一类非线性系统的全局快速有限时间鲁棒控制

刘彩云， 孙宗耀， 孟庆华， 蔡彬， 谭庆全

引用本文:
刘彩云, 孙宗耀, 孟庆华, 等. 一类非线性系统的全局快速有限时间鲁棒控制[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 1004-1008.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0974

文章编号: 1001-0920(2020)04-1004-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.0974

一类非线性系统的全局快速有限时间鲁棒控制

刘彩云[1], 孙宗耀[1†], 孟庆华[2], 蔡 彬[1], 谭庆全[3]

(1. 曲阜师范大学 自动化研究所，山东 曲阜 273165；2. 杭州电子科技大学 机械工程学院，杭州 310018；3. 北京市地震局，北京 100080)

摘 要: 研究一类非线性系统的全局快速有限时间鲁棒控制问题. 借助于符号函数技术和快速有限时间稳定性理论, 构造一个新的 Lyapunov 函数, 确保所设计的非光滑控制器能够处理系统的多种不确定性, 且可以缩短系统状态的收敛时间. 最后, 通过一个仿真实例来说明所提出控制策略的有效性.

关键词: 快速有限时间；鲁棒控制；符号函数；非光滑控制器；不确定性；收敛时间

中图分类号: O231.2 **文献标志码:** A

Global fast finite-time robust control for a class of nonlinear systems

LIU Cai-yun[1], *SUN Zong-yao*[1†], *MENG Qing-hua*[2], *CAI Bin*[1], *TAN Qing-quan*[3]

(1. Institute of Automation，Qufu Normal University，Qufu 273165，China；2. School of Mechanical Engineering，Hangzhou Dianzi University，Hangzhou 310018，China；3. Earthquake Administration of Beijing Municipality，Beijing 100080，China)

Abstract: This paper investigates the global fast finite time robust control problem for a class of nonlinear systems. A new Lyapunov function is constructed based on the sign function technique and fast finite-time stability theory, which ensures the proposed non-smooth controller can effectively deal with various uncertainties of the system to be investigated, and the convergence time is shortened. Finally, a simulation example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: fast finite-time；robust control；sign function；non-smooth controller；uncertainties；convergence time

0 引 言

近几十年来, 非线性系统的控制问题得到了快速发展[1-3], 其中有限时间稳定问题因具有收敛速度快、精度高、鲁棒性好等特点, 近年来受到了越来越多的关注[4-7]. 另一方面, 实际控制系统不可避免地受到外界干扰的影响[8-11], 因此必须尽可能地减小它们对输出的影响. 然而, 当未知参数和扰动同时存在时, 系统的鲁棒控制问题并没有得到解决. 因此, 一个新的研究问题被提出来: 如何解决系统的全局快速有限时间鲁棒控制问题, 并缩短系统状态的收敛时间?

本文在设计过程中遇到的难点和主要贡献如下: 1) 为实现系统的快速有限时间镇定, Lyapunov 函数的构造是十分困难的. 即使找到合适的 Lyapunov 函数, 由于符号函数的存在也使得求导设计过程十分复杂. 2) 通过减弱对非线性项函数的限制, 使得本文的适用范围更加广泛, 实际意义更加鲜明. 但是构造反馈控制器时, 允许多大的不确定性存在是本文需要解决的重点问题, 也是本文的难点. 3) 本文的收敛速度较已有结果得到大大提高, 且收敛时间依赖于初始状态, 解决了以往有限时间结果仅适用于初始值在零点附近的情况.

1 预备知识

下面给出本文用到的一些重要引理[11-14].

引理 1 设 c、d 是正常数, $\gamma(x,y)$ 是给定的正实值函数, 对于任意的 $x\in\boldsymbol{R}, y\in\boldsymbol{R}$, 如下不等式成立:

$$|x^c y^d|\leqslant\frac{c}{c+d}\gamma(\cdot)|x|^{c+d}+\frac{d}{c+d}\gamma(\cdot)^{-c/d}|y|^{c+d}.$$

引理 2 给定常数 $r\geqslant 0$, 对于任意的 $x\in\boldsymbol{R}, y\in\boldsymbol{R}$, 如下不等式成立:

$$|x+y|^r\leqslant c_r(|x|^r+|y|^r).$$

其中: 若 $r\geqslant 1$, 则 $c_r=2^{r-1}$; 若 $0\leqslant r<1$, 则 $c_r=1$. 此外, 若 r 为奇数且 $0<r\leqslant 1$, 则有 $|x^r-y^r|\leqslant$

收稿日期: 2018-07-15；**修回日期:** 2018-10-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61773237, 61473170)；中国博士后科学基金项目 (2017M610414)；山东省研究生教育优质课程 (SDYKC17079)；浙江省自然科学基金项目 (LY16E050003).

责任编委: 刘允刚.

†通讯作者. E-mail: sunzongyao@sohu.com.

$2^{1-r}|x-y|^r$.

引理3　给定奇整数$p=c/d\geqslant 1$,且$d\geqslant 1$,对于任意的$x\in\boldsymbol{R},y\in\boldsymbol{R}$,如下不等式成立:

$$|x^p-y^p|\leqslant 2^{1-\frac{1}{d}}\times|\lceil x\rceil^c-\lceil y\rceil^c|^{\frac{1}{d}}.$$

引理4　设$f(x,y):\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\rightarrow\boldsymbol{R}$是一个连续可微函数,且满足$f(0,y)=0$,则存在一个正光滑函数$\hat{f}(x,y)$使得$f(x,y)\leqslant\hat{f}(x,y)\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

引理5　考虑如下自治系统:

$$\dot{x}(t)=f(x(t)),\ f(0)=0,\ x\in U_0\subseteq R^n,\tag{1}$$

其中$f:U_0\rightarrow\boldsymbol{R}^n$在包含原点的开邻域$U_0$内是连续的. 同时,假设连续可微函数:$W(x):\boldsymbol{R}^n\rightarrow\boldsymbol{R}^+$是正定的,并且是径向无界的. 假设$W$沿系统(1)的解的时间导数满足$\dot{W}+m_1W^{\alpha_1}+m_2W^{\alpha_2}\leqslant 0$,其中$m_1$、$m_2>0$且$\alpha_1\geqslant 1,0<\alpha_2<1$为已知常数. 于是,当时间$T\geqslant 0$时,对于任意$t\geqslant T$都有$x(t)=0$. 其中

$$T=\begin{cases}\dfrac{1}{m_2(1-\alpha_2)}+\dfrac{W^{1-\alpha_1}(x(0))-1}{m_1(1-\alpha_1)},\ \alpha_1>1;\\ \dfrac{1}{m_1(1-\alpha_2)}\ln\Big(1+\dfrac{m_1}{m_2}W^{1-\alpha_2}(x(0))\Big),\ \alpha_1=1.\end{cases}$$

引理6　设$p\in[1,\infty)$. 当$i=1,2,\ldots,n$时,对于任意的$x_i\in\boldsymbol{R}$,如下不等式成立:

$$(|x_1|+\ldots+|x_n|)^p\leqslant n^{p-1}(|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p).$$

2　非线性系统的控制设计

2.1　问题陈述和预备知识

本文研究如下非线性系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_i=d_i(t,x,u)x_{i+1}+f_i(t,x,u)+g_i(t,x,u)\omega,\\ \dot{x}_n=d_n(t,x,u)u+f_n(t,x,u)+g_n(t,x,u)\omega,\\ y=h(x_1).\end{cases}\tag{2}$$

其中:$i=1,2,\ldots,n-1$;$x\in\boldsymbol{R}^n$是系统状态且初始条件满足$x(0)=x_0$;$u\triangleq x_{n+1}\in\boldsymbol{R}$和$y\in\boldsymbol{R}$分别为系统的控制输入和输出;$d_i(\cdot):\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}$, $g_i(\cdot):\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}^s$和$f_i(\cdot):\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}$为连续函数;函数$h(x_1)$连续可微且满足$h(0)=0$; $\omega:\boldsymbol{R}^+\rightarrow\boldsymbol{R}^s$为连续时变干扰信号且满足$\omega\in L_2$.

本文目标是设计一个非光滑控制器$u(t)$,若$\omega=0$,则闭环系统的状态快速收敛到零;若$\omega\neq 0$,则使得

$$\int_0^t|y(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon^2\int_0^t\|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s+\zeta(x_0)$$

成立. 其中:$\varepsilon>0$是预先给定的任意小的实数,$\zeta\geqslant 0$是一个合适的非负常数.

为实现目标,本文给出如下假设:

假设1　对于$i=1,2,\ldots,n$,存在一个非负光滑函数$\bar{f}_i(\bar{x}_i):\boldsymbol{R}^i\rightarrow\boldsymbol{R}$且$\bar{f}_i(0)=0$,使得

$$|f_i|\leqslant\frac{d_i(\cdot)}{2}|x_{i+1}|+\sum_{j=1}^{i}|x_j|^{\mu_{ij}+\frac{r_i+\gamma}{r_j}}\bar{f}_i(\bar{x}_i).$$

其中:$d_i(\cdot)$与式(2)中定义相同;$\gamma\in(-1/n,0)$;$\mu_{ij}\geqslant 0$;$r_1,\ldots,r_n$定义为$r_1=1,r_j=r_{j-1}+\gamma,j=1,2,\ldots,n$.

假设2　对于$i=1,2,\ldots,n$,存在连续函数$\mu_i(\bar{x}_i)$和正光滑函数$\lambda_i(\bar{x}_i)$,使得$\lambda_i(\bar{x}_i)\leqslant|d_i(\cdot)|\leqslant\mu_i(\bar{x}_i)$.

假设3　对于$i=1,2,\ldots,n$,存在一个非负连续函数$\varphi_i(\bar{x}_i)$且$\varphi_i(0)=0$,使得$\|g_i(\cdot)\|\leqslant\varphi_i(\bar{x}_i)$.

注1　与文献[5]的假设条件相比,假设2不仅将$|d_i|$的上界μ_i放宽为关于$x_1,\ldots,x_i$的连续函数,而且允许下界λ_i为关于$x_1,\ldots,x_i$的光滑函数. 同时,假设2表明d_i为严格正或严格负. 不失一般性,在接下来的控制器设计过程中,本文仅考虑$d_i>0$的情况,$d_i<0$的情况类似可得.

引入如下坐标变换:

$$\begin{aligned}&z_1=x_1, && x_1^*=0,\\&z_2=\lceil x_2\rceil^{\frac{1}{r_2}}-\lceil x_2^*\rceil^{\frac{1}{r_2}}, && x_2^*=-\xi_1(x_1)\lceil z_1\rceil^{r_2},\\&\quad\vdots && \quad\vdots\\&z_n=\lceil x_n\rceil^{\frac{1}{r_n}}-\lceil x_n^*\rceil^{\frac{1}{r_n}}, && x_n^*=-\xi_{n-1}(\bar{x}_{n-1})\lceil z_{n-1}\rceil^{r_n},\\&z_{n+1}=\lceil x_{n+1}\rceil^{\frac{1}{r_{n+1}}}-\lceil x_{n+1}^*\rceil^{\frac{1}{r_{n+1}}}=0,\\&u(t)=x_{n+1}=x_{n+1}^*=-\xi_n(x)\lceil z_n\rceil^{r_{n+1}}.\end{aligned}\tag{3}$$

其中:$\xi_i(\bar{x}_i)>0\,(i=1,2,\ldots,n)$是光滑函数. 为了实现控制器$u(t)$的设计,本文定义

$$W_k(\bar{x}_k)=\int_{x_k^*}^{x_k}\big\lceil\lceil s\rceil^{\frac{1}{r_k}}-\lceil x_k^*\rceil^{\frac{1}{r_k}}\big\rceil^{2-r_{k+1}}\mathrm{d}s,$$

其中$k=1,2,\ldots,n$. W_k的性质由如下命题描述.

命题1　对于$k=1,2,\ldots,n$, W_k连续可微且满足

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_i}=-\int_{x_k^*}^{x_k}\big|\lceil s\rceil^{\frac{1}{r_k}}-\lceil x_k^*\rceil^{\frac{1}{r_k}}\big|^{1-r_{k+1}}\mathrm{d}s\cdot(2-r_{k+1})\frac{\partial\lceil x_k^*\rceil^{\frac{1}{r_k}}}{\partial x_i},\ i=1,2,\ldots,k-1;$$

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_k}=\lceil z_k\rceil^{2-r_{k+1}};$$

$$c_{k1}|x_k-x_k^*|^{\frac{2-\gamma}{r_k}}\leqslant W_k\leqslant c_{k2}|z_k|^{2-\gamma}.$$

其中

$$c_{k1}=\frac{r_k}{2-\gamma}2^{(2-r_{k+1})(r_k-1)/r_k},\ c_{k2}=2^{1-r_k}.$$

2.2　控制器设计

设计过程分为以下两步.

step 1: 设$V_1(x_1)=\dot{W}_1+m_1W_1^{\alpha_1}$,其中$\alpha_1\geqslant 1$, m_1为正常数. 首先由引理4可知,存在一个正光滑函数$\psi_0(x_1)$满足$h(x_1)\leqslant\psi_0(x_1)|x_1|$,从而不难证明

$$V_1 \leqslant$$
$$\lceil z_1 \rceil^{1-\gamma} d_1(x_2 - x_2^*) + \lceil x_1 \rceil^{1-\gamma} d_1 x_2^* + \psi_0^2 z_1^2 +$$
$$\lceil z_1 \rceil^{1-\gamma} f_1 + \lceil z_1 \rceil^{1-\gamma} g_1 \omega + m_1 W_1^{\alpha_1} - y^2. \tag{4}$$

注意到$|z_1|^{1-\gamma}|x_2^*| = -\lceil z_1 \rceil^{1-\gamma} x_2^*$,即$\lceil z_1 \rceil^{1-\gamma} x_2^* < 0$. 则由假设1和引理2可得

$$\lceil z_1 \rceil^{1-\gamma} f_1 \leqslant |z_1|^{1-\gamma}\Big(\frac{d_1}{2}|x_2| + |z_1|^{\mu_{11}+1+\gamma}\bar{f}_1(z_1)\Big) \leqslant$$
$$\frac{d_1}{2}|z_1|^{1-\gamma}|z_2|^{1+\gamma} - \frac{d_1}{2}\lceil z_1 \rceil^{1-\gamma} x_2^* +$$
$$z_1^2(1+z_1^2)^{\frac{\mu_{11}}{2}}\bar{f}_1. \tag{5}$$

其次,通过引理1不难证明,存在光滑函数$\hat{\varphi}_1(x_1)$使得

$$\lceil z_1 \rceil^{1-\gamma} g_1 \omega \leqslant |z_1|^{1-\gamma}\varphi_1(x_1)\|\omega\| \leqslant$$
$$\eta\|\omega\|^2 + \frac{\hat{\varphi}_1^2}{4\eta} z_1^2(1+z_1^2)^{-\gamma}, \tag{6}$$

其中η为稍后确定的正常数. 同时,由命题1得

$$m_1 W_1^{\alpha_1} \leqslant m_1 c_{12}^{\alpha_1} z_1^2 (1+z_1^2)^{\frac{(2-\gamma)\alpha_1}{2}-1}. \tag{7}$$

最后,将式(5) ~ (7)代入(4),得到如下不等式:

$$V_1 \leqslant \lceil z_1 \rceil^{1-\gamma} d_1(x_2 - x_2^*) + \frac{d_1}{2}|z_1|^{1-\gamma}|z_2|^{1+\gamma} -$$
$$y^2 + \lceil z_1 \rceil^{1-\gamma}\Big(\frac{d_1}{2}x_2^* + \lceil z_1 \rceil^{1+\gamma}\phi_1\Big) + \eta\|\omega\|^2, \tag{8}$$

其中

$$\phi_1 = (1+z_1^2)^{\frac{\mu_{11}}{2}}\bar{f}_1 + \frac{\hat{\varphi}_1^2}{4\eta}(1+z_1^2)^{-\gamma} +$$
$$m_1 c_{12}^{\alpha_1}(1+z_1^2)^{\frac{(2-\gamma)\alpha_1}{2}-1} + \psi_0^2.$$

选择$\xi_1 = \dfrac{-2(n+\lambda+\phi_1)}{\lambda_1}$,则式(8)变为

$$V_1 \leqslant -(n+\lambda)z_1^2 + \lceil z_1 \rceil^{2-r_2} d_1(x_2 - x_2^*) +$$
$$\frac{d_1}{2}|z_1|^{2-r_2}|z_2|^{r_2} + \eta\|\omega\|^2 - y^2. \tag{9}$$

在ξ_1中引入常数$\lambda > 0$的目的是调节收敛速度.

step $k(k = 2, \ldots, n)$: 假设在第$k-1$步,可以找到函数$V_{k-1}(\bar{x}_{k-1})$和正光滑函数$\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$,使得

$$V_{k-1} \leqslant -(n+\lambda-k+2)\sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + (k-1)\eta\|\omega\|^2 +$$
$$\lceil z_{k-1} \rceil^{2-r_k} d_{k-1}(x_k - x_k^*) +$$
$$\frac{d_{k-1}}{2}|z_{k-1}|^{2-r_k}|z_k|^{r_k} - y^2, \tag{10}$$

则当$k = 2$时,式(10)即为(8). 接下来需要确定光滑函数ξ_k. 考虑$V_k(\bar{x}_k) = V_{k-1} + \dot{W}_k + m_1 W_k$,利用式(10)及命题1不难证明

$$V_k \leqslant -(n+\lambda-k+2)\sum_{i=1}^{k} z_i^2 + (k-1)\eta\|\omega\|^2 +$$
$$\lceil z_{k-1} \rceil^{2-r_k} d_{k-1}(x_k - x_k^*) + \lceil z_k \rceil^{2-r_{k+1}}\dot{x}_k +$$
$$\frac{d_{k-1}}{2}|z_{k-1}|^{2-r_k}|z_k|^{r_k} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial W_k}{\partial x_i}\dot{x}_i +$$
$$m_1 c_{k2}^{\alpha_1}|z_k|^{(2-\gamma)\alpha_1} - y^2. \tag{11}$$

下面对式(11)中的每一项进行估计. 首先,由假设2、引理3和引理4可知,存在光滑函数ϕ_{k1}使得

$$\lceil z_{k-1} \rceil^{2-r_k} d_{k-1}(x_k - x_k^*) + \frac{d_{k-1}}{2}|z_{k-1}|^{2-r_k}|z_k|^{\frac{1}{r_k}} \leqslant$$
$$|z_{k-1}|^{2-r_k}\mu_{k-1}(\bar{x}_{k-1})^{\frac{1}{2}}2^{1-r_k}|z_k|^{r_k} +$$
$$\frac{\mu_{k-1}}{2}|z_{k-1}|^{2-r_k}|z_k|^{r_k} \leqslant$$
$$\frac{1}{4}z_{k-1}^2 + \phi_{k1}z_k^2, \tag{12}$$

其中

$$\phi_{k1} = \frac{r_k}{2}(8-4r_k)^{\frac{2-r_k}{r_k}}\Big(1 + \frac{\mu_{k-1}^2}{4}\Big)^{\frac{1}{r_k}} +$$
$$\frac{r_k}{2}(8-4r_k)^{\frac{2-r_k}{r_k}} 2^{\frac{2(1-r_k)}{r_k}}(1+\mu_{k-1}^2)^{\frac{2}{r_k}}.$$

其次,存在光滑函数$\phi_{k2} = m_1 c_{k2}^{\alpha_1}(1+z_k^2)^{\frac{(2-\gamma)\alpha_1}{2}-1}$使得

$$m_1 c_{k2}^{\alpha_1}|z_k|^{(2-\gamma)\alpha_1} \leqslant \phi_{k2} z_k^2. \tag{13}$$

再次,经过复杂的计算,可以找到合适的光滑函数$\phi_{k3}(\bar{x}_k)$、$\phi_{k4}(\bar{x}_k)$满足不等式

$$\lceil z_k \rceil^{2-r_{k+1}}\dot{x}_k \leqslant$$
$$\lceil z_k \rceil^{2-r_{k+1}} d_k(x_{k+1} - x_{k+1}^*) + \phi_{k3}z_k^2 + \frac{\eta}{2}\|\omega\|^2 +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-2} z_j^2 + \frac{1}{4}z_{k-1}^2 + \lceil z_k \rceil^{2-r_{k+1}} d_k x_{k+1}^* +$$
$$\frac{d_k}{2}|z_k|^{2-r_{k+1}}(|z_{k+1}|^{r_{k+1}} + |x_{k+1}^*|),$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial W_k}{\partial x_i}\dot{x}_i \leqslant \phi_{k4}z_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + \frac{\eta}{2}\|\omega\|^2. \tag{14}$$

最后,将式(12) ~ (14)代入(11)得

$$V_k \leqslant$$
$$-(n+\lambda-k+1)\sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + (\phi_{k1} + \ldots + \phi_{k4})z_k^2 +$$
$$\frac{d_k}{2}|z_k|^{2-r_{k+1}}(|z_{k+1}|^{r_{k+1}} + |x_{k+1}^*|) + k\eta\|\omega\|^2 +$$
$$\lceil z_k \rceil^{2-r_{k+1}} d_k(x_{k+1} - x_{k+1}^*) - y^2 +$$
$$\lceil z_k \rceil^{2-r_{k+1}} d_k x_{k+1}^*. \tag{15}$$

注意到$|z_k|^{2-r_{k+1}}|x_{k+1}^*| = -\lceil z_k \rceil^{2-r_{k+1}} x_{k+1}^*$,由此可以推断出$\lceil z_k \rceil^{2-r_{k+1}} x_{k+1}^* < 0$. 因此选择

$$\xi_k = -\frac{2(n+\lambda-k+1+\phi_{k1}+\ldots+\phi_{k4})}{\lambda_k},$$

则式(15)变为

$$\begin{aligned}V_k \leqslant & -(n+\lambda-k+1)\sum_{i=1}^{k} z_i^2 + k\eta\|\omega\|^2 - \\ & y^2 + \frac{3\mu_k(\bar{x}_k)}{2}|z_k|^{2-r_{k+1}}|z_{k+1}|^{r_{k+1}} + \\ & \lceil z_k\rceil^{2-r_{k+1}} d_k(x_{k+1}-x_{k+1}^*).\end{aligned} \tag{16}$$

重复上述归纳论证过程容易验证,当$k = n$时,式(16)仍然成立,其中控制器为

$$u(t) = -\Big\lceil \sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{j=i}^{n}\xi_j^{\frac{1}{r_{j+1}}}\lceil x_i\rceil^{\frac{1}{r_i}}\Big)\Big\rceil^{r_{n+1}}. \tag{17}$$

换言之,一旦$\xi_i(i=1,2,\ldots,n)$被恰当地选取,并且定义$\eta=\varepsilon^2/n$,则式(16)可进一步表示为

$$V_n(x) \leqslant -(1+\lambda)\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \varepsilon^2\|\omega\|^2 - y^2, \tag{18}$$

其中$V_n = \sum_{i=1}^{n}(\dot{W}_i + m_1 W_i^{\alpha_1})$.

3　主要结果

定理1　如果系统(2)满足假设1～假设3,则可以找到非光滑的控制器(17)使得:

1) 当$\omega=0$时,闭环系统的状态在有限时间内收敛到零,且收敛速度比已有结果快;

2) 当$\omega(t)\in L_2$时,$\forall t\in[0,\infty)$,如下不等式成立:

$$\int_0^t |y(s)|^2 \mathrm{d}s \leqslant \varepsilon^2\int_0^t \|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s + \zeta(x_0).$$

证明　证明过程分为两步.

step 1: W的正定性及径向无界性. 定义$W(x) = \sum_{i=1}^{n} W_i(\bar{x}_i)$,则由命题1知$W(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_{i1}|x_i - x_i^*| \geqslant 0$,当且仅当只有$x_i = x_i^*$时,$W(x) = 0$. 当$i = 1$时,因$x_1^* = 0$,故$x_1 = 0$. 因此,利用递推法可得,当且仅当$x_1 = \ldots = x_n = 0$时,有$W(x) = 0$,即$W$是正定的. 接下来采用归纳法证明$W(x)$是径向无界的,即当$x\to\infty$时,有$W\to\infty$. 当$n = 1$时,显然$W = W_1$是径向无界的. 当$m \geqslant 2,\ldots,n$,假设$n = m$时,$\sum_{i=1}^{m} W_i$是径向无界的,即$\|\bar{x}_m\|\to\infty$时,有$\sum_{i=1}^{m} W_i\to\infty$. 显然,$\|\bar{x}_{m+1}\|\to\infty$意味着$\|\bar{x}_m\|\to\infty$或者$|x_{m+1}|\to\infty$. 假设$\|\bar{x}_m\|\to\infty$,则$\sum_{i=1}^{m+1} W_i \geqslant \sum_{i=1}^{m} W_i \to\infty$. 假设$|x_{m+1}|\to\infty$,则$x_{m+1}^*$的连续性保证了$\sum_{i=1}^{m+1} W_i \geqslant c_{m+1,1}|x_{m+1} - x_{m+1}^*|\to\infty$. 因此,可以证明$W$是径向无界的.

step 2: 理论分析. 对于$i = 1,2,\ldots,n$,由h_i、ξ_i、f_i、g_i、d_i和ω为连续函数可得,当$t_m > 0$时,包含式(3)和(17)的闭环系统的状态在$[0,\, t_m)$上有定义. 下面证明$t_m=\infty$. 实际上,由式(18)不难得到

$$\dot{W}(x(t)) \leqslant \varepsilon^2\|\omega(t)\|^2,\ \forall t\in[0,t_m).$$

对上式两边同时积分,并由$\omega\in L_2$知

$$\begin{aligned}W(x) \leqslant & W(x_0) + \varepsilon^2\int_0^t \|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant \\ & W(x_0) + \varepsilon^2\int_0^\infty \|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s < \infty.\end{aligned} \tag{19}$$

对于每一个有限的t,W的上界是有限的,且只有当$t\to\infty$时,$W\to\infty$. 因此,利用反证法容易验证闭环系统的状态不可能存在一个有限的逃逸时间,从而,当$t_m=\infty$时状态有定义,即系统状态在$[0,\infty)$上有定义. 下面将分两种情况进行分析.

1) 当$\omega=0$时. 由命题1和引理2可以推得

$$W^{\frac{2}{2-\gamma}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} c_{i2}|z_i|^{2-\gamma}\Big)^{\frac{2}{2-\gamma}} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} z_i^2. \tag{20}$$

同时,由引理6知

$$m_1 W^{\alpha_1} \leqslant m_1\cdot n^{\alpha_1-1}\sum_{i=1}^{n} W_i^{\alpha_1}. \tag{21}$$

选取$m_{11} = \dfrac{m_1}{n^{\alpha_1-1}}$,$m_{12} = \dfrac{\lambda+1}{2}$和$\alpha_2 = \dfrac{2}{2-\gamma}$,利用式(18)、(20)和(21),不难得到

$$\begin{aligned}& \dot{W} + m_{11}W^{\alpha_1} + m_{12}W^{\alpha_2} \leqslant \\ & \dot{W} + m_1\sum_{i=1}^{n} W_i^{\alpha_1} + 2m_{12}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \leqslant \\ & -y^2 \leqslant 0.\end{aligned} \tag{22}$$

因此,由引理5可知,系统状态在有限时间内收敛到零. 当$\alpha_1=1$时,利用引理5得到的有限时间为

$$T(m_{11},\lambda) = \frac{(\gamma-2)/\gamma}{m_{11}}\ln\Big(1+\frac{m_{11}}{m_{12}}W^{\frac{1}{(\gamma-2)/\gamma}}(x_0)\Big).$$

此外,可以通过调节参数m_{11}和λ来调节T. 当$\alpha_1>1$时,由引理5得

$$T = \frac{(\gamma-2)/\gamma}{m_{12}} + \frac{W^{1-\alpha_2}(x_0)-1}{m_{11}(1-\alpha_1)}.$$

2) 当$\omega\neq 0$时. 由式(19)知$W_i\in L_\infty$,因此通过递推法容易证明,闭环系统状态在$[0,\infty)$上是全局一致有界的. 同时,通过式(18)进一步推断出

$$\begin{aligned}& \int_0^t |y(s)|^2\mathrm{d}s \leqslant \\ & \varepsilon^2\int_0^t \|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s - \int_0^t\Big(\dot{W}(s) + (1+\lambda)\sum_{i=1}^{n} z_i^2(s)\Big)\mathrm{d}s \leqslant \\ & \varepsilon^2\int_0^t \|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s + \zeta(x_0),\end{aligned}$$

其中$\zeta(x_0) = W(x_0)$. □

注2　本文中的快速有限时间镇定与已有文献[7,13]有很大的不同,虽然两者都是基于全局有限时

间稳定性理论的,但固定时间镇定的收敛时间与初始条件无关,而本文的快速收敛时间依赖于状态的初始值,且可以通过设计参数进行调节. 值得注意的是,系统(2)在满足上述假设1 ∼ 假设3的情况下,如果将条件$\omega \in L_2$修改为$\omega \in L_{2m}$,其中m是正整数,则定理1的结论仍然成立.

4 结 论

本文基于符号函数和增加幂次积分法设计非光滑控制器,解决了一类非线性系统的全局快速有限时间鲁棒控制问题. 并且本文的收敛时间不仅依赖于初始状态,而且还可以通过改变设计参数进行调节,从而缩短了系统状态的收敛时间. 仿真实例表明了本文方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Li G Q, Lin Y, Zhang X. Global output feedback stabilization for a class of nonlinear systems with quantized input and output[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(2): 187-203.

[2] Man Y C, Liu Y G. Global output-feedback stabilization for a class of uncertain time-varying nonlinear systems[J]. Systems & Control Letters, 2016, 90: 20-30.

[3] Zhai J Y, Ai W Q, Fei S M. Global output feedback stabilisation for a class of uncertain non-linear systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(2): 305-313.

[4] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.

[5] Fu J, Ma R C, Chai T Y. Global finite-time stabilization of a class of switched nonlinear systems with the powers of positive odd rational numbers[J]. Automatica, 2015, 54: 360-373.

[6] Hong Y G, Jiang Z P, Feng G. Finite-time input-to-state stability and applications to finite-time control design[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2010, 48(7): 4395-4418.

[7] Li J, Qian C J. Global finite-time stabilization by dynamic output feedback for a class of continuous nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(5): 879-884.

[8] Chen B, Liu X P. Fuzzy approximate disturbance decoupling of mimo nonlinear systems by backstepping and application to chemical processes[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2005, 13(6): 832-847.

[9] Lin W, Qian C J, Huang X Q. Disturbance attenuation of a class of nonlinear systems via output feedback[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(15): 1359-1369.

[10] Qian C J, Lin W. Almost disturbance decoupling for a class of high-order nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(6): 1208-1214.

[11] Sun Z Y, Zhang C H, Wang Z. Adaptive disturbance attenuation for generalized high-order uncertain nonlinear systems[J]. Automatica, 2017, 80: 102-109.

[12] Sun Z Y, Li T, Yang S H. An unified time-varying feedback approach and its applications in adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear systems[J]. Automatica, 2016, 70: 249-257.

[13] Sun Z Y, Xue L R, Zhang K M. A new approach to finite-time adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear system[J]. Automatica, 2015, 58: 60-66.

[14] Sun Z Y, Yun M M, Li T. A new approach to fast global finite-time stabilization of high-order nonlinear system[J]. Automatica, 2017, 81: 455-463.

作者简介

刘彩云(1993−), 女, 博士生, 从事非线性控制、自适应控制和时滞系统稳定性的研究, E-mail: l_cai_yun@126.com;

孙宗耀(1979−), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、自适应控制和时滞系统稳定性等研究, E-mail: sunzongyao@sohu.com;

孟庆华(1977−), 男, 教授, 博士, 从事车辆检测与故障诊断、电动汽车、汽车电子等研究, E-mail: mengqinghua@hdu.edu.cn;

蔡彬(1964−), 男, 教授, 博士, 从事非线性控制、风电机组磁悬浮偏航系统、智能变换器等研究, E-mail: bincai1027@126.com;

谭庆全(1980−), 男, 高级工程师, 博士, 从事非线性系统控制、信息管理系统等研究, E-mail: tanqq@bjsies.cn.

(责任编辑：李君玲)