控制与决策
Control and Decision

具有可行联盟的合作对策的最小二乘解

邹正兴，张强，吴佳颖，周珍

文章编号: 1001-0920(2020)04-0965-08 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1047

具有可行联盟的合作对策的最小二乘解

邹正兴[1†], 张 强[1], 吴佳颖[2], 周 珍[3]

(1. 北京理工大学 管理与经济学院，北京 100081；2. 广州中大控股有限公司，广州 510275；
3. 首都师范大学 管理学院，北京 100089)

摘 要: 最小二乘解是基于最小平方优化方法得到的使联盟中局中人的分配值之和与联盟收益的期望偏差最小的分配方案. 为了拓展最小二乘解的适用范围,构建可行联盟集合限制下最小二乘解的最优化模型,根据凸规划理论探讨该最小二乘解的存在性及唯一性条件,进而利用拉格朗日乘子法给出求解最小二乘解的矩阵方程,并基于此探讨解的具体表达式和一些重要性质. 同时,基于不可分开的局中人获得相同分配值这一分配准则,在最小二乘解的基础上提出对称最小二乘解,并讨论其唯一性条件及相关性质. 值得指出的是,当且仅当其可行联盟集合为非奇异时,具有可行联盟的合作对策存在唯一的最小二乘解. 所提出的最小二乘解可为局中人合作具有限制时的收益分配问题提供理论依据和决策参考.

关键词: 合作对策；合作限制；最小平方法；可行联盟；分配

中图分类号: O225；F224.32 **文献标志码:** A

The least square value for cooperative games with feasible coalitions

ZOU Zheng-xing[1], *ZHANG Qiang*[1], *WU Jia-ying*[2], *ZHOU Zhen*[3]

(1. School of Management and Economics，Beijing Institute of Technology，Beijing 100081，China；2. Guangzhou Zhongda Holding Company Limited，Guangzhou 510275，China；3. School of Management，Capital Normal University，Beijing 100089，China)

Abstract: The least square value for classical cooperative games provides a kind of least square optimization method of allocating benefits to the players, which minimizes the expected deviation between the payoffs and the worths of all coalitions. This paper constructs an optimization model for the least square value of cooperative games in which cooperation among players is based on a set system of feasible coalitions. The existence and uniqueness of the least square value are investigated on the basis of the convex programming theory. Meanwhile, an equivalent matrix equation for solving the least square value is obtained by using the Lagrange multiplier method, and then, based on this equation, the expression and several important properties of the value are discussed. Besides, the so-called symmetric least square value is proposed by employing a distribution rule that the inseparable players gain the same payoffs, and its properties are also studied. It is worth noting that the class of cooperative games with feasible coalitions has a unique least square value if and only if the rank of the set of feasible coalitions is full. These results can provide theoretical perspective and decision-making reference for distributing the worth of players when not all coalitons can be formed.

Keywords: cooperative game；restricted cooperation；least square method；feasible coalition；distribution

0 引 言

合作对策是局中人通过合作取得尽可能大的收益的决策分析模型,其核心问题是合理分配合作获得的收益. 对于经典合作对策, Ruiz等[1]利用最优化方法提出了使得联盟分配值(联盟中局中人获得的分配值之和)与联盟收益的期望偏差最小的分配方案,并称之为最小二乘解. 随后, Ruiz等[2]讨论了该解的稳定性,并设计了其求解算法. 有趣的是,最小二乘解与满足有效性、对称性、线性的解有着密切联系,很多单值解可看作它的特例,如: Shapley值[3]、CIS值、ENSC值、Solidarity值、预核仁等,因此最小二乘解引起了众多学者的关注. 文献[4]提出了最小二乘解和Shapley值新的表达式,探讨了它们之间的关系; 文献[5-6]将最小二乘解应用于局中人作用大小的排序. 另外,学者们从收益形式、联盟系数等角度对最小二乘解进行了拓展研究. 文献[7]在其专著中论述

收稿日期: 2018-07-29；**修回日期:** 2018-10-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71771025, 71801016, 71871002, 71874112, 71561022)；教育部人文社会科学研究青年基金项目(17YJC630203).

责任编委: 唐万生.

†通讯作者. E-mail: zhengxingzou@126.com.

了区间值收益情形下最小二乘解的解法;基于区间值距离和最小平方法,文献[8]建立了以联盟分配与联盟支付值之差的平方和为最小的数学优化模型,并提出了该模型的一种有效求解;类似地,文献[9]对n人梯形模糊数支付合作对策的最小平方求解模型与方法进行了研究;针对最小二乘预核仁解这一特殊的最小二乘解,文献[10]将其拓展到区间值支付情形,并提出了两种二次规划求解方法,该方法能快速、有效地获得其区间值最小二乘预核仁解和核仁解;进一步,文献[11]在联盟收益满足类尺寸单调性的前提下探讨了区间值最小二乘预核仁解的解法及相关性质;文献[12]引入联盟自私系数对最小二乘解的最优化模型中的目标函数进行变形,提出了理想解的概念,并探讨了其与最小二乘解的关系.

上述经典合作对策和模糊值(区间值或梯形模糊数)合作对策均假设局中人之间的合作没有约束,即所有联盟都可以形成.然而,在现实生活中,局中人在选择合作伙伴时往往受到诸多因素的制约,诸如:法律、利益冲突、矛盾、竞争、行业规则、合作偏好、地理环境、上下级关系等,这使得并非所有联盟都可以形成.鉴于此,学者们利用集合系统、联盟划分、图等描述局中人的合作关系,构建了很多限制合作对策模型.其中,用集合系统$\mathcal{F}(N)$表示局中人可以形成的联盟的集合的合作对策称为具有可行联盟的合作对策,通常仅假设$\emptyset, N \in \mathcal{F}(N)$.类似于最小二乘解,文献[13]利用最优化方法提出了其预核仁并进行了公理化;文献[14-15]根据分配值之间的优超关系提出了Solidary值、广义核、核仁、谈判集等.然而,鲜有学者研究此类对策的最小二乘解.

为了从局中人合作限制的角度拓展最小二乘解,本文借鉴经典合作对策的最小二乘解的思想提出具有可行联盟的合作对策的最小二乘解,探讨它的存在性、唯一性条件、具体表达式和相关性质,并给出一种修正的最小二乘解.本文将进一步完善具有可行联盟的合作对策理论体系,可为特殊可行联盟结构下相关单值解的研究提供理论参考,也促进最小二乘解在经济和管理等领域得到更广泛应用.

1 经典合作对策及其最小二乘解

设$N=\{1,2,\ldots,n\}$为局中人集合,$\boldsymbol{R}$为实数集.二元组(N,v)称为局中人N上的经典合作对策,其中,特征函数v是定义在N的幂集2^N上、取值在实数集合$\boldsymbol{R}$上的支付函数,即$v:2^N\to\boldsymbol{R}$,且$v(\emptyset)=0$.将$S\in 2^N$称为联盟,支付函数$v(S)$表示局中人组成联盟S获得的收益.将局中人集合为N的经典合作对策的集合记为G^N.

定义1 设$\boldsymbol{x}:G^N\to\boldsymbol{R}^n$.对于任意的$(N,v)\in G^N$,称$\boldsymbol{x}(N,v)=(x_i(N,v))_{i\in N}$为$(N,v)$的解,其中$x_i(N,v)$表示局中人$i\in N$获得的分配值.

为了讨论方便,将联盟S的基数记为$|S|$或s,将$\sum\limits_{i\in S}x_i$记作$x(S)$.

定义2[1] 设(N,v)为经典合作对策,$\{\alpha(S)\in\boldsymbol{R}_+\mid S\subseteq N\}$为任意的一组权重系数,如果$\boldsymbol{\varphi}$是最优化问题

$$\min\sum_{S\subseteq N}\alpha(S)(v(S)-x(S))^2,$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i\in N}x_i=v(N) \tag{1}$$

的解,则称$\boldsymbol{\varphi}$为$\{\alpha(S)\mid S\subseteq N\}$对应的最小二乘解.

Ruiz等[1]将权重系数$\alpha(S)$解释为:联盟S形成的概率、联盟S对分配的敏感度、联盟S在谈判过程中的能力、联盟S的稳定程度等.联盟权重系数体现了联盟之间的相对重要程度,它们等比例地增大或缩小不影响最终的结果,因此所有联盟的权重系数之和不需要等于1.

如果对于任意的$S\subseteq N$有$\alpha(S)\geqslant 0$,且存在一些联盟$S\neq N$使得$\alpha(S)>0$,则称这组权重系数是正的.如果权重系数仅与局中人个数有关,则称其是对称的,此时将$\alpha(S)$记为$\alpha(s)$.

定理1[1] 对于任意一组正的、对称的权重系数,最优化问题(1)存在唯一的最优解$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_i)_{i\in N}$,且其表达式为

$$\varphi_i(N,v)=\frac{v(N)}{n}+\frac{1}{\beta n}\Big[na_i(v)-\sum_{j\in N}a_j(v)\Big]. \tag{2}$$

其中

$$a_i(v)=\sum_{S\subseteq N,i\in S}\alpha(s)v(S),$$
$$\beta=\sum_{s\in\{1,2,\ldots,n-1\}}\alpha(s)\frac{(n-2)!}{(s-1)!(n-s-1)!}.$$

式(2)可以写成

$$\varphi_i(N,v)=\frac{v(N)}{n}+\sum_{S\subset N,S\ni i}\frac{\lambda_s}{s}v(S)-\sum_{S\subset N,S\not\ni i}\frac{\lambda_s}{n-s}v(S), \tag{3}$$

其中$\lambda_s=\dfrac{s(n-s)}{n}\cdot\dfrac{\alpha(s)}{\beta}$.

最小二乘解与很多单值解都存在联系,比如:当$\alpha(s)=\dfrac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!}(s=1,2,\ldots,n-1)$时,式(2)为Shapley值.

2 可行联盟集合限制下的最小二乘解

在现实生活中,局中人形成联盟时往往受到诸多因素的制约,并不是所有的联盟都能形成.本节引进

具有可行联盟的合作对策,定义其最小二乘解,并探讨该解的存在性和唯一性条件.

2.1 最小二乘解的概念

将局中人集合N可以形成的联盟的全体用集合系统$\mathcal{F}(N)$表示,即$\mathcal{F}(N)\subseteq 2^N$. 对于任意的$S\in\mathcal{F}(N)$,称$S$为可行联盟. 本文假设$\emptyset, N\in\mathcal{F}(N)$,并将集合$N$上这样的集合系统的全体记为$\Omega(N)$. 为了方便,后文将$\mathcal{F}(N)$简记为$\mathcal{F}$.

三元组$(N,\mathcal{F},v)$称为局中人N上的具有可行联盟的合作对策,其中,特征函数v是定义在$\mathcal{F}$上、取值在实数集合$\boldsymbol{R}$上的支付函数,即$v:\mathcal{F}\rightarrow\boldsymbol{R}$,且$v(\emptyset)=0$,支付函数$v(S)$表示可行联盟$S\in\mathcal{F}$的收益. 将局中人集合为$N$的具有可行联盟的合作对策的集合记为$\mathrm{RG}^N$.

例1　考虑合取许可结构[16](N,L)和特征函数$v=u_{\{1,2\}}$. 其中: $N=\{1,2,3\}, L=\{(1,2),(1,3)\}$, L表示局中人1是局中人2和局中人3的上级,局中人2与局中人3之间无上下级关系. 在合取许可结构中,下级参与合作需得到全部上级的许可,故该对策的可行联盟是$\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,3\},N$,特征函数为$v(\emptyset)=v(\{1\})=v(\{1,3\})=0, v(\{1,2\})=v(N)=1$.

定义3　设$\boldsymbol{x}:\mathrm{RG}^N\rightarrow\boldsymbol{R}^n$. 对于任意的$(N,\mathcal{F},v)$,称$\boldsymbol{x}(N,\mathcal{F},v)=(x_i(N,\mathcal{F},v))_{i\in N}$为$(N,\mathcal{F},v)$的解,其中$x_i(N,\mathcal{F},v)$表示局中人$i\in N$获得的分配值.

定义4　设$(N,\mathcal{F},v)\in\mathrm{RG}^N$. 如果$(N,\mathcal{F},v)$的解$\boldsymbol{x}$满足$\sum\limits_{i\in N}x_i=v(N)$,则称$\boldsymbol{x}$满足有效性.

有效性表明局中人将大联盟的收益完全分配,没有任何剩余. 将满足有效性的解的集合记为$X(N,\mathcal{F},v)$,即

$$X(N,\mathcal{F},v)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\mid x(N)=v(N)\}.$$

定义5　设$(N,\mathcal{F},v)\in\mathrm{RG}^N$以及$\{\alpha(S)\in\boldsymbol{R}_+\mid S\in\mathcal{F}\}$为任意的一组权重系数,如果$\boldsymbol{\varphi}$是最优化问题

$$\begin{aligned}&\min\sum_{S\in\mathcal{F}}\alpha(S)(v(S)-x(S))^2,\\&\text{s.t. } x(N)=v(N)\end{aligned}\tag{4}$$

的解,则称$\boldsymbol{\varphi}$为$\{\alpha(S)\mid S\in\mathcal{F}\}$对应的最小二乘解. 在不混淆的情况下,直接称其为最小二乘解.

本文假设联盟权重系数都为正数. 显然,最优化问题(4)是最优化问题(1)的直接扩展.

2.2 最小二乘解的存在性和唯一性条件

本小节探讨具有可行联盟的合作对策的最小二乘解的存在性,并给出其唯一性的充要条件.

定义6　设联盟$S\in 2^N$和n维向量$\boldsymbol{e}^S\in\boldsymbol{R}^n$为

$$e_i^S=\begin{cases}1,\ i\in S;\\0,\ i\notin S.\end{cases}$$

则称$\boldsymbol{e}^S$为联盟S的指示函数. 对于$\mathcal{F}$中所有可行联盟的指示函数,其极大线性无关组的向量个数称为$\mathcal{F}$的秩,并用$R(\mathcal{F})$表示.

显然,$R(\mathcal{F})\leqslant n$. 当$R(\mathcal{F})=n$时,称$\mathcal{F}$为非奇异的,否则称为奇异的.

例2　考虑$N=\{1,2,3,4\}$上的集合系统. 对于$\mathcal{F}=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},N\}$,有$R(\mathcal{F})=4$;对于$\mathcal{F}'=\{\emptyset,\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},N\}$,有$R(\mathcal{F}')=3$.

定理2　具有可行联盟的合作对策的最小二乘解一定存在.

证明　本定理等价于最优化问题(4)的解存在. 根据凸规划理论,因为$X(N,\mathcal{F},v)$是凸集,所以只需证明$W(\boldsymbol{x},v,\mathcal{F})=\sum\limits_{S\in\mathcal{F}}\alpha(S)(v(S)-x(S))^2$是关于$\boldsymbol{x}\in X(N,\mathcal{F},v)$的严格拟凸函数.

设$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}\in X(N,\mathcal{F},v)$和实数$\kappa\in(0,1)$. 不妨设$W(\boldsymbol{x},v,\mathcal{F})<W(\boldsymbol{y},v,\mathcal{F})$,并记$A(S)=v(S)-x(S)$, $B(S)=v(S)-y(S)$. 显然,$\kappa\boldsymbol{x}+(1-\kappa)\boldsymbol{y}\in X(N,\mathcal{F},v)$. 于是

$$\begin{aligned}&W(\kappa\boldsymbol{x}+(1-\kappa)\boldsymbol{y},v,\mathcal{F})=\\&\sum_{S\in\mathcal{F}}\alpha(S)[\kappa A(S)+(1-\kappa)B(S)]^2=\\&\sum_{S\in\mathcal{F}}\alpha(S)[B(S)+\kappa(A(S)-B(S))]^2=\\&W(\boldsymbol{y},v,\mathcal{F})+\sum_{S\in\mathcal{F}}\alpha(S)[\kappa^2(A(S)-B(S))^2+\\&2\kappa(A(S)-B(S))B(S)]<\\&W(\boldsymbol{y},v,\mathcal{F})+\sum_{S\in\mathcal{F}}\alpha(S)[\kappa(A(S)-B(S))^2+\\&2\kappa(A(S)-B(S))B(S)]=\\&W(\boldsymbol{y},v,\mathcal{F})+\sum_{S\in\mathcal{F}}\alpha(S)[\kappa(A(S)-\\&B(S))(A(S)+B(S))]=\\&W(\boldsymbol{y},v,\mathcal{F})+\kappa(W(\boldsymbol{x},v,\mathcal{F})-W(\boldsymbol{y},v,\mathcal{F}))<\\&W(\boldsymbol{y},v,\mathcal{F}).\end{aligned}$$

这表明$W(\boldsymbol{x},v,\mathcal{F})$是严格拟凸函数. □

定理3　具有可行联盟的合作对策有唯一最小二乘解,当且仅当其可行联盟集合是非奇异的.

证明　该定理等价于最优化问题(4)存在唯一最优解,当且仅当$R(\mathcal{F})=n$.

必要性. 设$\boldsymbol{x}$是最优化问题(4)的唯一解,并假设$R(\mathcal{F})\neq n$. 对于关于$\boldsymbol{y}$的方程组$y(S)=x(S), \forall S\in$

$\mathcal{F}\backslash\{\emptyset\}$,因为$R(\mathcal{F}) \neq n$且$\boldsymbol{x}$是其中的一个解,所以该方程组存在无穷多个解. 显然,这些解都是最优化问题(4)的最优解,而这与最优解$\boldsymbol{x}$的唯一性矛盾. 因此,$R(\mathcal{F}) = n$.

充分性. 当$R(\mathcal{F}) = n$时,假设最优化问题(4)存在最优解$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$,且至少存在一个非空的$S \in \mathcal{F}$,使得$x(S) \neq y(S)$. 由定理2的证明过程可得$W\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}, v, \mathcal{F}\Big) < W(\boldsymbol{x}, v, \mathcal{F})$,这与$\boldsymbol{x}$是最优化问题(4)的最优解矛盾. 因此,对于所有的$S \in \mathcal{F}$都有$x(S) = y(S)$.

令$z_i = x_i - y_i$,对于方程组$z(S) = 0, \forall S \in \mathcal{F}\backslash\{\emptyset\}$. 因为$R(\mathcal{F}) = n$,即上述齐次线性方程组的系数矩阵是非奇异的,所以$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$. 从而$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,即得唯一性. □

注1 具有可行联盟的合作对策对应于给定的联盟权重系数的最小二乘解不唯一(即无穷多个),当且仅当其可行联盟集合是奇异的.

注2 联盟权重系数可由正数弱化为非负数. 此时,如果正权重系数对应的可行联盟全体构成的集合是非奇异的,则其最小二乘解唯一. 定理1和定理3均为此结论的特例.

3 最小二乘解的矩阵解法

本节提出刻画最优化问题(4)的最优解的矩阵方程,并基于此方程求解并分析最小二乘解的表达式.

构造最优化问题(4)的拉格朗日函数,并利用其一阶条件可得,最优化问题(4)的最优解可由如下方程组刻画:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{S\in\mathcal{F}, i\in S} \alpha(S)[x(S)-v(S)] = \\ \displaystyle\sum_{S\in\mathcal{F}, j\in S} \alpha(S)[x(S)-v(S)],\ i,j\in N; \\ \displaystyle\sum_{i\in N} x_i = v(N). \end{cases} \tag{5}$$

给定$i \in N$,将式(5)中第1个等式两端对所有的$j \in N$求和并化简,可得

$$\sum_{S\in\mathcal{F}, i\in S} n\alpha(S)x(S) - \sum_{S\in\mathcal{F}} s\alpha(S)x(S) = \sum_{S\in\mathcal{F}, i\in S} n\alpha(S)v(S) - \sum_{S\in\mathcal{F}} s\alpha(S)v(S).$$

上式可进一步写成

$$\beta_i x_i + \sum_{j\in N\backslash\{i\}} (\beta_{ij} - \beta^j)x_j = \sum_{S\in\mathcal{F}, i\in S} (n-s)\alpha(S)v(S) - \sum_{S\in\mathcal{F}, i\notin S} s\alpha(S)v(S), \tag{6}$$

其中

$$\begin{cases} \beta_i = \displaystyle\sum_{S\in\mathcal{F}, i\in S} (n-s)\alpha(S), \\ \beta_{ij} = \displaystyle\sum_{S\in\mathcal{F}, i\in S, j\in S} n\alpha(S), \\ \beta^j = \displaystyle\sum_{S\in\mathcal{F}, j\in S} s\alpha(S). \end{cases} \tag{7}$$

显然有

$$\beta_i = (n-1)\beta^i - \sum_{j\in N\backslash\{i\}} \beta_{ij},\ \forall i\in N. \tag{8}$$

对于所有的$i \in N$都有式(6)成立,即可得n个关于$\boldsymbol{x}$的方程. 任取其中的$n-1$个方程(因为任意一个方程是由其他$n-1$个方程相加再取相反数而得到的)与$\sum\limits_{i\in N} x_i = v(N)$组成方程组,则此方程组是式(5)的同解变形. 不妨取$i = 1, 2, \ldots, n-1$,并将其写成矩阵方程的形式

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}. \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \ldots & \beta_{1(n-1)} - \beta^{n-1} & \beta_{1n} - \beta^n \\ \beta_{21} - \beta^1 & \ldots & \beta_{2(n-1)} - \beta^{n-1} & \beta_{2n} - \beta^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{(n-1)1} - \beta^1 & \ldots & \beta_{(n-1)(n-1)} - \beta^{n-1} & \beta_{(n-1)n} - \beta^n \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{\substack{S\in\mathcal{F}\\ 1\in S}} (n-s)\alpha(S)v(S) - \sum_{\substack{S\in\mathcal{F}\\ 1\notin S}} s\alpha(S)v(S) \\ \displaystyle\sum_{\substack{S\in\mathcal{F}\\ 2\in S}} (n-s)\alpha(S)v(S) - \sum_{\substack{S\in\mathcal{F}\\ 2\notin S}} s\alpha(S)v(S) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{\substack{S\in\mathcal{F}\\ n-1\in S}} (n-s)\alpha(S)v(S) - \sum_{\substack{S\in\mathcal{F}\\ n-1\notin S}} s\alpha(S)v(S) \\ v(N) \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$.

结合定理2可知,方程(9)的解(即最小二乘解)一定存在. 下面基于该方程分析最小二乘解的表达式.

一般地,系数矩阵$\boldsymbol{A}$的第$k(k = 1, 2, \ldots, n-1)$行的元素不一定满足$\beta_{ki} - \beta^i = \beta_{kj} - \beta^j, \forall i, j \in N$. 由矩阵初等变换可知,不能只通过第$n$行将第$k$行主对角线之外的元素全部化为0. 这表明方程(9)的解不一定具有式(2)或(3)的统一形式.

特殊地,易得如下定理.

定理4 如果:

1) 对于规范任意的$k \in \{1,2,\dots,n-1\}$和任意的$i,j \in N\backslash\{k\}$,有

$$\beta_{ki} - \beta^i = \beta_{kj} - \beta^j \neq \beta_k;$$

2) 对于任意的$i,j \in \{1,2,\dots,n-1\}$,有

$$\beta_i + \sum_{k \in N\backslash\{i,n\}} (\beta_{ki} - \beta^i) = \beta_j + \sum_{k \in N\backslash\{j,n\}} (\beta_{kj} - \beta^j) \neq \sum_{k \in N\backslash\{n\}} (\beta_{kn} - \beta^n).$$

则方程(9)有唯一最优解,且其具体表达式为

$$x_i = \frac{\beta^j - \beta_{ij}}{\beta_i - \beta_{ij} + \beta^j} v(N) + \sum_{S \in \mathcal{F}, i \in S} \frac{(n-s)\alpha(S)}{\beta_i - \beta_{ij} + \beta^j} v(S) - \sum_{S \in \mathcal{F}, i \notin S} \frac{s\alpha(S)}{\beta_i - \beta_{ij} + \beta^j} v(S),\ \forall\, i \in N. \tag{10}$$

其中任意的$j \in N\backslash\{i\}$,且

$$\begin{cases} \beta^j - \beta_{nj} = \beta_j + \sum\limits_{k \in N\backslash\{j,n\}} (\beta_{kj} - \beta^j), \\ \beta_n = -\sum\limits_{k \in N\backslash\{n\}} (\beta_{kn} - \beta^n). \end{cases} \tag{11}$$

注3 条件1)保证$x_i (i = 1,2,\dots,n-1)$有式(10)的表达式;条件2)保证x_n有式(10)的表达式. 事实上,式(11)也可根据(8)得到,即条件2)等价于$\beta_{ni} - \beta^i = \beta_{nj} - \beta^j \neq \beta_n$. 因此,定理4的条件可合并为:对于任意的$k \in N$有$\beta_{ki} - \beta^i = \beta_{kj} - \beta^j \neq \beta_k,\ \forall\, i,j \in N$.

注4 如果$\beta^i - \beta_{ij} = c, \forall i,j \in N$,其中$c \in \boldsymbol{R}$为非零常数(如果$c = 0$,则由式(8)可知$\boldsymbol{A}$的前$n-1$行元素均为0,即$\boldsymbol{A}$是奇异的),则此时$\boldsymbol{A}$是非奇异的,且可推导出

$$\beta^i = \beta^j,\ \beta_{ij} = \beta_{kl},\ k,l \in N,$$
$$\beta_i = \beta_j,\ \beta_i - \beta_{ij} + \beta^j = nc \neq 0.$$

由式(10)可知

$$x_i = \frac{1}{n} v(N) + \sum_{S \in \mathcal{F}, i \in S} \frac{(n-s)\alpha(S)}{nc} v(S) - \sum_{S \in \mathcal{F}, i \notin S} \frac{s\alpha(S)}{nc} v(S),\ \forall i \in N. \tag{12}$$

显然,如果权重系数是对称的,即当$|S| = |T|$时,$\alpha(S) = \alpha(T)$,并令$\lambda_s = \dfrac{s(n-s)}{n} \cdot \dfrac{\alpha(S)}{c}$,则式(12)与(3)一致,即文献[1]的最小二乘解是式(12)的特例.

例3 考虑$(N, \mathcal{F}, v)$,其中$N = \{1,2,3,4\}$,$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}, N\}$,特征函数为$v(\emptyset) = 0, v(\{1,2\}) = 1, v(\{2,3\}) = 2, v(\{3,4\}) = 3, v(\{1,4\}) = 4, v(N) = 5$. 由式(7)和(9)可知,联盟权重系数均为1的最小二乘解等价于如下方程的解:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

解得

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ k \in \boldsymbol{R},$$

即对应于联盟权重系数均为1的最小二乘解有无穷多个. 由注1可知,其原因是$R(\mathcal{F}) = 3 < 4$,即可行联盟集合是奇异的.

例4 在例3的基础上,考虑$\mathcal{F}' = \mathcal{F} \bigcup \{\{1\}\}$且$v(\{1\}) = 1$,易得$R(\mathcal{F}') = 4$. 此时,最小二乘解对应的方程为

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

解得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

从$\boldsymbol{A}^{-1}$的第4列可知,x_1和x_3中$v(N)$的系数为0,即它们的取值与大联盟收益无关;而经典合作对策的最小二乘解的表达式中$v(N)$的系数始终为$1/n$. 这直观说明了可行联盟限制情形与经典情形的最小二乘解存在差异.

4 最小二乘解的性质

具有可行联盟的合作对策的最小二乘解不仅与联盟权重系数、特征函数有关,而且与可行联盟集合的结构和秩有关,这使得它的存在性和表达式与经典情形有很大不同. Ruiz等[1]研究经典合作对策的最小二乘解时假设联盟的权重系数是对称的,即权重系数仅与联盟的基数有关. 类似地,本节在联盟权重系数是对称的前提下,探讨当最小二乘解唯一时该解满足的性质.

为了方便,将RG^N上满足$R(\mathcal{F}) = n$的合作对

策全体记为RG_0^N;将对称的权重系数$\{\alpha(s) \mid S \in \mathcal{F}\backslash\{\emptyset, N\}, |S| = s\}$简记为$\alpha$;将$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}_0^N$对应于权重系数$\alpha$的最小二乘解记为$\mathbf{LS}^\alpha(N,\mathcal{F},v)$.

定义7 设$(N,\mathcal{F},v),(N,\mathcal{F},w) \in \mathrm{RG}^N$和$a$、$b \in \boldsymbol{R}$. 如果$\boldsymbol{x}(N,\mathcal{F},av+bw) = a\boldsymbol{x}(N,\mathcal{F},v) + b\boldsymbol{x}(N,\mathcal{F},v)$,则称$\boldsymbol{x}$满足线性.

线性表明局中人的分配值随着联盟收益同比例变化,而且将联盟收益分开或合并讨论均不影响最终分配.

定义8 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$. 如果$i,j \in N$满足: 1) 对于任意的$S \subseteq N\backslash\{i,j\}$, $S\bigcup\{i\} \in \mathcal{F}$,当且仅当$S\bigcup\{j\} \in \mathcal{F}$; 2) 对于任意的$S\bigcup\{i\}, S\bigcup\{j\} \in \mathcal{F}$,有$v(S\bigcup\{i\}) = v(S\bigcup\{j\})$. 则称$i$和$j$是可替代的.

定义9 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$. 如果对于任意的可替代局中人$i,j \in N$有$x_i(N,\mathcal{F},v) = x_j(N,\mathcal{F},v)$,则称$\boldsymbol{x}$满足平等对待性.

平等对待性表明两个局中人在对策中的作用无差异,那么他们获得的分配值相同. 平等对待性是经典合作对策解的对称性的推广,其隐含条件是对应的联盟权重系数也相同.

定义10 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$和$\pi: N \to N$. 如果$\boldsymbol{x}(\pi N,\pi\mathcal{F},\pi v) = \pi\boldsymbol{x}(N,\mathcal{F},v)$,则称$\boldsymbol{x}$满足匿名性. 其中$\pi\mathcal{F} = \{S \subseteq \pi N \| \pi^{-1}S \in \mathcal{F}\}$, $(\pi N,\pi\mathcal{F},\pi v)$的特征函数为$v(\pi S) = v(S)$, $\forall S \in \mathcal{F}$.

匿名性表明局中人的名称不影响它的分配值.

定义11 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$和$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$. 如果$v(S) = \sum\limits_{i\in S} b_i, \forall S \in \mathcal{F}$,则称$(N,\mathcal{F},v)$为基于$\boldsymbol{b}$的非本质限制对策或简称非本质对策.

当$R(\mathcal{F}) = n$时,非本质对策$(N,\mathcal{F},v)$与$\boldsymbol{b}$是一一对应的;当$R(\mathcal{F}) < n$时,非本质对策$(N,\mathcal{F},v)$对应无穷多个$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$.

定义12 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$是基于$\boldsymbol{b}$的非本质限制对策. 如果$\boldsymbol{x}(N,\mathcal{F},v) = \boldsymbol{b}$,则称$\boldsymbol{x}$满足非本质对策性.

非本质对策性表明局中人组成联盟不产生额外的收益,那么他获得的分配值与其"贡献"相同(局中人的"贡献"并非其单干时的收益).

定义13 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N, a \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$. 如果$\boldsymbol{x}(N,\mathcal{F},av+\boldsymbol{b}) = a\boldsymbol{x}(N,\mathcal{F},v) + \boldsymbol{b}$,则称$\boldsymbol{x}$满足策略等价性. 其中$(N,\mathcal{F},av+\boldsymbol{b})$的特征函数为$(av+\boldsymbol{b})(S) = av(S) + b(S), \forall S \in \mathcal{F}$.

策略等价性与线性的解释类似. 当$a = 0$时,策略等价性退化为非本质对策性;当$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$时,策略等价性退化为数乘.

定理5 在RG_0^N上的最小二乘解满足有效性、线性、平等对待性、匿名性、非本质对策性、策略等价性.

证明 由定义5和式(9)易知, $\mathbf{LS}^\alpha(N,\mathcal{F},v)$满足有效性、平等对待性、匿名性. 下面证明其他性质.

设$(N,\mathcal{F},v),(N,\mathcal{F},w) \in \mathrm{RG}_0^N, a,b \in \boldsymbol{R}$和$\alpha$为联盟权重系数. 由定理3可得, $(N,\mathcal{F},v)$、$(N,\mathcal{F},w)$和$(N,\mathcal{F},av+bw)$的最小二乘解均唯一. 基于式(9),设$(N,\mathcal{F},v)$、$(N,\mathcal{F},w)$和$(N,\mathcal{F},av+bw)$的最小二乘解对应的矩阵方程分别为$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{D}$. 显然,系数矩阵$\boldsymbol{A}$可逆,并且常数矩阵$\boldsymbol{D} = a\boldsymbol{B} + b\boldsymbol{C}$. 于是$\mathbf{LS}^\alpha(N,\mathcal{F},av+bw) = a\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} + b\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} = a\mathbf{LS}^\alpha(N,\mathcal{F},v) + b\mathbf{LS}^\alpha(N,\mathcal{F},w)$,即满足线性.

设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}_0^N$为基于$\boldsymbol{b}$的非本质限制对策. 因为$R(\mathcal{F}) = n$,所以$(N,\mathcal{F},v)$的最小二乘解唯一. 考虑分配$\boldsymbol{x}(N,\mathcal{F},v) = \boldsymbol{b}$,对于所有的$\forall S \in \mathcal{F}$有$(x(S) - v(S))^2 = 0$,从而$\sum\limits_{S\in\mathcal{F}} \alpha(S)(v(S) - x(S))^2$最小. 这表明$\boldsymbol{b}$是最小二乘解,即满足非本质联盟性.

由线性以及非本质对策性可以推导出策略等价性. □

注5 当$R(\mathcal{F}) \neq n$时,有效性成立,但是匿名性、平等对待性、线性、非本质对策性、策略等价性不一定成立. 例如:始终在一起的两个局中人是可替代的,但是在最小二乘解中只需它们的分配值之和相同即可,这显然不满足匿名性、平等对待性,进而可推出它不满足其他性质.

定义14 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}_0^N$和$i \in N$. 如果对于任意的$S, S\bigcup\{i\} \in \mathcal{F}$有$v(S\bigcup\{i\}) = v(S)$,则称$i$为$(N,\mathcal{F},v)$的哑元.

定义15 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}_0^N$且$i$为$(N,\mathcal{F},v)$的哑元. 如果$x_i(N,\mathcal{F},v) = 0$,则称$\boldsymbol{x}$满足哑元性.

命题1 $(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}_0^N$的最小二乘解不一定满足哑元性.

证明 反证法. 考虑$(N,\mathcal{F},v)$,其中$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$,且$v(\emptyset) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1\}) = 1, v(N) = 4$. 由定义14可知,局中人2和局中人3均为哑元. 然而,该对策对应于联盟权重系数为1的最小二乘解为$(2,1,1)$,即哑元2与哑元3的分配值均非0. □

注6 对于命题1证明过程中的对策,无论对称权重取何值,其最小二乘解始终不满足哑元性. 该性质与经典情形存在差异,因为在经典合作对策中存在满足哑元性的最小二乘解,且该解唯一(即为Shapley值). 另外,对于模糊支付合作对策,由最小二乘解与模糊Shapley值的关系可知,文献[9]利用最小平方优

化方法得到的解满足无关局中人性质(定理4)和虚拟局中人性质(定理5)存在一些问题.

给定的$S \in \mathcal{F}\backslash\{\emptyset, N\}$. 考虑$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}_0^N$, 其特征函数为$v(S) \neq 0, v(N) \neq v(S), v(T) = 0$, 且$\forall T \in \mathcal{F}\backslash\{S,N\}$, 易证, 该对策的最小二乘解满足$x(S) \neq v(S)$, 并且存在$T \in \mathcal{F}\backslash\{\emptyset,S,N\}$使得$x(T) \neq 0$. 也就是说, 联盟$T$的收益为0(称其为非本质联盟), 但联盟$T$中局中人的最小二乘解不一定为0. 这表明最小二乘解不满足非本质联盟可去性, 即非本质联盟影响最终收益. 因此, 收益为0的可行联盟即使不影响可行联盟集合的秩, 在计算最小二乘解时也不可将其省略.

5 最小二乘解的修正

基于形成联盟时不可分开的局中人获得相同的分配值这一分配准则, 本节在最小二乘解的基础上提出对称最小二乘解, 并探讨其存在性、唯一性条件和相关性质.

定义16 [7] 设$\mathcal{F}$为可行联盟集合和i、$j \in N$. 如果对于任意的$S \in \mathcal{F}$, 有$\{i,j\}\bigcap S = \{i,j\}$或者$\{i,j\}\bigcap S = \emptyset$, 则称$i$与$j$在$\mathcal{F}$中是同质的.

定义17 [7] 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$. 如果对于同质的局中人$i$、$j \in N$有$x_i(N,\mathcal{F},v) = x_j(N,\mathcal{F},v)$, 则称$\boldsymbol{x}$满足同质等对待性.

同质的局中人不能单独与其他局中人合作形成可行联盟, 它们必须作为整体而存在. 如果合作对策中存在同质局中人, 则其可行联盟集合是奇异的, 从而其最小二乘解不唯一. 同质等对待性表明局中人如果在形成可行联盟时始终不可分开, 则它们获得相同的分配值.

定义18 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$, α为权重系数, $\mathbf{LS}^\alpha$是$(N,\mathcal{F},v)$对应于α的最小二乘解的集合. 如果$\boldsymbol{x} \in LS^\alpha$满足$x_i(N,\mathcal{F},v) = x_j(N,\mathcal{F},v)$, 其中$i$、$j \in N$是同质的局中人, 则称$\boldsymbol{x}$为对称最小二乘解.

对称最小二乘解是当最小二乘解不唯一时的一种修正解. 然而, 对称最小二乘解不一定存在, 也不一定唯一. 下面利用同质关系对局中人集合N进行划分, 并基于此探讨对称最小二乘解的唯一性条件.

设$(N_1(\mathcal{F}), N_2(\mathcal{F}), \ldots, N_{k(\mathcal{F})}(\mathcal{F}))$, $k(\mathcal{F}) \in \boldsymbol{N}_+$, 满足:

1) 局中人i、$j \in N$是同质的, 当且仅当存在一个$t \in \{1,2,\ldots,k(\mathcal{F})\}$, 使得$i$、$j \in N_t(\mathcal{F})$;

2) 没有与局中人$i \in N$同质的其他局中人, 则存在一个$t \in \{1,2,\ldots,k(\mathcal{F})\}$, 使得$i \in N_t(\mathcal{F})$且$|N_t(\mathcal{F})| = 1$.

显然, 上述划分唯一, 且对于$l, h \in \{1,2,\ldots,k(\mathcal{F})\}$, $l \neq h$, 有$N_l(\mathcal{F})\bigcap N_h(\mathcal{F}) = \emptyset$和$\bigcup\limits_{i=1}^{k(\mathcal{F})} N_i(\mathcal{F}) = N$.

定理6 具有可行联盟的合作对策存在唯一的对称最小二乘解, 当且仅当$R(\mathcal{F}) = k(\mathcal{F}) < n$.

证明 设$(N_1(\mathcal{F}), N_2(\mathcal{F}), \ldots, N_{k(\mathcal{F})}(\mathcal{F}))$是基于$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$中同质关系对$N$的划分, 且满足

$$\begin{cases}|N_i(\mathcal{F})| > 1,\ i = 1,2,\ldots,d;\\ |N_i(\mathcal{F})| = 1,\ i = d+1, d+2, \ldots, k(\mathcal{F}).\end{cases}$$

如果$k(\mathcal{F}) = n$, 即不存在同质的局中人, 则此时不存在对称最小二乘解.

如果$k(\mathcal{F}) < n$, 则类似于熵对策的构造方法, 将$(N,\mathcal{F},v)$中同质的局中人看作一个整体, 基于前述划分构造新对策$(N_{[N_i]}, \mathcal{F}_{[N_i]}, v_{[N_i]})$, 其中

$$N_{[N_i]} = N\backslash\bigcup_{i=1}^{d} N_i(\mathcal{F})\bigcup\{i_1, i_2, \ldots, i_d\},$$

$$\mathcal{F}_{[N_i]} = \{S\backslash\bigcup_{i=k}^{k+s} N_i(\mathcal{F})\bigcup\{i_k,\ldots,i_{k+s}\}|\ S\bigcap\bigcup_{i=1}^{d} N_i(\mathcal{F}) = \bigcup_{i=k}^{k+s} N_i(\mathcal{F}),\ S \in \mathcal{F}\},$$

$$v_{[N_i]}(S) = \begin{cases} v(S),\ S\bigcap\{i_1,i_2,\ldots,i_d\} = \emptyset;\\ v(S\backslash T\bigcup\bigcup\limits_{i=k}^{k+s} N_i(\mathcal{F})),\\ \quad S\bigcap\{i_1,i_2,\ldots,i_d\} = T \neq \emptyset.\end{cases}$$

显然, $R(\mathcal{F}_{[N_i]}) = R(\mathcal{F})$且$|N_{[N_i]}| = k(\mathcal{F})$. 由定理3可知, $(N_{[N_i]}, \mathcal{F}_{[N_i]}, v_{[N_i]})$具有唯一的最小二乘解, 当且仅当$R(\mathcal{F}_{[N_i]}) = |N_{[N_i]}|$, 即$R(\mathcal{F}) = k(\mathcal{F})$. 设$(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_d}, \ldots, x_{i_{k(\mathcal{F})}})$是$(N_{[N_i]}, \mathcal{F}_{[N_i]}, v_{[N_i]})$唯一的最小二乘解. 定义

$$y_i = \begin{cases} x_{i_s},\ i \in N_{i_s}(\mathcal{F}),\ i_s \in \{i_{d+1}, i_{d+2}, \ldots, i_{k(\mathcal{F})}\};\\ \dfrac{x_{i_s}}{|N_{i_s}(\mathcal{F})|},\ i \in N_{i_s}(\mathcal{F}),\ i_s \in \{i_1, i_2, \ldots, i_d\}.\end{cases}$$

则$\boldsymbol{y}$是$(N,\mathcal{F},v)$的对称最小二乘解, 并且$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$一一对应, 故$\boldsymbol{y}$唯一. □

定义19 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$是基于$\boldsymbol{b}$的非本质限制对策, 并设$i \in N$是不与其他局中人同质的任意局中人. 如果$x_i(N,\mathcal{F},v) = b_i$, 则称$\boldsymbol{x}$满足类非本质对策性.

定义20 设$(N,\mathcal{F},v) \in \mathrm{RG}^N$, $a \in \boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$. 如果$x_i(N,\mathcal{F},av+\boldsymbol{b}) = ax_i(N,\mathcal{F},v) + b_i$, 其中$i \in N$是与其他局中人不同质的任意局中人, 则称$\boldsymbol{x}$满足类策略等价性.

基于式(9)、定理5和定义18易得如下定理.

定理7 如果$(N,\mathcal{F},v)$的对称最小二乘解唯一, 则该解满足有效性、线性、平等对待性、匿名性、同质

等对待性、类非本质对策性、类策略等价性.

例5 考虑$(N,\mathcal{F},v)$,其中$N=\{1,2,3,4\}$,$\mathcal{F}=\{\emptyset,\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},N\}$. 因为$R(\mathcal{F})=3<4$,所以该对策对应于给定联盟权重系数的最小二乘解有无穷多个. 因为该对策中没有同质的局中人,所以不存在对称最小二乘解.

例6 考虑$(N,\mathcal{F},v)$,其中$N=\{1,2,3,4,5,6\}$,$\mathcal{F}=\{\emptyset,\{1,2\},\{2,3,4\},\{5,6\},N\}$. 此时,$R(\mathcal{F})=4<6$,局中人5与局中人6是同质的($k(\mathcal{F})=5$),而对称最小二乘解有无穷多个.

例7 考虑$(N,\mathcal{F},v)$,其中$N=\{1,2,3,4,5\}$,$\mathcal{F}=\{\emptyset,\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{4,5\},N\}$. 此时,局中人4与局中人5是同质的,$R(\mathcal{F})=k(\mathcal{F})=4<5$,故对称最小二乘解唯一.

6 结 论

本文从局中人合作限制的角度对经典合作对策的最小二乘解进行扩展,提出了具有可行联盟的合作对策的最小二乘解,并利用凸规划理论探讨了该最小二乘解的存在性,给出了其唯一性条件,同时讨论了该解的具体表达式和相关性质,并且提出了最小二乘解的一种修正,即对称最小二乘解. 本文构建的最小二乘解相关理论可为特殊联盟结构下相关单值解的研究提供参考,该解也可广泛应用于经济与管理等领域.

参考文献(References)

[1] Ruiz L M, Valenciano F, Zarzuelo J M. The family of least square values for transferable utility games[J]. Games and Economic Behavior, 1998, 24(1/2): 109-130.

[2] Ruiz L M, Valenciano F, Zarzuelo J M. Some new results on least square values for TU games[J]. Top, 1998, 6(1): 139-158.

[3] Shapley L S. A value for n-person games[C]. Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies. Princeton: Princeton University Press, 1953: 307-317.

[4] Dragan I. The least square values and the Shapley value for cooperative TU games[J]. Top, 2006, 14(1): 61-73.

[5] Laruelle A, Merlin V. Different least square values, different rankings[J]. Social Choice and Welfare, 2002, 19(3): 533-550.

[6] Hernández-Lamoneda L, Sánchez-Sánchez F. Linear symmetric rankings for TU-games[J]. Theory and Decision, 2017, 82(4): 461-484.

[7] Li D F. Models and methods of interval-valued cooperative games in economic management[M]. Switzerland: Springer, 2016: 13-30.

[8] 李登峰, 刘家财. 基于最小平方距离的区间值合作对策求解模型与方法[J]. 中国管理科学, 2016, 24(7): 135-142.
(Li D F, Liu J C. Models and method of interval-valued cooperative games based on the least square distance[J]. Chinese Journal of Management Science, 2016, 24(7): 135-142.)

[9] 肖燕, 李登峰. 联盟值为梯形模糊数的合作对策最小平方求解模型与方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(4): 834-842.
(Xiao Y, Li D F. The least square solution model and method of the cooperative games with the trapezoidal fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 834-842.)

[10] 刘家财, 李登峰, 胡勋锋. 区间值最小二乘核仁解及在供应链合作利益分配中的应用[J]. 中国管理科学, 2017, 25(12): 78-87.
(Liu J C, Li D F, Hu X F. Interval-valued least square nucleolus and its application in cooperative profit allocation of supply chain[J]. Chinese Journal of Management Science, 2017, 25(12): 78-87.)

[11] Li D F, Ye Y F. Interval-valued least square prenucleolus of interval-valued cooperative games and a simplified method[J]. Operational Research, 2018, 18(1): 205-220.

[12] Wang W, Sun H, Van den Brink R, et al. The family of ideal values for cooperative games[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2018, 180(3): 1065-1086.

[13] Katsev I, Yanovskaya E. The prenucleolus for games with restricted cooperation[J]. Mathematical Social Sciences, 2013, 66(1): 56-65.

[14] Naumova N I. Solidary solutions to games with restricted cooperation[C]. Contributions to Game Theory and Management VI. Petersburg: Petersburg University, 2013: 316-337.

[15] Naumova N I. Generalized nucleolus, kernels, and bargaining sets for cooperative games with restricted cooperation[C]. Contributions to Game Theory and Management VIII. Petersburg: Petersburg University, 2015: 231-242.

[16] Gilles R P, Owen G, Van den Brink R. Games with permission structures: The conjunctive approach[J]. International Journal of Game Theory, 1992, 20(3): 277-293.

作者简介

邹正兴(1989−), 男, 博士生, 从事合作对策理论及应用的研究, E-mail: zhengxingzou@126.com;

张强(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事合作对策、供应链管理、模糊数学等研究, E-mail: qiangzhang@bit.edu.cn;

吴佳颖(1993−), 女, 硕士, 从事管理会计、收益分配理论的研究, E-mail: jiayingwu_wjy@163.com;

周珍(1972−), 女, 教授, 博士, 从事不确定决策与对策等研究, E-mail: jiucun2006@hotmail.com.

(责任编辑: 闫 妍)