 且有 $H(z)P(z) = N_P(H^{-1}M_P)^{-1}$ 为 $H(z)P(z)$ 的互质分解, 即 $N = N_P$ 且 $M = H^{-1}M_P \in \mathcal{RH}_\infty$, 从而有 $N_{\text{in}} = N_{\text{Pin}}$. 将范数 (14) 按定义展开, 结合引理 3 与等式 $\frac{1}{2\pi\iota} \oint_{|z|=1} \frac{z^*z}{(z^* - \lambda_i^*)(z - \lambda_j)} dz = \frac{1}{\lambda_i^* \lambda_j - 1}$ 可得

可镇定性条件 (12), 其中 ι 为虚数单位 (即 $\iota^2 = -1$).

当 $H(z)$ 为非最小相位系统时, 通过考虑 $H(z)$ 的内外分解 $H(z) = H_{\text{in}}(z)H_{\text{out}}(z)$ 以及注意到此时 $N_{\text{in}} = H_{\text{in}}N_{\text{Pin}}$, 结合上述推导即可证明结论 (12) 对非最小相位的 $H(z)$ 依然成立. \square

注 1 定理 1 结合被控对象特性 (不稳定极点、非最小相位零点、相对阶) 和延时信道特性 (频域信噪比函数), 给出了随机延时系统均方可镇定的一个二次型判据. 从对角矩阵 F_{pz} 中的元素可知, 系统的可镇定性受到非最小相位零点与不稳定极点相互作用的影响, 这是乘性噪声系统中的固有现象^[13]. 而由向量 W_{pc} 可知, 频域信噪比函数在被控对象不稳定极点上的取值也将影响系统的可镇定性, 当系统的不稳定极点靠近 $W(z)$ 的极点 (即均值信道的零点) 时, 向量 W_{pc} 中将出现大幅值的元素, 这将可能严重破坏系统的可镇定性, 验证了假设 3 的必要性, 为延时信道接收器的设计提供了指导.

一种处理延时/丢包信道的经典方法是零输入策略, 即若接收器接收到最新信号, 则输出该信号, 否则输出 0. 该策略与在式 (2) 中选取 $\alpha_0 = 1, \alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, \hat{\tau}$ 等效, 此时 $H(z)$ 退化成本数, Ω 退化成本零均值的白噪声, 相应的频域信噪比函数退化成本乘性噪声的标准差. 此时由定理 1 可直接得到零输入策略下的延时/丢包系统均方可镇定性条件.

推论 1 设单输入单输出系统 $P(z)$ 具有乘性不确定性 $(\mu + \Delta_k)$, 其中 Δ_k 是方差为 σ^2 的零均值独立同分布随机过程 (参考文献 [13]). 令 $\lambda_i \in \bar{D}^c (i = 1, 2, \dots, n)$ 和 $s_j \in \bar{D}^c (j = 1, 2, \dots, m)$ 分别为 $P(z)$ 的不稳定极点和非最小相位零点, 则当且仅当 $\frac{\sigma^2}{\mu^2} (F_{\text{pz}}\mathbf{1})^* (D_p^*)^{\tau-1} Q_p (D_p)^{\tau-1} (F_{\text{pz}}\mathbf{1}) < 1$ 时, 闭环系统是均方可镇定的. 其中 $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ 为元素全为 1 的 $n \times 1$ 列向量.

上述推论 1 与文献 [13] 中单输入单输出系统可镇定性结论一致, 因此定理 1 是乘性白噪声系统可镇定性到乘性有色噪声系统可镇定性的推广.

为了明确频域信噪比函数 $W^{-1}(z)$ 对闭环系统可镇定性的影响, 同时指导信号权重 $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\tau\}$ 的选取, 考虑被控对象 $P(z)$ 仅有一个不稳定极点的特殊情况.

推论 2 令 $\lambda \in \bar{D}^c$ 为系统 $P(z)$ 唯一的不稳定极点, $s_k \in \bar{D}^c (k = 1, 2, \dots, m)$ 为系统 $P(z)$ 的非最小相位零点, 则闭环系统是均方可镇定的, 当且仅当

$$|W(\lambda)|^{-2} > |\lambda|^{2(\tau-1)} (|\lambda|^2 - 1) \prod_{j=1}^m \left| \frac{1 - s_j^* \lambda}{\lambda - s_j} \right|^2. \quad (15)$$

注 2 从推论 2 可知, 当被控对象系统的不稳定极点靠近频域信噪比函数的极点时, 不等式 (15) 左端

的值将趋于0,而右端是由系统固有特性决定的,因此闭环系统将难以镇定. 换言之,应选取合适的信号权重使均值信道 $H(z)$ 的零点远离被控对象的不稳定极点(如令其具有最小相位). 此外,镇定闭环系统的难度将随着系统相对阶的提升而指数增加,因此在控制网络系统前可先设计本地补偿器以降低系统相对阶.

3 仿真分析

本节通过数值算例讨论定理1及其推论所述的被控对象特性(不稳定极点、非最小相位零点、相对阶)与信道特性(频域信噪比函数)对闭环系统均方可镇定性影响. 设外部输入序列 $\{w(k)\}$ 为零均值单位方差的白噪声过程.

3.1 最小相位系统

考虑相对阶为 $\tau = r + 1$ 的离散时间LTI系统 $P(z) = \frac{3z - 1.4}{z^r(z - 1.1)(z - 1.2)}$ 具有最小相位与不稳定极点 $\lambda_1 = 1.2, \lambda_2 = 1.1$, 其中 $r \geq 0$, 则被控对象的特性可由以下参数描述:

$$F_{pz} = \text{diag}(f_1(\lambda_1), f_2(\lambda_2)) = \text{diag}(-3.2, 3.2),$$

$$D_p^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{\tau-1}, \lambda_2^{\tau-1}) = \text{diag}(1.2^{\tau-1}, 1.1^{\tau-1}),$$

$$Q_p = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 - 1 & \frac{(|\lambda_1|^2 - 1)(|\lambda_2|^2 - 1)}{\lambda_1^* \lambda_2 - 1} \\ \frac{(|\lambda_2|^2 - 1)(|\lambda_1|^2 - 1)}{\lambda_2^* \lambda_1 - 1} & |\lambda_2|^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4400 & 0.2888 \\ 0.2888 & 0.2100 \end{bmatrix}.$$

设信道随机延时的最大步长为 $\hat{\tau} = 2$, 且延时步长服从分布 $p_0 = 0.6, p_1 = 0.3, p_2 = 0.1$. 由Rouché定理可知,取信号权重 $\alpha_0 = 0.6, \alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.1$ 可使 $H(z) = 0.36 + 0.09z^{-1} + 0.01z^{-2}$ 为最小相位系统. 将信道参数 $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, p_0, p_1, p_2\}$ 代入引理1, 通过谱分解可得频域信噪比函数的倒数为

$$W(z) = \frac{0.84795(z - 0.4564)(z + 0.08465)}{z^2 + 0.25z + 0.02778},$$

从而 $W(\lambda_1) = 0.4582, W(\lambda_2) = 0.4274$.

考虑相对阶 $\tau = 1$, 将所得结果代入二次型判据(12)左端,有 $W_{pc}^* F_{pz}^* Q_p F_{pz} W_{pc} = 0.1807 < 1$. 由判据可知,该闭环网络控制系统是均方可镇定的,即可通过设计输出反馈控制器使闭环系统均方稳定. 取控制器

$$K(z) = \frac{-0.29614z^2(z - 1.02)}{(z + 0.07371)(z - 0.2077)(z - 0.4667)},$$

此时有 $\|W(z)T(z)\|_2^2 = 0.1807$, 即控制器 $K(z)$ 为闭环系统的镇定控制器,且为达到可镇定性条件的最优

控制器. 值得一提的是,文献[11]指出若闭环系统均方稳定,则控制信号能量 $\|u\|_p^2 = \frac{\|G(z)\|_2^2}{1 - \|W(z)T(z)\|_2^2}$ 且 $\|d\|_p^2 = \kappa\|u\|_p^2$, 其中 $\kappa = \sum_{i=0}^{\hat{\tau}} \alpha_i^2 p_i (1 - p_i)$. 将上述参数代入可得 $\|u\|_p^2 = 5.2476$ 且 $\|d\|_p^2 = 0.5573$. 图3利用蒙特卡罗法给出了在控制器 $K(z)$ 下闭环系统信号 $\{u(k)\}$ 和 $\{d(k)\}$ 的平均能量,与上述理论计算结果一致,验证了可镇定性分析的正确性.

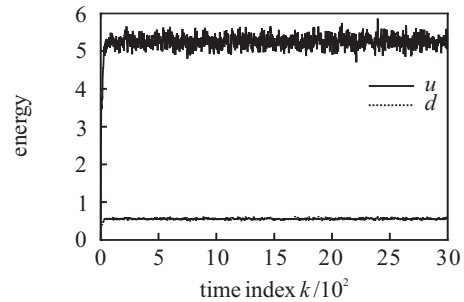


图3 均方稳定的闭环系统控制信号能量曲线I

由定理1可知,闭环系统均方可镇定性边界随着被控对象相对阶的增加而呈指数增长,即被控对象的输入延时越大,闭环系统越难镇定,如图4所示. 在图4中,实线表示 $a_0 = 0.6, a_1 = 0.3, a_2 = 0.1$, 虚线表示 $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$.

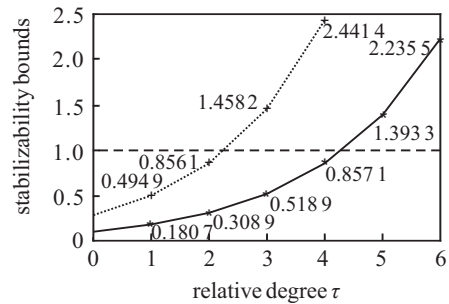


图4 被控对象相对阶与系统均方可镇定性界的函数图

图4还给出了经典的零输入策略下系统的均方可镇定性与相对阶的关系. 在该策略下,当系统相对阶大于2时,系统将不可均方镇定. 这意味着本文提出的处理延时信号的式(2)在可镇定性方面具有一定的优势.

3.2 非最小相位系统

考虑具有非最小相位零点 $s_1 = 2.1$ 的不稳定离散时间线性时不变系统

$$P(z) = \frac{z - 2.1}{(z - 1.1)(z - 1.2)}.$$

注意到可镇定性判据中参数矩阵 D_p, Q_p 仅与不稳定极点有关,而该系统具有与3.1节相同的不稳定极点,因此参数 D_p, Q_p 与3.1节相同. 设该网络系统的信道参数与3.1节相同,由于频域信噪比函数只依

赖于信道参数,该网络系统的信道特性 W_{pc} 与 3.1 节相同. 考虑到矩阵 F_{pz} 与被控对象非最小相位零点有关,将系统参数代入 F_{pz} 可得

$$F_{pz} = \text{diag}(f_1(\lambda_1)N_{Pin}^{-1}(\lambda_1), f_1(\lambda_2)N_{Pin}^{-1}(\lambda_2)) = \text{diag}(-5.4044, 4.1920).$$

系统的相对阶 $\tau = 1$, 则闭环系统的可镇定性判别为

$$W_{pc}^* F_{pz}^* Q_p F_{pz} W_{pc} = 0.8103 < 1.$$

因此系统存在均方镇定控制器,取达到可镇定性边界的最优控制器

$$K(z) = \frac{0.8431z^2(z - 1.047)}{(z + 0.114)(z^2 - 0.1008z + 0.2158)},$$

此时 $\|u\|_p^2 = 104.1083$, $\|d\|_p^2 = 11.0563$. 图5给出了在该控制器下闭环系统信号序列 $\{u(k)\}$ 和 $\{d(k)\}$ 的能量,与理论分析结果一致.

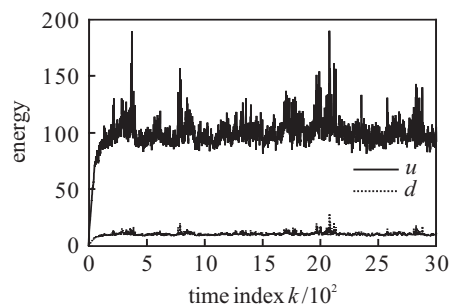


图5 均方稳定的闭环系统控制信号能量曲线 II

对比算例 3.1 中控制信号的能量可知,被控对象的非最小相位零点严重破坏了系统的可镇定性,使镇定该系统需要更强的能量.

4 结论

本文针对网络控制系统的均方可镇定性,研究了具有随机整数步延时的单输入单输出离散时间线性时不变系统的输出反馈均方可镇定性. 利用 Youla 参数化与内外分解方法,由闭环系统均方小增益定理推导出系统输出反馈均方可镇定的充分必要条件,明确了闭环系统可镇定性与被控对象特性(不稳定极点、非最小相位零点、相对阶/输入延时)和信道特性(频域信噪比函数)具有紧密的约束关系,其中频域信噪比函数在被控对象不稳定极点上的取值对可镇定性影响甚大. 最后利用仿真算例量化了被控对象的非最小相位零点对可镇定性的影响,验证了可镇定性条件的正确性.

参考文献(References)

- [1] 游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述[J]. 自动化学报, 2013, 39(2): 101-118.
(You K Y, Xie L H. Survey of recent progress in network control systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(2): 101-118.)

- [2] Nair G N, Fagnani F, Zampier S, et al. Feedback control under data rate constraints: An overview[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 108-137.
- [3] Elia N, Eisenbeis J N. Limitations of linear control over packet drop networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(4): 826-841.
- [4] Schenato L, Sinopoli B, Franceschetti M, et al. Foundations of control and estimation over lossy networks[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 163-187.
- [5] 刘义才, 刘斌, 张永, 等. 具有双边随机时延和丢包的网路控制系统稳定性分析[J]. 控制与决策, 2017, 32(9): 1565-1573.
(Liu Y C, Liu B, Zhang Y, et al. Stability analysis for networked control systems with bilateral random delay and packet dropout[J]. Control and Decision, 2017, 32(9): 1565-1573.)
- [6] You K Y, Xie L H. Mean square stabilizability of linear systems with limited feedback data rates and markovian packet losses[C]. Proceedings of the 29th Chinese Control Conference. Beijing: IEEE, 2010: 4323-4328.
- [7] Qi T, Su W Z. Mean-square stabilizability for output feedback control under quantization constraints[C]. Proceedings of the 35th Chinese Control Conference. Chengdu: IEEE, 2016: 7315-7320.
- [8] Zhang L Q, Shi Y, Chen T W, et al. A new method for stabilization of networked control systems with random Delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(8): 1177-1181.
- [9] Gao H J, Meng X Y, Chen T W. Stabilization of networked control systems with a new delay characterization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(9): 2142-2148.
- [10] Goodwin G C, Quevedo D E, Silva E I. Architectures and coder design for networked control systems[J]. Automatica, 2008, 44(1): 248-257.
- [11] Li J H, Lu J Y, Su W Z. Mean-square stabilization for a class of discrete-time systems with random delay[C]. Proceedings of the 11st Asian Control Conference. Gold Coast: IEEE, 2017: 881-886.
- [12] Zhou K M, Doyle J C, Glover K. Robust and optimal control[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1995: 542-548.
- [13] Qi T, Chen J, Su W Z, et al. Control under stochastic multiplicative uncertainties: Part I, Fundamental conditions of stabilizability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(3): 1269-1284.

作者简介

李俊辉(1991—), 男, 博士生, 从事网络控制、最优控制的研究, E-mail: ljunhui@mail.scut.edu.cn;

卢洁莹(1991—), 女, 博士生, 从事网络控制、最优控制的研究, E-mail: aujylu@scut.edu.cn;

苏为洲(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络反馈系统的分析与设计、网络系统分布式估计与信号处理、反馈系统的性能极限等研究, E-mail: wzhsu@scut.edu.cn.