

# 控制与决策

Control and Decision

## 时滞乘积型Lyapunov泛函的时变时滞系统稳定性新判据

练红海, 肖仲平, 陈刚, 张晓虎, 邓鹏

引用本文:

练红海, 肖仲平, 陈刚, 等. 时滞乘积型Lyapunov泛函的时变时滞系统稳定性新判据[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 1017–1024.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0823>

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 时滞仿射线性参数变量系统的有记忆 $H_\infty$ 状态反馈控制

Memory state feedback  $H_\infty$  control for affine linear parameter variable systems with time delay

控制与决策. 2019, 34(4): 709–717 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1294>

### 网络环境下连续切换系统观测器和控制器设计

Observer and controller design for continuous switched systems in the network environment

控制与决策. 2019, 34(12): 2649–2655 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0357>

### 线性连续时间时滞系统的有限时间有界跟踪控制

Finite-time bounded tracking control for linear continuous systems with time-delay

控制与决策. 2019, 34(10): 2095–2104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0190>

### 输出时滞双率采样系统的鲁棒迭代学习控制

Robust iterative learning control for a dual-rate sampling system with output delay

控制与决策. 2017, 32(9): 1707–1713 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0860>

### 一类不确定切换中立型系统的鲁棒滑模控制

Robust sliding mode control for a class of uncertain switched neutral systems

控制与决策. 2016(3): 521–527 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1919>

### 不确定广义线性时变系统的鲁棒稳定和二次稳定

Robust stability and quadratic stability for linear time-varying uncertain singular system

控制与决策. 2015, 30(5): 929–933 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0311>

### 基于T-S模糊模型的网络控制系统非脆弱 $\infty$ 跟踪控制

Non-fragile  $\infty$  tracking control for networked control systems based on T-S fuzzy model

控制与决策. 2015(1): 110–116 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2013.1264>

### 网络化多胞型系统的变增益H.控制

Gain-scheduled H. control of networked polytopic systems

控制与决策. 2015(1): 137–142 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2013.1258>

# 时滞乘积型 Lyapunov 泛函的时变时滞系统稳定性新判据

练红海<sup>1,2,3</sup>, 肖伸平<sup>1,3†</sup>, 陈刚<sup>1,3</sup>, 张晓虎<sup>1,3</sup>, 邓鹏<sup>2,3</sup>

(1. 湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412008; 2. 湖南电气职业技术学院 风能工程学院, 湖南湘潭 411101; 3. 电传动控制与智能装备湖南省重点实验室, 湖南 株洲 412008)

**摘要:** 应用新的 Lyapunov 泛函研究时变时滞系统的渐近稳定性问题. 首先, 基于 Bessel-Legendre 积分不等式和改进的自由矩阵积分不等式, 提出两个新的时滞乘积型 Lyapunov 泛函, 其充分利用时滞  $d(t)$  与二次型函数的乘积信息以及时滞  $h - d(t)$  与二次型函数的乘积信息; 然后, 采用 Bessel-Legendre 积分不等式和改进的凹凸组合方法估计时滞乘积型 Lyapunov 泛函导数的积分项, 得到两个低保守性的时滞相关稳定性判据; 最后, 通过两个数值算例进行验证, 结果表明, 与最近相关方法相比, 所提出方法可获得更大的允许时滞上界, 进一步表明了所提出方法的可行性和低保守性.

**关键词:** 时变时滞系统; 时滞乘积型 Lyapunov 泛函; 稳定性; 积分不等式; 时滞上界

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## New criteria for stability time-varying delay systems based on delay-product-type Lyapunov functionals

LIAN Hong-hai<sup>1,2,3</sup>, XIAO Shen-ping<sup>1,3†</sup>, CHEN Gang<sup>1,3</sup>, ZHANG Xiao-hu<sup>1,3</sup>, DENG Peng<sup>2,3</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412008, China; 2. School of Wind Energy Engineering, Hunan Electrical College of Technology, Xiangtan 411101, China; 3. Key Laboratory for Control and Intelligent Equipment of Hunan Province, Zhuzhou 412008, China)

**Abstract:** The problem of stability for time-varying delay systems is investigated using a new Lyapunov functional. Two delay-product-type Lyapunov functionals are firstly proposed based on Bessel-Legendre integral inequality and improved free-matrix-based integral inequality. The functional utilizes the information on both the delay  $d(t)$  times quadratic function and the delay  $h - d(t)$  times quadratic function. Then, by using the Bessel-Legendre integral inequality and the improved reciprocally convex method to estimate the derivative of Lyapunov functional, some less conservative stability criteria are derived for the considered time-varying delay systems. The feasibility and less conservativeness of the obtained criteria are verified by two numerical examples. The results obtained show that the proposed methods can provide a larger admissible delay upper bounds than some existing ones.

**Keywords:** time-varying delay systems; delay-product-type Lyapunov functionals; stability; integral inequality; delay upper

## 0 引言

时滞现象普遍存在于各类控制系统中, 并影响控制系统的稳定性. 在实际应用中, 时滞往往是损害系统性能, 导致系统不稳定的重要因素<sup>[1]</sup>, 因此对时滞系统的研究具有重要的科学意义和应用价值, 吸引了国内外众多控制团队的研究兴趣与广泛关注<sup>[2-19]</sup>.

Lyapunov 泛函结合积分不等式方法是目前分析时滞系统稳定性的主流方法, 主要目的是获得低保守性的稳定准则. 衡量稳定准则保守性的关键指标是最大允许时滞上界, 即通过稳定条件得到的时

滞上界越大, 保守性越小. 两种手段可达到降低保守性的目的: 一是构造合适的 Lyapunov 泛函; 二是尽可能精确地估计 Lyapunov 泛函导数. 构造一个合适的 Lyapunov 泛函对于推导低保守性条件尤为重要, Lyapunov 泛函构造方法主要有增广型 Lyapunov 泛函<sup>[2-3]</sup>和时滞分段型 Lyapunov 泛函<sup>[4,20]</sup>, 前者在泛函向量中引入滞后状态、状态导数和状态积分以及多重积分等有效信息, 后者通过将时滞区间分割为多个子区间, 增加待矩阵的自由度, 以实现降低保守性的目标. 另外, Park 等<sup>[5]</sup>在 Lyapunov 泛函中引入二次

收稿日期: 2018-06-15; 修回日期: 2018-11-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61672225); 湖南省自然科学基金项目(2017JJ4021, 2018JJ4075); 湖南电气职业技术学院自然科学基金重点项目(2018ZK001).

†通讯作者. E-mail: xsph\_519@163.com.

型多重积分项,也能起到降低保守性的作用.最近,一些学者在Lyapunov泛函中考虑了二次型函数与时滞的乘积信息<sup>[6-8]</sup>,可有效捕获时滞和时滞变化率信息,能有效降低稳定准则的保守性.

另一方面,对Lyapunov泛函导数进行精确估计以获得低保守性准则也非常重要,因此众多学者致力于这方面研究,提出了很多关于泛函导数的估计方法<sup>[9-19]</sup>.在早期的文献中,一般采用模型转换<sup>[9]</sup>和自由权矩阵方法<sup>[10]</sup>处理泛函导数中二次型积分项,但估计不够精确,保守性较大.而积分不等式方法能较好地避免前两种方法在估计积分项时产生的保守性,成为当前的主要估计方法.积分不等式大致可分为Bessel-Legendre(B-L)型<sup>[12,17]</sup>和自由矩阵型<sup>[13-16]</sup>积分不等式,两类不等式各有其优缺点.前者需结合逆凸组合方法<sup>[18-19]</sup>对泛函导数进行估计,与同阶数的自由矩阵不等式相比,保守性大,但决策变量少;后者估计泛函导数时无需结合逆凸组合方法,虽然保守性相对较小,但引入了一系列自由权矩阵,决策变量多,计算复杂度较大.综上,学者们在泛函导数的估计方面取得很多成果,但在泛函的构造方法方面取得的成果并不多,因此,如何构造低保守性的Lyapunov泛函还有进一步研究空间.

本文针对时滞系统,在泛函中充分考虑时滞和二次型函数的乘积信息,提出了两类新的Lyapunov泛函,即基于Bessel-Legendre的时滞乘积型Lyapunov泛函和基于自由矩阵的时滞乘积型Lyapunov泛函.利用提出的Lyapunov泛函结合积分不等式方法,给出两个新的基于线性矩阵不等式的时滞相关稳定判据.最后,通过两个数值算例验证所得结果的保守性更低,以进一步表明所提出方法的可行性和优越性.

本文采用如下记号: $\mathbf{R}^n$ 、 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 分别表示实数域的 $n$ 维向量空间和 $n \times m$ 矩阵空间;符号 $H^{-1}$ 和 $H^T$ 为矩阵的逆和转置; $\mathbf{0}$ 和 $I$ 分别为合适维数的零矩阵和单位矩阵; $P > \mathbf{0}$ 为矩阵是正定的对称矩阵; $\text{Sym}\{X\} = X + X^T$ 为矩阵 $X$ 与矩阵 $X$ 转置之和;“\*”为矩阵中的对称项.

### 1 问题描述

考虑如下线性时变时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad -h \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态; $\phi(t)$ 为初始函数; $A$ 、 $A_d$ 为已知常数矩阵; $d(t)$ 为时变时滞,满足

$$0 \leq d(t) \leq h, \quad -\mu \leq \dot{d}(t) \leq \mu, \quad (2)$$

$h$ 和 $\mu$ 为已知常数.

**引理1**<sup>[5]</sup> 对任意正定矩阵 $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,常数 $a$ 、 $b$ ,向量函数 $x : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,有

$$\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \hat{\omega}_0^T(t) E_e^T \hat{R} E_e \hat{\omega}_0(t). \quad (3)$$

其中

$$\hat{R} = \text{diag}\{R, 3R, 5R\},$$

$$\tau = b - a, \quad \hat{\nu}_0(t) = [x^T(b) \ x^T(a)]^T,$$

$$E_e = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 \\ I & I & -2I & 0 \\ I & -I & 6I & -12I \end{bmatrix},$$

$$\hat{\omega}_0 =$$

$$\left[ \hat{\nu}_0^T(t) \quad \frac{1}{\tau} \int_a^b x^T(s) ds \quad \frac{1}{\tau^2} \int_a^b \int_s^b x^T(u) du ds \right]^T.$$

**引理2**<sup>[19]</sup> 对正定矩阵 $R_1, R_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,任意向量 $\hat{\omega}_1(t), \hat{\omega}_2(t)$ ,标量 $\gamma \in (0, 1)$ ,任意矩阵 $N_1$ 和 $N_2$ ,有

$$\begin{aligned} \hat{E}(\gamma) = & \frac{1}{\gamma} \hat{\omega}_1^T(t) R_1 \hat{\omega}_1(t) + \frac{1}{1-\gamma} \hat{\omega}_2^T(t) R_2 \hat{\omega}_2(t) \geq \\ & \hat{\omega}_1^T(t) [R_1 + (1-\gamma)(R_1 - N_2 R_2^{-1} N_2^T)] \hat{\omega}_1(t) + \\ & \hat{\omega}_2^T(t) [R_2 + \gamma(R_2 - N_1^T R_1^{-1} N_1)] \hat{\omega}_2(t) + \\ & 2\hat{\omega}_1^T(t) [(1-\gamma)N_1 + \gamma N_2] \hat{\omega}_2(t). \end{aligned} \quad (4)$$

**引理3** 对向量函数 $x : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,对称矩阵 $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , $\hat{X}_{11}, \hat{X}_{22}, \hat{X}_{33} \in \mathbf{R}^{4n \times 4n}$ ,任意矩阵 $\hat{X}_{12}, \hat{X}_{13}, \hat{X}_{23} \in \mathbf{R}^{4n \times 4n}$ , $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3 \in \mathbf{R}^{4n \times n}$ ,满足

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{11} & \hat{X}_{12} & \hat{X}_{13} & \hat{G}_1 \\ * & \hat{X}_{22} & \hat{X}_{23} & \hat{G}_2 \\ * & * & \hat{X}_{33} & \hat{G}_3 \\ * & * & * & R \end{bmatrix} > 0,$$

则如下不等式成立:

$$\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \geq -\hat{\omega}_0^T(t) [\tau \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2] \hat{\omega}_0(t). \quad (5)$$

其中

$$\mathcal{X}_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2i+1} \hat{X}_{ii}, \quad \mathcal{X}_2 = \text{Sym}\{[\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3] E_e\},$$

$\hat{\omega}_0(t), \tau$ 和 $E_e$ 定义见引理1.

**证明** 将文献[14]引理2的辅助函数 $f_1(s)$ 和 $f_2(s)$ 修改为

$$\begin{aligned} \varsigma_1(s) &= \frac{b+a-2s}{b-a}, \\ \varsigma_2(s) &= \frac{6s^2 - 6(b+a)s + b^2 + 4ba + a^2}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

将 $\varsigma_1(s)$ 和 $\varsigma_2(s)$ 替换为 $f_1(s)$ 和 $f_2(s)$ ,则由类似文献[14]引理2的证明过程可得引理3.  $\square$

**引理4** 存在标量 $\bar{h}$ ,对称矩阵 $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ ,连续函数 $\varphi(t) \in [0, \bar{h}]$ ,定义函数 $\mathcal{F}(\varphi(t)) = \varphi^2(t) \Omega_0 +$

$\varphi(t)\Omega_1 + \Omega_2$ , 满足

- 1)  $\mathcal{F}(0) = \Omega_2 < 0$ ,
- 2)  $\mathcal{F}(\bar{h}) = \bar{h}^2\Omega_0 + \bar{h}\Omega_1 + \Omega_2 < 0$ ,
- 3)  $-\bar{h}^2\Omega_0 + \mathcal{F}(0) < 0$ ,

则如下不等式成立:

$$\mathcal{F}(\varphi(t)) = \varphi^2(t)\Omega_0 + \varphi(t)\Omega_1 + \Omega_2 < 0. \quad (6)$$

**证明** 将函数 $\mathcal{F}(\varphi(t))$ 进行简单变换, 有

$$\begin{aligned} &\varphi^2(t)\Omega_0 + \varphi(t)\Omega_1 + \Omega_2 = \\ &\frac{(\bar{h} - \varphi(t))^2}{\bar{h}^2}\Omega_2 + \frac{\varphi(t)(\bar{h} - \varphi(t))}{\bar{h}^2}(-\bar{h}^2\Omega_0 + \Omega_2) + \\ &\frac{\varphi(t)}{\bar{h}}(\bar{h}^2\Omega_0 + \bar{h}\Omega_1 + \Omega_2), \end{aligned}$$

显然, 当条件1)~条件3)成立时, 有 $\mathcal{F}(\varphi(t)) < 0$ .  $\square$

**注1** 在引理3中, 提出一个改进的自由矩阵不等式, 通过合理设置自由矩阵参数可简化为文献[15]引理1和Bessel-Legendre积分不等式 $N = 1, 2$ 的情形, 具有更低的保守性. 引理4提供了一种将非线性矩阵不等式转换为线性矩阵不等式的方法, 可解决LMI工具箱不能直接处理非线性矩阵不等式的问题.

## 2 时滞乘积型Lyapunov泛函

为了使推导过程更为简洁, 定义如下记号:

$$\begin{aligned} h_d(t) &= h - d(t), \quad \delta_d(t) = 1 - \dot{d}(t), \\ \rho_i(t) &= \frac{1}{d^i(t)} \int_{t-d(t)}^t [s - (t - d(t))]^{i-1} x(s) ds, \\ \varrho_j(t) &= \frac{1}{h_d^j(t)} \int_{t-h}^{t-d(t)} [s - (t - h)]^{j-1} x(s) ds, \\ \chi_1(t) &= [x^T(t) \quad x^T(t - d(t)) \quad x^T(t - h)]^T, \\ \chi_2(t) &= [\dot{x}^T(t) \quad \dot{x}^T(t - d(t)) \quad \dot{x}^T(t - h)]^T, \\ \chi_3(t) &= [d(t)\rho_1^T(t) \quad h_d(t)\varrho_1^T(t) \quad d(t)\rho_2^T(t)]^T, \\ \vartheta_1(t, s) &= \left[ \int_s^t x(u) du \quad \int_s^t \dot{x}(u) du \quad \int_{t-d(t)}^s \dot{x}(u) du \right]^T, \\ \vartheta_2(t, s) &= \left[ \int_s^{t-d(t)} x(u) du \quad \int_s^t \dot{x}(u) du \quad \int_s^{t-d(t)} \dot{x}(u) du \right]^T, \\ \eta_1(t) &= [\chi_1^T(t) \quad \chi_3^T(t) \quad h_d(t)\varrho_2^T(t)]^T, \\ \eta_2(t, s) &= [x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \quad \vartheta_1^T(t, s)]^T, \\ \eta_3(t, s) &= [x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \quad \vartheta_2^T(t, s)]^T, \\ \xi(t) &= [\chi_1^T(t) \quad \chi_2^T(t) \quad \rho_1^T(t) \quad \varrho_1^T(t) \quad \rho_2^T(t) \quad \varrho_2^T(t)]^T, \\ e_i &= [0_{n \times (i-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (10-i)n}], \quad i = 1, 2, \dots, 10. \end{aligned}$$

基于Bessel-Legendre积分不等式 $N = 2$ 的情形和改进自由矩阵积分不等式, 得到如下两类新的时滞

乘积型Lyapunov泛函.

### 2.1 基于B-L的时滞乘积型Lyapunov泛函

**命题1** 给定标量 $h$ , 正定矩阵 $N_1, N_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 如下函数可选取为时滞系统(1)的Lyapunov泛函:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{BL}(t) &= d(t) \left( J_1(t) - \frac{1}{h} \alpha^T(t) E_e^T \mathcal{N}_1 E_e \alpha(t) \right) + \\ &h_d(t) \left( J_2(t) - \frac{1}{h} \beta^T(t) E_e^T \mathcal{N}_2 E_e \beta(t) \right). \quad (7) \end{aligned}$$

其中:  $E_e$ 定义见引理1, 且有

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \text{diag}\{N_1, 3N_1, 5N_1\}, \\ \mathcal{N}_2 &= \text{diag}\{N_2, 3N_2, 5N_2\}, \\ J_1(t) &= \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) N_1 \dot{x}(s) ds, \\ J_2(t) &= \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) N_2 \dot{x}(s) ds, \\ \alpha(t) &= [x^T(t) \quad x^T(t - d(t)) \quad \rho_1^T(t) \quad \rho_2^T(t)]^T, \\ \beta(t) &= [x^T(t - d(t)) \quad x^T(t - h) \quad \varrho_1^T(t) \quad \varrho_2^T(t)]^T. \end{aligned}$$

**证明** 由于 $N_1$ 和 $N_2$ 是正定矩阵,  $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 也是正定的, 已知 $0 \leq d(t) \leq h$ , 得

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{BL}(t) &\geq \\ &d(t) \left( J_1(t) - \frac{1}{d(t)} \alpha^T(t) E_e^T \mathcal{N}_1 E_e \alpha(t) \right) + \\ &h_d(t) \left( J_2(t) - \frac{1}{h_d(t)} \beta^T(t) E_e^T \mathcal{N}_2 E_e \beta(t) \right). \end{aligned}$$

此时, 使用引理1可知 $\mathcal{V}_{BL}(t) > 0$ .  $\square$

### 2.2 基于自由矩阵的时滞乘积型Lyapunov泛函

**命题2** 给定标量 $h$ , 对称矩阵 $M_1, M_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $X_{11}, X_{22}, X_{33}, Z_{11}, Z_{22}, Z_{33} \in \mathbf{R}^{4n \times 4n}$ , 任意矩阵 $X_{12}, X_{13}, X_{23}, Z_{12}, Z_{13}, Z_{23} \in \mathbf{R}^{4n \times 4n}$ ,  $G_1, G_2, G_3, D_1, D_2, D_3 \in \mathbf{R}^{4n \times n}$ , 满足

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & G_1 \\ * & X_{22} & X_{23} & G_2 \\ * & * & X_{33} & G_3 \\ * & * & * & M_1 \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & D_1 \\ * & Z_{22} & Z_{23} & D_2 \\ * & * & Z_{33} & D_3 \\ * & * & * & M_2 \end{bmatrix} > 0. \quad (9)$$

如下函数可选取为时滞系统(1)的Lyapunov泛函:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{FM}(t) &= \\ &d(t) (J_3(t) + \alpha^T(t) \mathcal{M}_1 [d(t)] \alpha(t)) + \\ &h_d(t) (J_4(t) + \beta^T(t) \mathcal{M}_2 [h_d(t)] \beta(t)). \quad (10) \end{aligned}$$

其中:  $E_e$ 定义见引理1,  $\alpha(t), \beta(t)$ 定义见命题1, 且有

$$J_3(t) = \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) M_1 \dot{x}(s) ds,$$

$$\begin{aligned}
 J_4(t) &= \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s)M_2\dot{x}(s)ds, \\
 \mathcal{M}_1[d(t)] &= d(t)\mathcal{X} + \mathcal{G}_e, \\
 \mathcal{M}_2[h_d(t)] &= h_d(t)\mathcal{Z} + \mathcal{D}_e, \\
 \mathcal{X} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2i+1} X_{ii}, \mathcal{G}_e = \text{Sym}\{[G_1, G_2, G_3]E_e\}, \\
 \mathcal{Z} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2i+1} Z_{ii}, \mathcal{D}_e = \text{Sym}\{[D_1, D_2, D_3]E_e\}.
 \end{aligned}$$

**证明** 使用引理3可知 $\mathcal{V}_{FM}(t) > 0$ .  $\square$

**注2** 所提出的时滞乘积型Lyapunov泛函充分考虑了时滞 $d(t)$ 和 $h-d(t)$ 与二次型函数的乘积信息,与现有的Lyapunov泛函相比,具有如下特点:

1) 时滞 $d(t)$ 和 $h-d(t)$ 在Lyapunov泛函中以乘积形式出现,其微分项包含时滞 $d(t)$ 信息和时滞变化率 $\dot{d}(t)$ 信息,即 $\dot{\mathcal{V}}_{BL}(t)$ 和 $\dot{\mathcal{V}}_{FM}(t)$ 既与 $d(t)$ 相关也与 $\dot{d}(t)$ 相关.因此,泛函 $\mathcal{V}_{BL}(t)$ 和 $\mathcal{V}_{FM}(t)$ 在减小稳定准则保守性方面具有关键作用,原因在于它比传统的Lyapunov泛函包含了更多的有效信息.

2) 所提出的时滞乘积型Lyapunov泛函无需每一个Lyapunov泛函项正定.如在 $\mathcal{V}_{BL}(t)$ 中, $-(d(t)/h) \times \alpha^T(t)E_e^T N_1 E_e \alpha(t)$ 和 $-(h_d(t)/h)\beta^T(t)E_e^T N_2 E_e \beta(t)$ 是负定的;在 $\mathcal{V}_{FM}(t)$ 中, $-\alpha^T(t)\mathcal{M}_1[h_d(t)]\alpha(t)$ 和 $-\beta^T(t)\mathcal{M}_2[h_d(t)]\beta(t)$ 也是负定的,这些负定项在放松时滞系统稳定条件时扮演着重要角色.

**注3** 与文献[6-8]不同,提出的Lyapunov泛函是基于Bessel-Legendre不等式 $N=2$ 的情形和改进自由矩阵不等式提出的,包含了更多状态(滞后状态、状态导数、状态积分和多重积分)信息以及它们的交叉信息.

### 3 时滞系统稳定性准则

**定理1** 对于系统(1),给定时滞参数 $h$ 和 $\mu$ ,时滞 $d(t)$ 满足条件(2),存在合适维度的正定矩阵 $P$ 、 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $R$ 、 $N_1$ 、 $N_2$ ,任意矩阵 $H_1$ 、 $H_2$ 、 $F$ ,满足如下线性矩阵不等式:

$$R - [\dot{d}(t)/h]N_1 > 0, R + [\dot{d}(t)/h]N_2 > 0, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{[d(t)=0, \dot{d}(t)]} & \Xi_{11}^T E_e^T H_2 \\ * & -\mathcal{R}_{N_2}[\dot{d}(t)] \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{[d(t)=h, \dot{d}(t)]} & \Xi_{13}^T E_e^T H_1^T \\ * & -\mathcal{R}_{N_1}[\dot{d}(t)] \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} -h^2\Upsilon_0 + \Phi_{[d(t)=0, \dot{d}(t)]} & \Xi_{11}^T E_e^T H_2 \\ * & -\mathcal{R}_{N_2}[\dot{d}(t)] \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

那么系统是渐近稳定的.其中

$$\begin{aligned}
 \Phi_{[d(t), \dot{d}(t)]} &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \text{Sym}\{F\Xi_s\}, \\
 \Phi_1 &= \text{Sym}\{\Xi_1^T P \Xi_2 + \Xi_5^{(1)T} Q_1 \Xi_6 + \Xi_9^{(1)T} Q_2 \Xi_{10}\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 &= \Xi_3^T Q_1 \Xi_3 - \dot{\delta}_d(t) \Xi_4^{(1)T} Q_1 \Xi_4^{(1)} + h^2 e_4^T R e_4 + \\
 &\quad \dot{\delta}_d(t) \Xi_7^T Q_2 \Xi_7 - \Xi_8^{(1)T} Q_2 \Xi_8^{(1)}, \\
 \Phi_3 &= d(t)(e_4^T N_1 e_4 - \dot{\delta}_d(t) e_5^T N_1 e_5) + \\
 &\quad h_d(t)(\dot{\delta}_d(t) e_5^T N_2 e_5 - e_6^T N_2 e_6) - \\
 &\quad (\dot{d}(t)/h) \Xi_{11}^T E_e^T N_1 E_e \Xi_{11} + \\
 &\quad (\dot{d}(t)/h) \Xi_{13}^T E_e^T N_2 E_e \Xi_{13}, \\
 \Phi_4 &= -\frac{1}{h} \text{Sym}\{\Xi_{11}^T E_e^T N_1 E_e \Xi_{12} + \Xi_{13}^T E_e^T N_2 E_e \Xi_{14}\}, \\
 \Phi_5 &= -[(2h-d(t))/h] \Xi_{11}^T E_e^T \mathcal{R}_{N_1}[\dot{d}(t)] E_e \Xi_{11} - \\
 &\quad [(h+d(t))/h] \Xi_{13}^T E_e^T \mathcal{R}_{N_2}[\dot{d}(t)] E_e \Xi_{13} - \\
 &\quad \text{Sym}\left\{\Xi_{11}^T E_e^T \left[\frac{h-d(t)}{h} H_1 + \frac{d(t)}{h} H_2\right] E_e \Xi_{13}\right\}, \\
 \Upsilon_0 &= -\dot{\delta}_d(t) \Xi_4^{(0)T} Q_1 \Xi_4^{(0)} - \Xi_8^{(0)T} Q_2 \Xi_8^{(0)} + \\
 &\quad \text{Sym}\{\Xi_5^{(0)T} Q_1 \Xi_6 + \Xi_9^{(0)T} Q_2 \Xi_{10}\}, \\
 R_{N_1} &= R - (\dot{d}(t)/h)N_1, R_{N_2} = R + (\dot{d}(t)/h)N_2, \\
 \mathcal{R}_{N_1}[\dot{d}(t)] &= \text{diag}\{R_{N_1}, 3R_{N_1}, 5R_{N_1}\}, \\
 \mathcal{R}_{N_2}[\dot{d}(t)] &= \text{diag}\{R_{N_2}, 3R_{N_2}, 5R_{N_2}\}, \\
 \Xi_1 &= \\
 &[e_1^T \ e_2^T \ e_3^T \ d(t)e_7^T \ h_d(t)e_8^T \ d(t)e_9^T \ h_d(t)e_{10}^T]^T, \\
 \Delta_1 &= e_1 - \dot{\delta}_d(t)e_2, \Delta_3 = e_1 - \dot{\delta}_d(t)e_7 - \dot{d}(t)e_9, \\
 \Delta_2 &= \dot{\delta}_d(t)e_2 - e_3, \Delta_4 = \dot{\delta}_d(t)e_2 - e_8 + \dot{d}(t)e_{10}, \\
 \Xi_2 &= [e_4^T \ \dot{\delta}_d(t)e_5^T \ e_6^T \ \Delta_1^T \ \Delta_2^T \ \Delta_3^T \ \Delta_4^T]^T, \\
 \Xi_3 &= [e_1^T \ e_4^T \ 0 \ 0 \ e_1^T - e_2^T]^T, \\
 \Xi_4^{(k)} &= [ke_2^T \ ke_5^T \ d^k(t)e_7^T \ k(e_1^T - e_2^T) \ 0]^T, \\
 \Delta_5 &= [d(t)(e_1 - e_7)^T \ d(t)(e_7 - e_2)^T]^T, \\
 \Xi_5^{(k)} &= [kd(t)e_7^T \ k(e_1^T - e_2^T) \ [d^2(t)]^k e_9^T \ k\Delta_5^T]^T, \\
 \Xi_6 &= [0 \ 0 \ e_1^T \ e_4^T \ -\dot{\delta}_d(t)e_5^T]^T, \\
 \Xi_7 &= [e_2^T \ e_5^T \ 0 \ e_1^T - e_2^T \ 0]^T, \\
 \Delta_6 &= [(e_1 - e_3)^T \ (e_2 - e_3)^T]^T, \\
 \Xi_8^{(k)} &= [ke_3^T \ ke_6^T \ (-1)^{1-k} h_d^k(t)e_8^T \ k\Delta_6^T]^T, \\
 \Delta_7 &= [h_d(t)(e_1 - e_8)^T \ h_d(t)(e_2 - e_8)^T]^T, \\
 \Xi_9^{(k)} &= [kh_d(t)e_8^T \ k(e_2^T - e_3^T) \ [h_d^2(t)]^k e_{10}^T \ k\Delta_7^T]^T, \\
 \Xi_{10} &= [0 \ 0 \ \dot{\delta}_d(t)e_2^T \ e_4^T \ \dot{\delta}_d(t)e_5^T]^T, \\
 \Xi_{11} &= [e_1^T \ e_2^T \ e_7^T \ e_9^T]^T, \\
 \Delta_8 &= e_1 - \dot{\delta}_d(t)e_2 - \dot{d}(t)e_7, \Delta_9 = \Delta_3 - \dot{d}(t)e_9, \\
 \Xi_{12} &= [d(t)e_4^T \ d(t)\dot{\delta}_d(t)e_5^T \ \Delta_8^T \ \Delta_9^T]^T, \\
 \Xi_{13} &= [e_2^T \ e_3^T \ e_8^T \ e_{10}^T]^T, \Xi_s = Ae_1 + Ad e_2 - e_4, \\
 \Delta_{10} &= \dot{\delta}_d(t)e_2 - e_3 + \dot{d}(t)e_8, \Delta_{11} = \Delta_4 + \dot{d}(t)e_{10}, \\
 \Xi_{14} &= [h_d(t)\dot{\delta}_d(t)e_5^T \ h_d(t)e_6^T \ \Delta_{10}^T \ \Delta_{11}^T]^T.
 \end{aligned}$$

**证明** 构造如下时滞乘积型Lyapunov泛函:

$$V(t) = V_o(t) + \mathcal{V}_{BL}(t). \quad (15)$$

其中:  $\mathcal{V}_{BL}(t)$  定义见命题1, 且有

$$V_o(t) = \eta_1^T(t)P\eta_1(t) + \int_{t-d(t)}^t \eta_2^T(t,s)Q_1\eta_2(t,s)ds + \int_{t-h}^{t-d(t)} \eta_3^T(t,s)Q_2\eta_3(t,s)ds + h \int_{t-h}^t \int_s^t \dot{x}^T(u)R\dot{x}(u)duds.$$

计算Lyapunov泛函  $V(x_t)$  的导数, 有

$$\dot{V}_o(t) = \xi^T(t)(\Phi_1 + \Phi_2)\xi(t) - h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds, \quad (16)$$

$$\dot{\mathcal{V}}_{BL}(t) = \xi^T(t)(\Phi_3 + \Phi_4)\xi(t) + \dot{d}(t)(J_1(t) - J_2(t)). \quad (17)$$

其中:  $J_1(t)$  和  $J_2(t)$  定义见命题1,  $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$ 、 $\Phi_3$  和  $\Phi_4$  定义见定理1. 满足条件(11), 使用引理1和引理2界定  $\dot{V}_o(t)$  和  $\dot{\mathcal{V}}_{BL}(t)$  的积分项, 有

$$\begin{aligned} & \dot{d}(t)(J_1(t) - J_2(t)) - h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds = \\ & - h \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s)[R - (\dot{d}(t)/h)N_1]\dot{x}(s)ds - \\ & h \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s)[R + (\dot{d}(t)/h)N_2]\dot{x}(s)ds \leq \\ & \xi^T(t) \left( \frac{h-d(t)}{h} \Xi_{11}^T E_e^T H_2 [\mathcal{R}_{N_2}[\dot{d}(t)]]^{-1} H_2^T E_e \Xi_{11} + \right. \\ & \left. \frac{d(t)}{h} \Xi_{13}^T E_e^T H_1^T [\mathcal{R}_{N_1}[\dot{d}(t)]]^{-1} H_1 E_e \Xi_{13} \right) \xi(t) + \\ & \xi^T(t) \Phi_5 \xi(t), \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\mathcal{R}_{N_1}[\dot{d}(t)]$  和  $\mathcal{R}_{N_2}[\dot{d}(t)]$  定义见定理1. 由于  $\Xi_s \xi(t) = 0$ , 对任意矩阵  $F$ , 满足

$$\xi^T(t)(\Xi_s^T F^T + F \Xi_s)\xi(t) = 0. \quad (19)$$

整理式(16)~(19), 得

$$\dot{V}(x_t) \leq \xi^T(t) \bar{\Phi}_{[d(t), \dot{d}(t)]} \xi(t). \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} & \bar{\Phi}_{[d(t), \dot{d}(t)]} = \\ & \Phi_{[d(t), \dot{d}(t)]} + \frac{h-d(t)}{h} \Theta_1(\dot{d}(t)) + \frac{d(t)}{h} \Theta_2(\dot{d}(t)), \\ & \Theta_1(\dot{d}(t)) = \Xi_{11}^T E_e^T H_2 [\mathcal{R}_{N_2}[\dot{d}(t)]]^{-1} H_2^T E_e \Xi_{11}, \\ & \Theta_2(\dot{d}(t)) = \Xi_{13}^T E_e^T H_1^T [\mathcal{R}_{N_1}[\dot{d}(t)]]^{-1} H_1 E_e \Xi_{13}. \end{aligned}$$

$\bar{\Phi}_{[d(t), \dot{d}(t)]}$  是关于  $d(t)$ 、 $d^2(t)$  和  $\dot{d}(t)$  的非线性函数, 使用引理4, 非线性矩阵不等式  $\bar{\Phi}_{[d(t), \dot{d}(t)]} < 0$ , 与如下线性矩阵不等式等价:

$$\bar{\Phi}_{[d(t)=0, \dot{d}(t)]} + \Theta_1(\dot{d}(t)) < 0, \quad (21)$$

$$\bar{\Phi}_{[d(t)=h, \dot{d}(t)]} + \Theta_2(\dot{d}(t)) < 0, \quad (22)$$

$$-h^2 \Upsilon_0 + \bar{\Phi}_{[d(t)=0, \dot{d}(t)]} + \Theta_1(\dot{d}(t)) < 0. \quad (23)$$

使用Schur引理可知, 线性矩阵不等式(21)~(23)分别与(12)~(14)等价, 即如果线性矩阵不等式(12)~(14)成立, 则时滞系统(1)是渐近稳定的.  $\square$

**定理2** 对于系统(1), 给定时滞参数  $h$  和  $\mu$ , 时滞  $d(t)$  满足条件(2), 存在合适维度的正定矩阵  $P$ 、 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $R$ 、 $M_1$ 、 $M_2$ , 对称矩阵  $X_{11}$ 、 $X_{22}$ 、 $X_{33}$ 、 $Z_{11}$ 、 $Z_{22}$ 、 $Z_{33}$ , 任意矩阵  $X_{12}$ 、 $X_{13}$ 、 $X_{23}$ 、 $Z_{12}$ 、 $Z_{13}$ 、 $Z_{23}$ 、 $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$ 、 $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$ 、 $H_1$ 、 $H_2$ 、 $F$ , 满足线性矩阵不等式(8)和(9)以及

$$R - [\dot{d}(t)/h]M_1 > 0, \quad R + [\dot{d}(t)/h]M_2 > 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{[d(t)=0, \dot{d}(t)]} & \Xi_{11}^T E_e^T H_2 \\ * & -\mathcal{R}_{M_2}[\dot{d}(t)] \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{[d(t)=h, \dot{d}(t)]} & \Xi_{13}^T E_e^T H_1^T \\ * & -\mathcal{R}_{M_1}[\dot{d}(t)] \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} -h^2 \Upsilon_1 + \Pi_{[d(t)=0, \dot{d}(t)]} & \Xi_{11}^T E_e^T H_2 \\ * & -\mathcal{R}_{M_2}[\dot{d}(t)] \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

则系统是渐近稳定的. 其中

$$\Pi_{[d(t), \dot{d}(t)]} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Pi_1 + \Pi_2 + \text{Sym}\{F \Xi_s\},$$

$$\Pi_1 =$$

$$\begin{aligned} & d(t)(e_4^T M_1 e_4 - \dot{\delta}_d(t) e_5^T M_1 e_5) + h_d(t)(\dot{\delta}_d(t) \times \\ & e_5^T M_2 e_5 - e_6^T M_2 e_6) + \dot{d}(t) \Xi_{11}^T (2d(t)\mathcal{X} + \mathcal{G}_e) \Xi_{11} - \\ & \dot{d}(t) \Xi_{13}^T (2(h-d(t))\mathcal{Z} + \mathcal{D}_e) \Xi_{13} + \text{Sym}\{\Xi_{11}^T \times \\ & (d(t)\mathcal{X} + \mathcal{G}_e) \Xi_{12} + \Xi_{13}^T ((h-d(t))\mathcal{Z} + \mathcal{D}_e) \Xi_{14}\}, \end{aligned}$$

$$\Pi_2 =$$

$$- [(2h-d(t))/h] \Xi_{11}^T E_e^T \mathcal{R}_{M_1}[\dot{d}(t)] E_e \Xi_{11} -$$

$$[(h+d(t))/h] \Xi_{13}^T E_e^T \mathcal{R}_{M_2}[\dot{d}(t)] E_e \Xi_{13} -$$

$$\text{Sym}\left\{ \Xi_{11}^T E_e^T \left[ \frac{h-d(t)}{h} H_1 + \frac{d(t)}{h} H_2 \right] E_e \Xi_{13} \right\},$$

$$\Upsilon_1 = \Upsilon_0 + \text{Sym}\{ \Xi_{11}^T \mathcal{X} \Xi_{15} + \Xi_{13}^T \mathcal{Z} \Xi_{16} \},$$

$$R_{N_1} = R - (\dot{d}(t)/h)M_1, \quad R_{M_2} = R + (\dot{d}(t)/h)M_2,$$

$$\mathcal{R}_{M_1}[\dot{d}(t)] = \text{diag}\{R_{M_1}, 3R_{M_1}, 5R_{M_1}\},$$

$$\mathcal{R}_{N_2}[\dot{d}(t)] = \text{diag}\{R_{M_2}, 3R_{M_2}, 5R_{M_2}\},$$

$$\Xi_{15} = [e_4^T \quad \dot{\delta}_d(t) e_5^T \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$\Xi_{16} = [\dot{\delta}_d(t) e_5^T \quad e_6^T \quad 0 \quad 0]^T.$$

**证明** 对时滞系统(1)构造如下时滞乘积型Lyapunov泛函:

$$V(t) = V_o(t) + \mathcal{V}_{FM}(t), \quad (28)$$

其中  $V_o(t)$  和  $\mathcal{V}_{FM}(t)$  定义见定理1和命题2. 计算泛函  $\mathcal{V}_{FM}(t)$  的导数有

$$\dot{\mathcal{V}}_{FM}(t) = \xi^T(t) \Pi_1 \xi(t) + \dot{d}(t)(J_3(t) - J_4(t)). \quad (29)$$

其中:  $J_3(t)$  和  $J_4(t)$  定义见命题2,  $\Pi_1$  定义见定理2.

满足条件(24),使用引理1和引理2界定 $\dot{V}_0(t)$ 和 $\dot{V}_{FM}(t)$ 的积分项,有

$$\begin{aligned} & \dot{d}(t)(J_3(t) - J_4(t)) - h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds = \\ & - h \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s)[R - (\dot{d}(t)/h)M_1]\dot{x}(s)ds - \\ & h \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s)[R + (\dot{d}(t)/h)M_2]\dot{x}(s)ds \leq \\ & \xi^T(t) \left( \frac{h-d(t)}{h} \Xi_{11}^T E_e^T H_2 [\mathcal{R}_{M_2}[\dot{d}(t)]]^{-1} H_2^T E_e \Xi_{11} + \right. \\ & \left. \frac{d(t)}{h} \Xi_{13}^T E_e^T H_1^T [\mathcal{R}_{M_1}[\dot{d}(t)]]^{-1} H_1 E_e \Xi_{13} \right) \xi(t) + \\ & \xi^T(t) \Pi_2 \xi(t). \end{aligned} \tag{30}$$

结合式(16)、(19)、(29)和(30),并进行整理得

$$\dot{V}(x_t) \leq \xi^T(t) \bar{\Pi}_{[d(t), \dot{d}(t)]} \xi(t). \tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{[d(t), \dot{d}(t)]} = & \Pi_{[d(t), \dot{d}(t)]} + \frac{h-d(t)}{h} \Theta_3(\dot{d}(t)) + \frac{d(t)}{h} \Theta_4(\dot{d}(t)), \\ \Theta_3(\dot{d}(t)) = & \Xi_{11}^T E_e^T H_2 [\mathcal{R}_{M_2}[\dot{d}(t)]]^{-1} H_2^T E_e \Xi_{11}, \\ \Theta_4(\dot{d}(t)) = & \Xi_{13}^T E_e^T H_1^T [\mathcal{R}_{M_1}[\dot{d}(t)]]^{-1} H_1 E_e \Xi_{13}. \end{aligned}$$

$\bar{\Pi}_{[d(t), \dot{d}(t)]}$ 也是关于 $d(t)$ 、 $d^2(t)$ 和 $\dot{d}(t)$ 的非线性函数,使用引理4,若 $\Phi_{[d(t), \dot{d}(t)]} < 0$ 与下式等价:

$$\Pi_{[d(t)=0, \dot{d}(t)]} + \Theta_3(\dot{d}(t)) < 0, \tag{32}$$

$$\Pi_{[d(t)=h, \dot{d}(t)]} + \Theta_4(\dot{d}(t)) < 0, \tag{33}$$

$$-h^2 \Upsilon_1 + \Pi_{[d(t)=0, \dot{d}(t)]} + \Theta_3(\dot{d}(t)) < 0, \tag{34}$$

则使用Schur引理可知,线性矩阵不等式(32)~(34)分别与(25)~(27)等价,若条件(25)~(27)成立,则系统(1)是渐近稳定的. □

**注4** 基于自由矩阵的时滞乘积型Lyapunov泛函引入一系列自由矩阵,放松了所得的稳定条件,此外还考虑了更多的有效信息,如 $d^2(t)\alpha^T(t)\mathcal{X}\alpha(t)$ 、 $h_a^2(t)\beta^T(t)\mathcal{Z}\beta(t)$ 等,比基于Bessel-Legendre时滞乘积型Lyapunov泛函获得的稳定准则的保守性更小.

### 4 数值例子

**例1** 考虑时滞系统(1),满足如下矩阵参数:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

将定理1和定理2所得结果以及相关文献所得结果列于表1,同时,将求解相应线性矩阵不等式所用决策变量的数量(NoDVs)也列于表1.

由表1可见,本文所得的最大允许时滞上界比文献[7-8, 12-13, 19]更大,表明所提出的时滞型泛函相对于现有方法具有一定的优越性.

当 $\mu = 0.5$ 时,定理2确保系统稳定的时滞范围

表1 取不同 $\mu$ 时所得的最大时滞上界 $h$

方法	$\mu$				NoDVs
	0.1	0.2	0.5	0.8	
文献[12]	4.7036	3.8340	2.4204	2.1378	$10n^2 + 3n$
文献[13]	4.7883	4.0607	3.0557	2.6150	$65n^2 + 11n$
文献[19]	4.910	-	3.233	2.789	$54.5n^2 + 6.5n$
文献[8]	4.8441	4.1419	3.1171	2.6983	$70n^2 + 12n$
文献[7]	4.8297	4.1250	3.1555	2.7307	$114n^2 + 18n$
定理1	4.9383	4.2605	3.2959	2.8687	$79n^2 + 10n$
定理2	4.9428	4.2721	3.3259	2.9038	$247n^2 + 22n$

为 $h \in [0, 3.3259]$ ,为了验证系统的稳定性,给定初始条件

$$\begin{aligned} \phi(t) &= [1, -1]^T, \\ d(t) &= \frac{3.3259}{2} + \frac{3.3259}{2} \sin\left(\frac{1}{3.3259}t\right), \\ t &\in [-3.3259, 0], \end{aligned}$$

得到系统的状态轨迹如图1所示.对于给定条件,由图1可知系统(1)是稳定的.

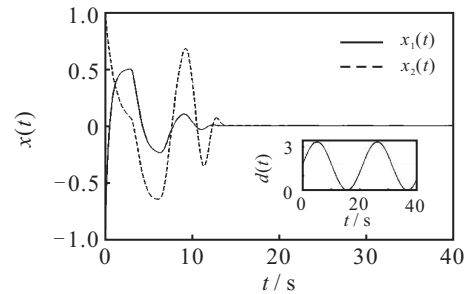


图1 例1的系统状态轨迹

近年来,时滞分段型Lyapunov泛函在降低系统保守性方面也有不少研究成果<sup>[21-22]</sup>,本文方法与之比较仍然具有优势.为便于讨论,分别取 $\mu = 0, \mu = 0.5, \mu = 0.9$ ,采用定理1与时滞分段的方法<sup>[21-22]</sup>对例1计算所得的最大时滞上界进行总结,结果如表2所示.由表2可见,定理1比文献[21]的完全时滞分段方法和文献[22]的时滞不均分段方法所得的时滞稳定裕度更大,表明定理1在减小结论保守性方面与文献[21-22]的方法相比更加有效.

由表2也可见,时滞分段方法随着时滞区间分段数量 $m$ 的增大,系统的保守性逐渐减小,但决策变量的数量NoDVs急剧增加,即计算复杂度急剧增加.因此,在选取 $m$ 时,需要考虑兼顾保守性和计算复杂度的问题.事实上,当 $m$ 大到一定程度时再增加 $m$ ,保守性改善不很明显<sup>[21]</sup>.另外,定理1的决策变量虽然比文献[21-22]( $m = 5$ )还多,这是由于综合考虑了系统

的状态信息和时滞信息,但是极大减小了保守性,特别地,当 $\mu = 0.5$ 时定理1所得时滞上界为3.295,相比文献[21]( $m = 5$ )改善了33.83%.

表2 取不同 $\mu$ 时所得的最大时滞上界 $h$

方法	$\mu$			NoDVs
	0.0	0.5	0.9	
文献[21]( $m = 2$ )	5.717	2.375	1.987	$11.5n^2 + 3.5n$
文献[22]( $m = 2$ )	5.821	-	2.109	$13.5n^2 + 5.5n$
文献[21]( $m = 3$ )	5.966	2.442	2.079	$17n^2 + 5n$
文献[22]( $m = 3$ )	5.904	-	2.217	$20n^2 + 8n$
文献[21]( $m = 5$ )	6.091	2.462	2.152	$28n^2 + 8n$
文献[22]( $m = 5$ )	6.025	-	2.468	$32n^2 + 13n$
定理1	6.169	3.295	2.776	$79n^2 + 10n$

例2 考虑时滞系统(1),满足如下矩阵参数:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

使用文献[7-8, 13, 19]的方法和定理1与定理2,对不同 $\mu$ 计算出最大容许时滞上界,结果如表3所示.

表3 取不同 $\mu$ 时所得的最大时滞上界 $h$

方法	$\mu$				NoDVs
	0.1	0.2	0.5	0.8	
文献[13]	7.1480	4.4660	2.3521	1.7682	$65n^2 + 11n$
文献[19]	7.230	4.556	2.509	1.940	$54.5n^2 + 6.5n$
文献[8]	7.1905	4.5275	2.4473	1.8562	$70n^2 + 12n$
文献[7]	7.1765	4.5438	2.4963	1.9225	$114n^2 + 18n$
定理1	7.3325	4.6719	2.6369	2.0459	$79n^2 + 10n$
定理2	7.3723	4.7254	2.6872	2.0840	$247n^2 + 22n$

由表3可见,使用所提出方法得到的结果优于文献[7-8, 13, 19]所得结果,表明了所提出方法的有效性.

类似例1,当 $\mu = 0.5$ 时, $h = 2.6872$ ,给定初始条件

$$\begin{aligned} \phi(t) &= [2, -1]^T, \\ d(t) &= \frac{2.6872}{2} + \frac{2.6872}{2} \sin\left(\frac{1}{2.6872}t\right), \\ t &\in [-2.6872, 0], \end{aligned}$$

得到系统的状态轨迹如图2所示,可知系统(1)是稳定的.

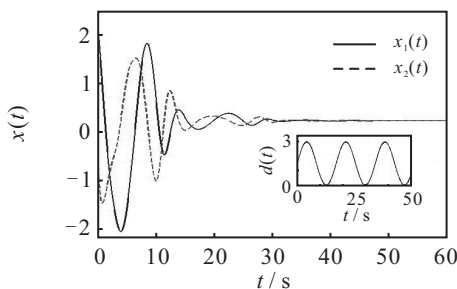


图2 例2的系统状态轨迹

就所得判据的计算复杂度而言,由表1和表3可知,定理1使用决策变量的数量为 $79n^2 + 10n$ ,文献[7]使用决策变量的数量为 $114n^2 + 18n$ ,表明定理1比文献[7]的计算复杂度更低.另外,虽然定理1使用决策变量的数量比文献[8, 12-13, 19]更多,但所得结果有了较大改善.例如,当 $\mu = 0.8$ 时,定理1对例1的计算结果为2.8687,相对于文献[12]结果改善了34.18%.为了进一步降低所得结论的保守性,定理2引入一系列松弛变量(如 $X_{ij}, Z_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ ),使决策变量的数量达到 $247n^2 + 22n$ ,增加了计算的复杂度.但所得结论的保守性比定理1更小,这验证了注4的有效性,即定理2是以增加计算复杂度为代价来降低所得结论保守性的.

另外,为了验证注2的有效性,在定理1(定理2)中令 $\mathcal{V}_{BL}(t) = 0(\mathcal{V}_{FM}(t) = 0)$ ,对于例1和例2,当 $\mu = 0.8$ 时,采用相应的稳定判据计算所得最大时滞上界分别为2.7607和1.9854.由所得结果知, $\mathcal{V}_{BL}(t) = 0$ 和 $\mathcal{V}_{FM}(t) = 0$ 在减小保守性方面具有重要作用.

## 5 结论

针对时变时滞系统的稳定性问题,利用提出的时滞乘积型Lyapunov泛函和积分不等式技术,推导出两个新的时滞依赖稳定条件,并通过两个数值例子验证了所提出方法的有效性和优越性.本文提出的时滞乘积型Lyapunov泛函 $\mathcal{V}_{BL}(t)$ 和 $\mathcal{V}_{FM}(t)$ ,也可以推广到其他类型的时变时滞系统,如神经网络、基因调控网络、网络控制系统、模糊控制系统等.

## 参考文献(References)

- [1] Gu K, Kharitonov V L, Chen Jie. Stability of time-delay systems[M]. Basel: Birkhäuser, 2003: 53-68.
- [2] He Y, Wang Q G, Lin C, et al. Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems[J]. International Journal Robust and Nonlinear Control, 2005, 15(18): 923-933.
- [3] 肖伸平, 练红海, 陈刚, 等. 时变时滞神经网络的时滞相关鲁棒稳定性和耗散性分析[J]. 控制与决策, 2017, 32(6): 1084-1090.  
(Xiao S P, Lian H H, Chen G, et al. Delay-dependent robust stability and dissipativity analysis of neural networks with time-varying delays[J]. Control and Decision, 2017, 32(6): 1084-1090.)
- [4] Zhang X M, Han Q L. A delay decomposition approach to delay-dependent stability for linear systems with time-varying delays[J]. International Journal Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(7): 1922-1930.
- [5] Park P G, Lee W I, Lee S Y. Auxiliary function-based

- integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems[J]. *Journal of Franklin Institute*, 2015, 352(4): 1378-1396.
- [6] Xu H T, Zhang C K, Jian L, et al. Stability analysis of linear systems with two additive time-varying delays via delay-product-type Lyapunov functional[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 45: 955-964.
- [7] Lee T H, Park J H. A novel Lyapunov functional for stability of time-varying delay systems via matrix-refined-function[J]. *Automatica*, 2017, 80: 239-242.
- [8] Lee T H, Park J H. Improved stability conditions of time-varying delay systems based on new Lyapunov functionals[J]. *Journal of Franklin Institute*, 2018, 355(3): 1176-1191.
- [9] Fridman E, Shaked U. Delay dependent stability and  $H_\infty$  control: Constant and time-varying delays[J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(1): 48-60.
- [10] Wu M, He Y, She J H. Stability analysis and robust control of time-delay system[M]. New York: Springer-Verlag, 2010: 112-124.
- [11] 练红海, 肖伸平, 陈刚, 等. 基于自由矩阵不等式方法的中立型时滞系统稳定判据[J]. *湖南工业大学学报*, 2016, 30(5): 37-40.  
(Lian H H, Xiao S P, Chen G, et al. Stability criteria for neutral delay systems based on free matrix inequalities[J]. *Journal of Hunan University of Technology*, 2016, 30(5): 37-40.)
- [12] Seuret A, Couaisbaut F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2860-2866.
- [13] Zeng H B, He Y, Wu M, et al. Free-matrix-based integral inequality for stability analysis of systems with time-varying delay[J]. *IEEE Transaction Automatic Control*, 2015, 60(10): 2768-2772.
- [14] Wang W, Zeng H B, Xiao S P, et al. New stability conditions of neutral delay systems via free-matrix-based integral inequality[J]. *Journal Nonlinear Science and Application*, 2017, 15(10): 1919-1926.
- [15] Zeng H B, He Y, Wu M, et al. New results on stability analysis for systems with discrete distributed delay[J]. *Automatica*, 2015, 60: 189-192.
- [16] Zhang C K, He Y, Jiang L. Stability analysis of systems with time-varying delay via relaxed integral inequalities[J]. *Systems and Control Letters*, 2016, 92: 52-61.
- [17] Seuret A, Couaisbaut F. Stability of linear systems with time-varying delays using Bessel-Legendre inequalities[J]. *IEEE Transaction Automatic Control*, 2018, 63(1): 225-232.
- [18] Park P G, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 235-238.
- [19] Zhang X M, Han Q L. An improved reciprocally convex inequality and an augmented Lyapunov-Krasovskii functional for stability of linear systems with time-varying delay[J]. *Automatica*, 2017, 84: 221-226.
- [20] 张合新, 惠俊军, 周鑫, 等. 基于时滞分割法的区间变时滞不确定系统鲁棒稳定性新判据[J]. *控制与决策*, 2014, 29(5): 907-912.  
(Zhang H X, Hui J J, Zhou X, et al. New robust stability criteria for uncertain system with interval time-varying delay based on delay-partitioning approach[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(5): 907-912.)
- [21] Zeng H B, He Y, Wu M, et al. Less conservative results on stability for linear systems with a time-varying delay[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2013, 34(6): 670-679.
- [22] 张俊, 罗大庸, 孙妙平. 一种基于时滞区间不均分方法的变时延网络控制系统的新稳定性条件[J]. *电子学报*, 2016, 44(1): 54-59.  
(Zhang J, Luo D Y, Sun M P. A new stability condition for networked control system with time-varying delay based on time delay uneven-partitioning approach[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2016, 44(1): 54-59.)

### 作者简介

练红海(1990—), 男, 硕士, 从事鲁棒控制、采样控制、网络控制的研究, E-mail: 1132830550@qq.com;

肖伸平(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、过程控制、智能控制、电力系统稳定性等研究, E-mail: xsph\_519@163.com;

陈刚(1977—), 男, 副教授, 从事鲁棒控制、时滞控制和网络控制等研究, E-mail: chengang@hut.edu.cn;

张晓虎(1978—), 男, 讲师, 从事智能控制、优化控制等研究, E-mail: zxh1252@163.com;

邓鹏(1985—), 男, 讲师, 从事时滞控制、采样控制和网络控制等研究, E-mail: 253402957@qq.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)