

基于椭圆吸引律的离散重复控制

胡轶, 胡志云, 孙明轩

引用本文:

胡轶, 胡志云, 孙明轩. 基于椭圆吸引律的离散重复控制[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 1009–1016.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0684>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

带有执行器饱和的变时滞Markovian跳变系统的DOBC控制

Disturbance-observer-based control for Markovian jump systems with time-varying delay and actuator saturation
控制与决策. 2019, 34(9): 1857–1866 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0123>

带有摩擦非线性的CMG框架伺服系统有限时间自适应鲁棒控制

Finite-time adaptive robust control for CMG gimbal servo system with friction nonlinearities
控制与决策. 2019, 34(4): 885–890 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1296>

伺服电机驱动的连铸结晶器振动系统受限状态下预设性能控制

The prescribed performance control for the mold vibration displacement system driven by sever motor with constrained states
控制与决策. 2019, 34(3): 661–667 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1346>

快速二阶终端滑模控制及其在下肢外骨骼的应用

Fast second-order terminal sliding mode control and its application in exoskeleton of lower extremities
控制与决策. 2019, 34(1): 162–166 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.0976>

一类不确定非线性系统的自适应支持向量回归建模与动态面控制

Adaptive support vector regression modeling and dynamic surface control of a class of uncertain nonlinear systems
控制与决策. 2019, 34(1): 63–71 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.0965>

交会对接模拟系统姿态位置耦合有限时间控制

Coupled attitude and position finite-time control for rendezvous and docking simulator
控制与决策. 2017, 32(10): 1789–1795 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1163>

无刷直流电机转速伺服系统反步高阶滑模控制

Backstepping high order sliding mode control for brushless DC motor speed servo control system
控制与决策. 2016, 31(6): 961–968 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0687>

一类未知MIMO非线性离散系统的改进自适应准滑模解耦控制

Improved adaptive quasi-sliding mode decoupling control for a class of unknown MIMO nonlinear discrete-time systems
控制与决策. 2016, 31(5): 783–789 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0223>

基于椭圆吸引律的离散重复控制

胡 轶, 胡志云, 孙明轩[†]

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

摘要: 针对离散时间系统的周期轨迹跟踪问题, 提出一种基于椭圆吸引律的离散重复控制方法. 该方法能有效减小抖振, 并通过扰动扩张状态观测技术对系统的未知扰动进行有效抑制, 采用重复控制技术对系统中存在的周期扰动完全消除. 为了刻画系统误差动态性能, 推导出单调减区域、绝对吸引层、稳态误差带的表达式以及系统跟踪误差进入稳态误差带的最大步长. 通过数值仿真与直线伺服电机实验, 验证所提出控制方法的有效性.

关键词: 抖振; 无切换吸引律; 参数整定; 干扰差分; 理想误差动态; 离散时间系统

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Discrete repetitive control based on elliptical attraction law

HU Yi, HU Zhi-yun, SUN Ming-xuan[†]

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: An elliptical attracting law which can effectively reduce chattering is proposed for the periodic tracking problem of discrete time systems. The disturbance of the extended state observe technique is used to effectively reduce the unknown disturbance of the system, and the periodic disturbance is able to be completely rejected by the repetitive control technique. In order to evaluate the tracking performance of the closed-loop system, the expressions of the monotone decreasing region, the absolute attractive layer, the boundary of the steady-state error and the maximum step size of the system tracking error entering the steady state are derived in details. Simulation and experimental results of a linear servo motor system are presented to verify effectiveness of the proposed repetitive control method.

Keywords: chattering; non-switching attracting laws; parameter tuning; disturbance differences; ideal error dynamics; discrete-time systems.

0 引言

滑模控制是一种非线性控制方法, 通过切换函数使系统按照滑模规定的规律运行, 其特征在于可以使系统状态收敛到切换面上, 并使其沿预定轨迹收敛到零, 其中滑动模态对于系统参数摄动及扰动不敏感, 此特性使得滑模控制受到人们的广泛关注.

文献[1]首先提出了一种非线性控制方法. 文献[2]提出型为 $[s_{k+1} - s_k] \text{sgn}(s_k) < 0$ 不等式形式的到达条件. 对于 $|s_{k+1}| < |s_k|$ 不等式到达条件^[3-4], 文献[5]首次提出等式到达条件的趋近律方法, 相比于不等式形式的到达条件能更好地分析切换函数收敛过程和进行控制器设计. 文献[6-7]采用 sat 代替 sgn 函数, 有效抑制了系统颤振. 由于控制系统参数不易确定, 在抑制颤振的同时会影响系统稳态精度. 文献[8]提出比例-等速-变速控制, 消除了系统振荡的问题. 一种断续函数连续化^[9-10]方法, 即 $s/(|s| + \delta)$, $\delta >$

0, 可以取代 sgn 函数消除系统抖振. 文献[11]给出了较好地减小系统颤振的控制策略, 使动态过程不产生颤振, 并影响系统的快速性, 在一定程度上提高了鲁棒性. 文献[12]提出了离散指数趋近律, 给出了离散滑模控制的基本机理, 然而系统状态不能快速趋向平衡点, 而是在两点间来回振荡, 因此系统仍存在颤振, 控制性能不够理想.

文献[13]采用幂次函数构造离散趋近律, 对控制算法的收敛域进行了详细分析. 文献[14]通过增加约束条件, 对文献[5]的趋近律进行修正, 从而抑制并消除了抖振现象. 双幂次、多幂次趋近律^[15-16]对于消除系统抖振、提高收敛速度效果明显. 文献[17-18]将吸引律方法用于离散时间控制器设计, 以解决不确定系统轨迹跟踪控制问题, 可保证系统跟踪误差直接收敛至原点, 并在收敛过程中具有快速性. 文献[19-21]在吸引律的基础上增加扰动抑制模块, 形成具有扰动

收稿日期: 2018-05-21; 修回日期: 2019-03-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573320); 浙江省自然科学基金项目(LY16E070005).

[†]通讯作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.

补偿功能的吸引律方法,能够有效抑制系统扰动.

本文提出一种基于椭圆吸引律的离散重复控制方法,能有效减小系统抖振,并采用扰动扩张状态观测技术对系统的未知扰动进行有效抑制,对系统中存在的周期扰动采用离散重复控制技术对其完全消除.采用扰动扩张观测技术结合重复控制,能够有效减小系统跟踪误差.对误差的收敛情况进行讨论,推导出稳态误差带、绝对吸引层、单调减区间的表达式和该吸引律的有限时间收敛步数,以刻画系统的收敛性能和稳态性能,并由此整定控制器参数.

1 问题描述

考虑一类单输入单输出离散时间系统

$$A(q^{-1})y_k = q^{-d}B(q^{-1})u_k + w_k. \quad (1)$$

其中: u_k 和 y_k 分别为 k 时刻的输入和输出; $\Delta A(q^{-1})$ 和 $\Delta B(q^{-1})$ 为系统参数摄动; v_k 为外部扰动; $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 为延迟算子 q^{-1} 的多项式,有

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}, \\ B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}, \end{cases} \quad (2)$$

n 和 m 分别为 $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 的阶数, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ 为系统参数,且 $b_0 \neq 0$.

定义跟踪误差 e_k 为

$$e_k = r_k - y_k. \quad (3)$$

本文的控制目标是针对系统(1),设计控制器 u_k 使系统输出 y_k 能跟踪上给定参考信号 r_k ,即跟踪误差 e_k 收敛于趋近于原点的误差带内.

为表征系统跟踪误差的动态性能,本文引入单调递减区域 (Δ_{MDR})、绝对吸引层 (Δ_{AAL}) 和稳态误差带 (Δ_{SSE}),具体定义如下:

1) 单调递减区域 (Δ_{MDR}).

跟踪误差存在单调递减区域, e_k 在此区域外时, e_k 同号单调递减,满足

$$\begin{cases} 0 < e_{k+1} < e_k, e_k > \Delta_{\text{MDR}}; \\ e_k < e_{k+1} < 0, e_k < -\Delta_{\text{MDR}}. \end{cases} \quad (4)$$

2) 绝对吸引层 (Δ_{AAL}).

跟踪误差存在绝对吸引层,使 $|e_k|$ 单调递减,即

$$|e_k| > \Delta_{\text{AAL}} \Rightarrow |e_{k+1}| < |e_k|. \quad (5)$$

3) 稳态误差带 (Δ_{SSE}).

跟踪误差收敛至 Δ_{SSE} 到原点的邻域内,一旦进入此邻域,系统会保持在此邻域内,即

$$|e_k| \leq \Delta_{\text{SSE}} \Rightarrow |e_{k+1}| \leq \Delta_{\text{SSE}}, \forall k > m^*, \quad (6)$$

其中 m^* 为正整数.

2 椭圆吸引律

为了使系统输出有限时间跟踪上给定参考信号,且能有效抑制抖振,提出一种基于椭圆吸引律的理想误差动态

$$e_{k+1} = (1 - \rho)e_k - \varepsilon f(e_k, \delta) + d_{k+1}^* - d_k. \quad (7)$$

其中: $0 < \rho < 1, \delta > 0, \varepsilon > 0, d_{k+1}^*$ 为 d_{k+1} 的补偿,满足 $|d_{k+1}^* - d_k| \leq \Delta, \Delta$ 为扰动补偿的界值.本文用等效扰动的估计 \hat{d}_{k+1} 替换 d_{k+1}^* .等效扰动 d_k 和函数 $f(e_k, \delta)$ 分别为

$$d_k = w_k - w_{k-1}; \quad (8)$$

$$f = \begin{cases} \sqrt{2\frac{|e_k|}{\delta} - \left(\frac{|e_k|}{\delta}\right)^2} \text{sgn}(e_k), & |e_k| < \delta; \\ \text{sgn}(e_k), & |e_k| \geq \delta. \end{cases} \quad (9)$$

当 $\delta = 0.5$ 时,椭圆函数 $f(e_k, \delta)$ 如图1所示.由图1可见,函数 $f(e_k, \delta)$ 在过原点时是连续的,从而能够减小一般吸引律设计中由符号函数带来的抖振影响.

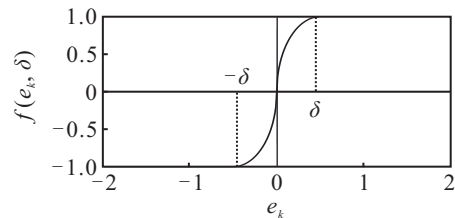


图1 椭圆函数 $f(e_k, \delta)$

3 扩张状态观测器

为有效估计等效扰动 d_{k+1} ,设计一种以等效扰动作为状态变量的扩张状态观测器^[22-23].定义

$$h_k = d_{k+1} - d_k. \quad (10)$$

由式(1)和(3)得

$$\begin{aligned} e_{k+1} = r_{k+1} - y_k + A'(q^{-1})(y_k - y_{k-1}) - \\ B(q^{-1})(u_k - u_{k-1}) - d_{k+1}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $A'(q^{-1}) = A(q^{-1}) - 1$.

由式(11)设计如下形式的扩张状态观测器:

$$\begin{cases} \hat{e}_{k+1} = r_{k+1} - y_k + A'(q^{-1})(y_k - y_{k-1}) - \\ \quad B(q^{-1})(u_k - u_{k-1}) - \hat{d}_{k+1} + \beta_1 \tilde{e}_k, \\ \hat{d}_{k+1} = \hat{d}_k + \beta_2 \tilde{e}_k. \end{cases} \quad (12)$$

其中: \hat{e}_{k+1} 为 $k+1$ 时刻跟踪误差的估计, $\tilde{e}_k = e_k - \hat{e}_k$ 为 e_k 的估计误差, $\tilde{d}_k = d_k - \hat{d}_k$ 为 d_k 的估计误差.给出以下定理分析 \tilde{e}_k, \tilde{d}_k 的收敛性.

定理1 对于离散时间系统(1),设计观测器(12),由 $B = \begin{bmatrix} \beta_2 - \beta_1 & -1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix}$,配置 β_1 和 β_2 ,使得 B 的特征

值在单位开圆内, 则 \tilde{e}_k 、 \tilde{d}_k 渐近收敛, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{e}_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}_k = 0$.

证明 由式(11)和(12)可得

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{k+1} &= \tilde{d}_k + (d_{k+1} - d_k) - (\hat{d}_{k+1} - \hat{d}_k) = \\ &\tilde{d}_k + h_k - \beta_2 \tilde{e}_k, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{k+1} &= -d_{k+1} + \hat{d}_{k+1} - \beta_1 \tilde{e}_k = -\tilde{d}_{k+1} - \beta_1 \tilde{e}_k = \\ &(\beta_2 - \beta_1) \tilde{e}_k - \tilde{d}_k - h_k. \end{aligned} \quad (14)$$

合并式(13)和(14)可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{e}_{k+1} \\ \tilde{d}_{k+1} \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} \tilde{e}_k \\ \tilde{d}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} h_k = \\ &B \begin{bmatrix} \tilde{e}_k \\ \tilde{d}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} O(T^3), \end{aligned} \quad (15)$$

其中矩阵 B 的特征根为

$$\lambda = \frac{1 + \beta_2 - \beta_1}{2} \pm \sqrt{\beta_1 + \left(\frac{1 + \beta_2 - \beta_1}{2}\right)^2}.$$

通过对 β_1 和 β_2 配置, 使得矩阵 B 的所有特征根都在单位开圆内, 即 B 为 Schur 稳定矩阵, \tilde{e}_k 、 \tilde{d}_k 渐近收敛, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{e}_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}_k = 0$. \square

4 基于扩张状态观测器的控制器设计

对于系统(1), 给出两种控制器设计方法, 即基于扩张状态观测器的反馈控制器和重复控制器.

1) 基于扰动扩张状态观测的反馈控制器.

将式(12)代入(7), 可得基于扰动扩张状态观测的反馈控制器为

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} + [B(q^{-1})]^{-1} [\rho e_k + \varepsilon f(e_k, \delta) + r_{k+1} - \\ &y_k + A'(y_k - y_{k-1}) - \hat{d}_{k+1} + \beta_1 \tilde{e}_k], \end{aligned} \quad (16)$$

其中 ρ 、 ε 、 δ 为待整定参数, 其整定方法将在下节给出. 由于控制器(6)不能完全抑制周期扰动, 本文进一步给出基于扩张状态观测的离散重复控制策略.

2) 基于扰动扩张状态观测的离散重复控制器.

对于给定周期参考信号 r_k , 有

$$r_k = r_{k-N}, \quad (17)$$

其中 N 为参考信号的周期. 在式(12)的基础上设计扩张状态观测器和重复控制器, 其表达式为

$$\begin{cases} \hat{e}_{k+1} = r_{k+1} - y_{k+1-N} + d_{k+1} + \beta_1 \tilde{e}_k + \\ \quad q^{-d+1} B(q^{-1})(u_k - u_{k-N}) - \\ \quad A'(q^{-1})(y_k - y_{k-N}), \\ \hat{d}_{k+1} = \hat{d}_k + \beta_2 \tilde{e}_k, \end{cases} \quad (18)$$

$$u_k = u_{k-N} + u'_k. \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} u'_k &= [q^{-d+1} B(q^{-1})]^{-1} [r_{k+1} - y_{k+1-N} + A'(y_k - \\ &y_{k-N}) + e_{k+1-N} - e_k + \rho e_k + \varepsilon f(e_k, \delta) - \\ &\hat{d}_{k+1} + \beta_1 \tilde{e}_k]. \end{aligned} \quad (20)$$

5 收敛性能和稳态性能分析

对系统(1)的收敛性能和稳态性能进行分析, 并给出表征系统跟踪误差收敛特性的3个界值表达式及 e_k 首次进入稳态误差带的最大步数.

定理2 对于离散时间系统(1), 设计控制器(16), 系统跟踪误差的单调递减区域 (Δ_{MDR})、绝对吸引层 (Δ_{AAL})、稳态误差带 (Δ_{SSE}) 分别为:

1) 单调递减区域

$$\Delta_{\text{MDR}} = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\Delta + \varepsilon}{1 - \rho} \right\}, & |e_k| \geq \delta; \\ \max \{ \Delta_{\text{MDR1}}, \Delta_{\text{MDR2}} \}, & |e_k| < \delta. \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\Delta_{\text{MDR1}} = \frac{\rho \Delta + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\delta} \left(2\rho \Delta + \frac{\varepsilon^2 - \Delta^2}{\delta} \right)}}{\rho^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^2},$$

$$\Delta_{\text{MDR2}} = \frac{(1 - \rho) \Delta + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\delta} \left(2(1 - \rho) \Delta + \frac{\varepsilon^2 - \Delta^2}{\delta} \right)}}{(1 - \rho)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^2}.$$

2) 绝对吸引层

$$\Delta_{\text{AAL}} = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\Delta + \varepsilon}{2 - \rho} \right\}, & |e_k| \geq \delta; \\ \max \{ \Delta_{\text{AAL1}}, \Delta_{\text{AAL2}} \}, & |e_k| < \delta. \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$\Delta_{\text{AAL1}} = \frac{\rho \Delta + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\delta} \left(2\rho \Delta + \frac{\varepsilon^2 - \Delta^2}{\delta} \right)}}{\rho^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^2},$$

$$\Delta_{\text{AAL2}} = \frac{(2 - \rho) \Delta + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\delta} \left(2(2 - \rho) \Delta + \frac{\varepsilon^2 - \Delta^2}{\delta} \right)}}{(2 - \rho)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^2}.$$

3) 稳态误差带

$$\Delta_{\text{SSE}} = \begin{cases} \max \left\{ \varepsilon + \Delta, \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho} \right\}, & |e_k| \geq \delta; \\ \Delta_{\text{SSE1}}, & |e_k| < \delta. \end{cases} \quad (23)$$

① 条件满足 $\delta \leq Z_1$ 时

$$\Delta_{\text{SSE1}} = \max \{ \Delta, -(1 - \rho)\delta + \varepsilon + \Delta \}. \quad (24)$$

② 条件满足 $Z_1 < \delta < Z_2$ 时

$$\Delta_{SSE1} = \max\{\Delta, -(1-\rho)Z_1 + \varepsilon f(Z_1, \delta) + \Delta, (1-\rho)\delta - \varepsilon - \Delta\}.$$

③ 条件满足 $Z_1 < Z_2 < \delta$ 时

$$\Delta_{SSE1} = \max\{\Delta, -(1-\rho)Z_1 + \varepsilon f(Z_1, \delta) + \Delta, (1-\rho)Z_2 - \varepsilon f(Z_2, \delta) + \Delta, -(1-\rho)\delta + \varepsilon + \Delta\}.$$

其中

$$Z_1 = \frac{(1-\rho)^2\delta + \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2 - (1-\rho)\sqrt{(1-\rho)^2\delta^2 + \varepsilon^2}}{(1-\rho)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2}, \quad (25)$$

$$Z_2 = \frac{(1-\rho)^2\delta + \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2 + (1-\rho)\sqrt{(1-\rho)^2\delta^2 + \varepsilon^2}}{(1-\rho)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2}. \quad (26)$$

证明 下面分别证明定理2的3个界值表达式. 只考虑 $e_k > 0$, 当 $e_k < 0$ 亦可得相同结果.

1) 单调递减区域 (Δ_{MDR}).

① 当 $\Delta_{MDR} \geq \delta$ 和 $\Delta_{MDR} < \delta \leq e_k$ 时, 由式(4)和(7)得

$$\Delta_{MDR} = \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\Delta + \varepsilon}{1 - \rho}\right\}.$$

② 当 $\Delta_{MDR} < e_k < \delta$ 时, 由式(4)和(7)得

$$\begin{cases} (1-\rho)\Delta_{MDR} - \varepsilon f(\Delta_{MDR}, \delta) + \Delta < \Delta_{MDR}, \\ (1-\rho)\Delta_{MDR} - \varepsilon f(\Delta_{MDR}, \delta) - \Delta > 0. \end{cases}$$

解上述方程得

$$\Delta_{MDR} = \max\{\Delta_{MDR1}, \Delta_{MDR2}\}.$$

2) 绝对吸引层 (Δ_{AAL}).

① 当 $\Delta_{AAL} \geq \delta$ 和 $\Delta_{AAL} < \delta \leq |e_k|$ 时, 由式(5)和(7)得

$$\begin{cases} e_{k+1} \leq (1-\rho)e_k - \varepsilon + \Delta < e_k, \\ e_{k+1} \geq (1-\rho)e_k - \varepsilon - \Delta > -e_k, \end{cases}$$

进而得

$$\Delta_{AAL} = \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\Delta + \varepsilon}{2 - \rho}\right\}.$$

② 当 $\Delta_{AAL} < e_k \leq \delta$ 时, 由式(5)和(7)得

$$\begin{cases} (1-\rho)\Delta_{AAL} - \varepsilon f(\Delta_{AAL}, \delta) + \Delta < \Delta_{AAL}, \\ (1-\rho)\Delta_{AAL} - \varepsilon f(\Delta_{AAL}, \delta) - \Delta > -\Delta_{AAL}. \end{cases}$$

解上述方程组可得

$$\Delta_{AAL} = \max\{\Delta_{AAL1}, \Delta_{AAL2}\}.$$

3) 稳态误差带 (Δ_{SSE}).

① 当 $\delta \leq \Delta_{SSE}$ 时, 由式(6)和(7)得

$$\begin{cases} (1-\rho)e_k - \varepsilon + \Delta \leq \Delta_{SSE}, \\ (1-\rho)e_k - \varepsilon - \Delta \geq -\Delta_{SSE}. \end{cases}$$

解上述方程组得

$$\Delta_{SSE} = \max\left\{\varepsilon + \Delta, \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}\right\}.$$

② 当 $\Delta_{SSE} < \delta$ 时, 由式(6)和(7)得

$$\begin{cases} (1-\rho)e_k - \varepsilon f(e_k, \delta) + \Delta < \Delta_{SSE}, \\ (1-\rho)e_k - \varepsilon f(e_k, \delta) - \Delta > -\Delta_{SSE}. \end{cases} \quad (27)$$

令 $g(e_k) = (1-\rho)e_k - \varepsilon f(e_k, \delta)$, 则有

$$\frac{dg}{de_k} = (1-\rho) - \varepsilon \left[2\frac{e_k}{\delta} - \left(\frac{e_k}{\delta}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{e_k}{\delta}\right) \frac{1}{\delta},$$

得到

$$\frac{dg}{de_k} = (1-\rho) - \varepsilon \frac{1 - \frac{e_k}{\delta}}{\sqrt{e_k(2\delta - e_k)}}. \quad (28)$$

为求函数 $g(e_k)$ 的极值, 令 $dg/de_k > 0$, 得到 $e_k \in (Z_1, Z_2)$, 则 $g(e_k)$ 在 $(0, Z_1)$ 单调递减, 在 (Z_1, Z_2) 单调递增.

i) 当 $\delta \leq Z_1$ 时, $g(e_k)$ 在 $(0, \delta)$ 单调递减, 由式(27)有

$$\begin{cases} \Delta \leq \Delta_{SSE}, \\ (1-\rho)\delta - \varepsilon f(\delta, \delta) - \Delta \geq -\Delta_{SSE}, \end{cases}$$

进而有

$$\Delta_{SSE1} = \max\{\Delta, -(1-\rho)\delta + \varepsilon + \Delta\}.$$

ii) 当 $Z_1 < \delta$ 时, $g(e_k)$ 在 $(0, Z_1)$ 单调递减, 在 (Z_1, δ) 单调递增, 由式(27)有

$$\begin{cases} \Delta \leq \Delta_{SSE}, \\ (1-\rho)Z_1 - \varepsilon f(Z_1, \delta) - \Delta \geq -\Delta_{SSE}, \\ (1-\rho)\delta - \varepsilon - \Delta \leq \Delta_{SSE}, \end{cases}$$

进而有

$$\Delta_{SSE1} = \max\{\Delta, -(1-\rho)Z_1 + \varepsilon f(Z_1, \delta) + \Delta, (1-\rho)\delta - \varepsilon - \Delta\}.$$

iii) 当 $Z_1 < Z_2 < \delta$ 时, $g(e_k)$ 在 $(0, Z_1)$ 单调递减, 在 (Z_1, Z_2) 单调递增, 在 (Z_2, δ) 单调递减, 由式(27)有

$$\begin{cases} \Delta \leq \Delta_{SSE}, \\ (1-\rho)Z_1 - \varepsilon f(Z_1, \delta) - \Delta \geq -\Delta_{SSE}, \\ (1-\rho)Z_2 - \varepsilon f(Z_2, \delta) - \Delta \leq \Delta_{SSE}, \\ (1-\rho)\delta - \varepsilon f(\delta, \delta) - \Delta \geq -\Delta_{SSE}, \end{cases}$$

进而有

$$\begin{aligned} \Delta_{SSE1} = \max\{ & \Delta, -(1-\rho)Z_1 + \varepsilon f(Z_1, \delta) + \Delta, \\ & (1-\rho)Z_2 - \varepsilon f(Z_2, \delta) + \Delta, \\ & -(1-\rho)\delta + \varepsilon + \Delta\}. \end{aligned}$$

定理2得证. □

定理3 在控制器(16)的作用下,系统(1)跟踪误差 e_k 首次进入 Δ_{SSE} 的最大步数为 $\lceil m^* \rceil + 1$. 其中

$$m^* = m_1^* + m_2^*, \tag{29}$$

$\lceil \cdot \rceil$ 为不小于 \cdot 的最小整数,且

$$m_1^* = \log_{1-\rho} \left(\frac{\rho\delta + \varepsilon - \Delta}{\rho|e_0| + \varepsilon - \Delta} \right), \tag{30}$$

$$m_2^* = \log_{1-\rho} \left(\frac{\rho\delta(\rho + \varepsilon)\Delta_{SSE} - \varepsilon\Delta}{\rho\delta^2(\rho + \varepsilon) - \varepsilon\Delta} \right). \tag{31}$$

证明 记 e_0 为跟踪误差初始值,当 $e_k > \delta > \Delta_{SSE}$ 时,可分两步证明 e_k 首次进入 Δ_{SSE} 的最大步数: e_k 从 e_0 收敛至 δ ; e_k 从 δ 收敛至 Δ_{SSE} .

1) 当 $e_0 \geq \delta \geq \Delta_{SSE}$ 时,第1步 e_k 从 e_0 收敛至 δ , 有

$$\begin{cases} e_1 = (1-\rho)e_0 - \varepsilon + h(0), \\ e_m = (1-\rho)^m e_0 - \sum_{i=0}^{m-1} (1-\rho)^{m-i-1} [\varepsilon - h(i)]. \end{cases} \tag{32}$$

由式(32)可得

$$e_m \leq (1-\rho)^m |e_0| - (\varepsilon - \Delta) \frac{1 - (1-\rho)^m}{\rho} = \delta. \tag{33}$$

由式(33)可得

$$\begin{aligned} m_1^* &= \log_{1-\rho} \left(\frac{\rho\delta + \varepsilon - \Delta}{\rho|e_0| + \varepsilon - \Delta} \right), \\ e(m_1^* + 1) &< \varepsilon - \Delta = \delta. \end{aligned} \tag{34}$$

由式(33)和(34)可知 e_k 经过 m_1^* 步收敛到 δ . 第2步 e_k 从 δ 收敛到 Δ_{SSE} , 有

$$e_{k+1} = (1-\rho)e_k - \varepsilon e_k \sqrt{\frac{2}{\delta e_k} - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2} + h(k). \tag{35}$$

为方便求解 m_2^* , 用 e_0 表示第2步的初始值 $e_0 = \delta$, 有

$$e_1 = (1-\rho)e_0 - \varepsilon e_0 \sqrt{\frac{2}{\delta e_0} - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2} + h(0),$$

$$e_2 = (1-\rho)^2 e_0 - (1-\rho) \times$$

$$\left[\varepsilon e_0 \sqrt{\frac{2}{\delta e_0} - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2} - h(0) \right] -$$

$$\left[\varepsilon e_1 \sqrt{\frac{2}{\delta e_1} - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2} - h(1) \right],$$

⋮

$$e_m = (1-\rho)^m e_0 - \sum_{i=0}^{m-1} (1-\rho)^{m-i-1} \times \tag{36}$$

$$\left[\varepsilon e_i \sqrt{\frac{2}{\delta e_i} - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2} - h(i) \right]. \tag{37}$$

由式(36)可得

$$\begin{aligned} e_m &\leq (1-\rho)^m |e_0| - \sum_{i=0}^{m-1} (1-\rho)^{m-i-1} \times \\ &\left[\varepsilon e_i \sqrt{\frac{2}{\delta e_i} - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2} - \Delta \right] < \\ &(1-\rho)^m |e_0| - \frac{\varepsilon}{\delta} \sum_{i=0}^{m-1} (1-\rho)^{m-i-1} \left(\frac{\Delta}{\varepsilon} \right) + \\ &\sum_{i=0}^{m-1} (1-\rho)^{m-i-1} \Delta. \end{aligned} \tag{38}$$

由式(37)可得

$$\begin{aligned} e_m &\leq \\ &(1-\rho)^m e_0 - \left[\frac{\varepsilon}{\delta} \left(\frac{\Delta}{\rho + \varepsilon} \right) \frac{1 - (1-\rho)^m}{\rho} \right] = \Delta_{SSE}. \end{aligned} \tag{39}$$

由式(38)可得

$$\begin{aligned} m_2^* &= \log_{1-\rho} \left(\frac{\rho\delta(\rho + \varepsilon)\Delta_{SSE} - \varepsilon\Delta}{\rho\delta^2(\rho + \varepsilon) - \varepsilon\Delta} \right), \\ e(m_2^* + 1) &\leq \varepsilon - \Delta = \delta. \end{aligned} \tag{40}$$

由式(39)可知 e_k 经过 m_2^* 步从 δ 到达 Δ_{SSE} , 收敛步数 $m^* = m_1^* + m_2^*$.

2) 当 $\Delta_{SSE} < e_0 < \delta$ 时, m^* 的证明过程与1)中第2步类似, 表示为

$$m_2^* = \log_{1-\rho} \left(\frac{\rho\delta(\rho + \varepsilon)\Delta_{SSE} - \varepsilon\Delta}{\rho\delta|e_0|(\rho + \varepsilon) - \varepsilon\Delta} \right).$$

3) 当 $0 < e_0 < \Delta_{SSE}$ 时, 跟踪误差经过 $\lceil m^* \rceil = 0$ 步进入 Δ_{SSE} .

由1)~3)可知, 跟踪误差首次进入 Δ_{SSE} 的最大步数为 $\lceil m^* \rceil + 1 = \lceil m_1^* + m_2^* \rceil + 1$. 当 $e_0 < 0$ 时同理可得 m^* . □

参数 ρ 影响系统误差的收敛速度和稳态精度, ρ 越大收敛速度越快. 平衡收敛速度和稳态误差, 实际一般取为 $0.5 < \rho < 1$. 参数 ε 越大误差状态收敛速度越快, 但系统的初始抖振越大. 参数 δ 越小, 椭圆函数越接近于符号函数, 实际通常取为 $\delta = 0.5$.

6 数值仿真与实验结果

在位置伺服装置上验证上述结果, 实验装置由PC机、永磁同步直线电机、ELMO驱动器、DSP2812组成, 上位机通过CCS编译软件向DSP2812发送控制器信号, 在2812完成数模转换, ELMO接收来自DSP的控制信号经过PWM调制控制电机运行, PC机与DSP、DSP与ELMO、ELMO与伺服电机均为双向通信, 构成闭环控制系统. 本节将永磁同步电机模型

转换为二阶离散动态特性,取 $d = 1$, 有

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + 0.8699q^{-1} + 0.1301q^{-2}, \\ B(q^{-1}) = 0.5099 + 0.1952q^{-1}. \end{cases} \quad (41)$$

6.1 数值仿真

通过数值仿真: 1) 验证表征跟踪误差动态特性的3个界值及有限收敛步数 Δ_{MDR} 、 Δ_{AAL} 、 Δ_{SSE} 和 m^* ; 2) 验证基于干扰扩张状态观测设计的反馈控制器能有效抑制未知干扰; 3) 验证在此基础上结合重复控制设计的离散重复控制器能有效抑制周期干扰.

离散时间系统的反馈控制器为

$$u_k = u_{k-1} + [B(q^{-1})]^{-1}[\rho e_k + \varepsilon f(e_k, \delta) + r_{k+1} - y_k + A'(y_k - y_{k-1}) - d_{k+1}^*]. \quad (42)$$

离散时间系统的重复控制器为

$$u_k = u_{k-N} + [B(q^{-1})]^{-1}[e_{k+1-N} - e_k + \rho e_k + \varepsilon f(e_k, \delta) + r_{k+1} - y_{k+1-N} + A'(y_k - y_{k-N}) - d_{k+1}^*]. \quad (43)$$

实际控制中 d_{k+1}^* 通常可取常值, 或取 $d_{k+1}^* = d_k$. 参考轨迹 $r_k = 50 \sin(2\pi kT)$, 采样周期 $T = 0.01$, 外部扰动为 $w_k = 5 \sin(\pi kT)$, 参数 $\varepsilon = 0.15$ 、 $\delta = 5$ 、 $\rho = 0.5$ 、 $\beta_1 = 0.2$ 、 $\beta_2 = 0.3$, 仿真结果如图2所示.

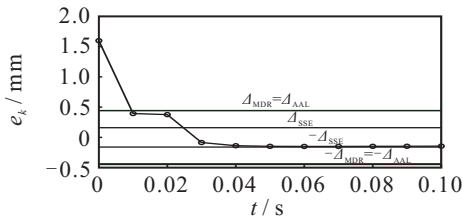


图2 采用控制器(41)时的位置跟踪误差(参数1)

由式(21)、(22)可得 $\Delta_{MDR} = \Delta_{AAL} = 0.436$, 由式(25)、(26)可得 $Z_1 = 0.09 < \delta < Z_2 = 10$, 因此由式(23)得 $\Delta_{SSE} = 0.16$. 由式(29)可得跟踪误差经过 $\lceil m^* \rceil + 1 = \lceil m_1^* + m_2^* \rceil + 1 = 3$ 首次进入稳态误差带. 由图2可见, 仿真结果验证了3个界值及有限收敛步数的正确性.

图3为采用符号函数 sgn 控制器(41)时的位置跟踪误差, 图4为采用ESO反馈控制器(16)、反馈控制器(41)时的位置跟踪误差. 由图3和图4可见, 本文提出的椭圆函数 f 能够有效消除因符号函数 sgn 引起的抖振问题, 实现无抖振控制, 提高了跟踪误差动态品质. 对比表明, 干扰扩张状态观测能很好地估计被控对象所受到的未知扰动, 提高了系统的跟踪性能, 然而仍无法完全消除周期扰动, 因此本文在基于干扰扩张状态观测器的基础上增加离散重复控制, 实现对未能消除的周期扰动的完全抑制.

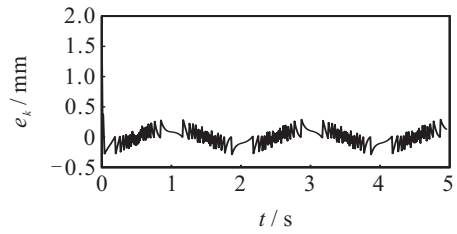


图3 采用符号函数 sgn 控制器(41)时的位置跟踪误差

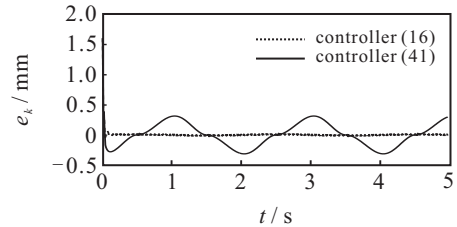


图4 采用ESO反馈控制器(16)、反馈控制器(41)时的位置跟踪误差

6.2 实验结果

本节通过实验验证干扰扩张状态观测器对于非周期扰动的有效抑制, 并结合重复控制器实现对周期扰动的完全抑制.

采样时间为 $T = 5 \text{ ms}$, N 为周期采样点数, 其中 $N = 200$, 给定参考信号为

$$r_k = 9000(\sin(2\pi/N(k - 200)) + 1).$$

由本文给出的稳态误差带表达式, 当实验控制器参数为 $\rho = 0.5$ 、 $\varepsilon = 0.1$ 、 $\delta = 0.2$ 、 $\beta_1 = 0.2$ 、 $\beta_2 = 0.3$ 时, $\delta < Z_1 = 0.52$, 由式(24)可知 $\Delta_{SSE} = \Delta$. 在此情况下的实验结果如图5~图12所示.

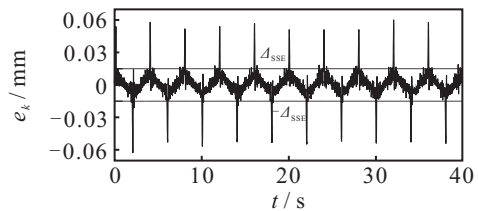


图5 采用反馈控制器(41)时的位置跟踪误差(参数2)

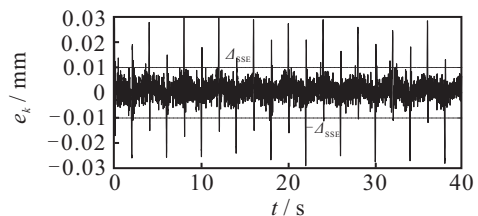


图6 采用ESO反馈控制器(16)时的位置跟踪误差

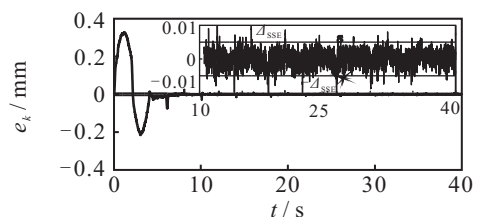


图7 采用重复控制器(42)时的位置跟踪误差

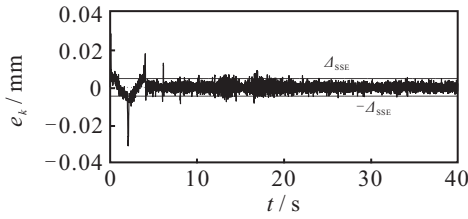


图 8 采用 ESO 重复控制器 (19) 时的位置跟踪误差

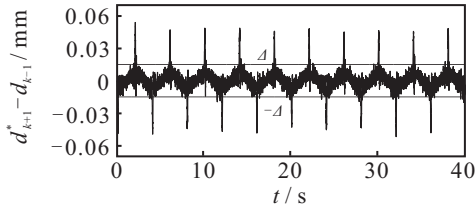


图 9 采用反馈控制器 (41) 时的扰动补偿

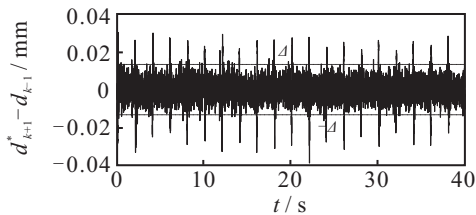


图 10 采用 ESO 反馈控制器 (16) 时的扰动补偿

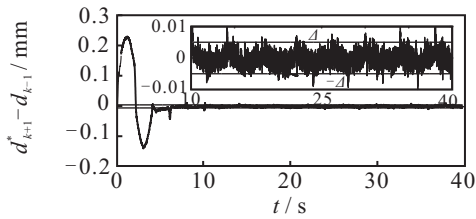


图 11 采用重复控制器 (42) 时的扰动补偿

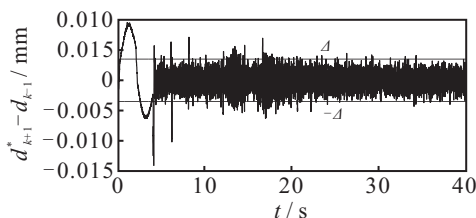


图 12 采用 ESO 重复控制器 (19) 时的扰动补偿

图5和图9分别为反馈控制器(41)作用下的跟踪误差与扰动补偿,可知 $\Delta_{SSE} = \Delta = 0.015 \text{ mm}$,图6和10分别为基于干扰扩张状态观测器的反馈控制器(16)作用下的跟踪误差与扰动补偿,可知 $\Delta_{SSE} = \Delta = 0.01 \text{ mm}$. 实验结果表明,扩张状态观测器估计的扰动补偿比给定界值 d_{k+1}^* 等效扰动补偿更准确,提高了控制系统跟踪性能.

采用干扰扩张状态观测器,能有效抑制未知干扰,重复控制器可实现周期扰动完全抑制. 本文采用干扰扩张状态观测技术设计的离散重复控制器,能有效抑制未知非周期扰动,同时实现周期扰动的完全抑制. 图7和图11分别为重复控制器(42)作用下的跟踪误差与扰动补偿,可知 $\Delta_{SSE} = \Delta = 0.005 \text{ mm}$,在完

全抑制周期扰动后提高了稳态精度.

图8和图12分别为基于干扰扩张状态观测器的重复控制器(19)作用下的跟踪误差与扰动补偿,可知 $\Delta_{SSE} = \Delta = 0.0035 \text{ mm}$,减小了系统的跟踪误差. 图7和图8表明,在相同参数情况下,图8基于扰动扩张观测器的重复控制器相比于图7基于重复控制器能有效减小第1周期系统误差.

7 结 论

针对离散时间系统的周期轨迹跟踪问题,本文提出了一种基于椭圆吸引律的离散重复控制方法. 该方法将控制系统中的未知扰动扩张成新的状态,基于扩张状态观测器估计此未知扰动,并将此策略“嵌入”椭圆吸引律中,构建理想误差动态. 基于此理想误差动态设计具有周期扰动抑制能力的离散时间重复控制器,推导出可用于控制器参数整定和表征系统跟踪误差收敛过程的单调减区域、绝对吸引层、稳态误差带的具体表达式以及系统跟踪误差进入稳态误差带的最大步长. 所提出方法能有效减小系统抖振、抑制未知扰动,并完全消除周期扰动. 通过数值仿真与直线伺服电机实验,验证了所提出控制方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Emelyanov S V. Variable structure control systems[M]. Moscow: Nauka, 1967: 72-117.
- [2] Dote Y, Hoft R G. Microprocessor based sliding mode controller for DC motor drives[C]. Proceedings of Industrial Applications Society Annual Meeting. New York: IEEE: 1980: 22-27.
- [3] Milosavljevic D. General conditions for the existence of a quasi-sliding mode on switching hyper-plane in discrete variable structure systems[J]. Automatic and Remote Control, 1985, 46(3): 307-314.
- [4] Sarpturk S Z, Istefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1999, 32(10): 930-932.
- [5] Gao W B, Wang Y, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Transaction on Industrial Electronics, 1995, 42(1): 117-122.
- [6] Slotine J J. Sliding controller design for nonlinear systems[J]. International Journal of Control, 1984, 40(2): 421-434.
- [7] Slotine J J, Hedrick J K, Misawa E A. Nonlinear state estimation using sliding observers[C]. The 25th IEEE Conference on Decision and Control. San Antonio: IEEE, 1986: 332-339.

- [8] 姚琼荟, 宋立忠, 温洪. 离散变结构控制系统的比例-等速-变速控制[J]. 控制与决策, 2000, 15(3): 329-332.
(Yao Q H, Song L Z, Wen H. Proportional constant variable rate control for discrete time variable structure systems[J]. Control and Decision, 2000, 15(3): 329-332.)
- [9] Burton J A, Zinober A S I. Continuous approximation of variable structure control[J]. International Journal of Systems Science, 1986, 17(6): 875-885.
- [10] 孙明轩, 范伟云, 王辉. 用于离散重复控制的新型趋近律[J]. 自动化学报, 2011, 37(10): 1213-1221.
(Sun M X, Fan W Y, Wang H. Discrete sliding mode repetitive control with novel reaching law[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(10): 1213-1221.)
- [11] Ma H F, Wu J H. Discrete-time sliding-mode control with improved quasi-sliding-mode domain[J]. IEEE Transaction on Industrial Electronic, 2016, 3(10): 1109-1118.
- [12] 米阳, 李文林, 井元伟. 基于幂次趋近律的一类离散时间系统的变结构控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 643-646.
(Mi Y, Li W L, Jing Y W. Variable structure control for a class of discrete-time system based on power reaching law[J]. Control and Decision, 2008, 23(6): 643-646.)
- [13] Sun M X, Wu L W, Hu Y, et al. Digital control strategies with attractiveness and invariance specifications[J]. IEEE Transaction on Control Systems Technology, 2017, 26(4): 1272-1284.
- [14] Feng Y, Han F L, Yu X H. Chattering free full-order sliding-mode control[J]. Automatica, 2014, 50(4): 1310-1314.
- [15] 张瑶, 马广富, 郭延宁, 等. 一种多幂次滑模趋近律设计与分析[J]. 自动化学报, 2016, 42(3): 466-472.
(Zhang Y, Ma G F, Guo Y N, et al. A multi power reaching law of sliding mode control design and analysis[J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(3): 466-472.)
- [16] 孙明轩, 许利达, 邬玲伟. 离散时间系统重复控制的理想误差动态方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(12): 1771-1778.
(Sun M X, Xu L D, Wu L W. Ideal-error-dynamics approach for repetitive control of discrete-time systems[J]. Control and Decision, 2013, 28(12): 1771-1778.)
- [17] 邬玲伟, 孙明轩, 胡轶. 基于死区吸引律的离散重复控制[J]. 控制与决策, 2015, 30(6): 977-984.
(Wu L W, Sun M X, Hu Y. Discrete repetitive control using attracting law with dead zone[J]. Control and Decision, 2015, 30(6): 977-984.)
- [18] 邬玲伟, 孙明轩. 无抖振离散重复控制器的设计与实现[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(4): 554-560.
(Wu L W, Sun M X. Design and implementation of a chattering-free discrete-time repetitive controller[J]. Control Theory & Applications, 2015, 32(4): 554-560.)
- [19] 周文委, 孙明轩, 张有兵. 带扰动补偿的无抖振离散重复控制器设计[J]. 控制与决策, 2017, 32(3): 467-473.
(Zhou W W, Sun M X, Zhang Y B. Chattering-free discrete-time repetitive controller design with disturbance compensator[J]. Control and Decision, 2017, 32(3): 467-473.)
- [20] 周文委, 孙明轩, 张有兵. 基于约束输入变速吸引律的离散重复控制器设计[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1742-1748.
(Zhou W W, Sun M X, Zhang Y B. Rare-variant attracting law based design of discrete-time repetitive controllers with constrained input[J]. Control and Decision, 2016, 31(10): 1742-1748.)
- [21] 邬玲伟, 孙明轩. 一种自适应吸引离散时间控制方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(9): 1546-1552.
(Wu L W, Sun M X. A discrete-time control method based on adaptive attracting law[J]. Control and Decision, 2016, 31(9): 1546-1552.)
- [22] 韩京清. 自抗扰控制技术: 估计补偿不确定因素的控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 243-288.
(Han J Q. Active disturbance rejection control technique-the technique for estimating and compensating the uncertainties[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008: 243-288.)
- [23] 韩京清. 一类不确定对象的扩张状态观测器[J]. 控制与决策, 1995, 10(1): 85-88.
(Han J Q. The extended state observer of a class of uncertain systems[J]. Control and Decision, 1995, 10(1): 85-88.)

作者简介

胡轶(1972—), 男, 讲师, 博士, 从事重复控制等研究, E-mail: hyn@zjut.edu.cn;

胡志云(1993—), 男, 硕士, 从事滑模控制的研究, E-mail: 1921377963@qq.com;

孙明轩(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事学习控制等研究, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.

(责任编辑: 郑晓蕾)