零售商多种价格策略下的最优订购模型

孟志青， 牧云志， 徐蕾艳， 郑敏超

引用本文:
孟志青, 牧云志, 徐蕾艳, 等. 零售商多种价格策略下的最优订购模型[J]. 控制与决策, 2020, 35(5): 1231-1239.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1257

不同政府目标决策下具有奖惩机制的绿色供应链模型
Green supply chain model with premium and penalty mechanism under different government goals
控制与决策. 2020, 35(2): 427-435 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0664

第 35 卷 第 5 期
2020 年 5 月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.35 No.5
May 2020

文章编号: 1001-0920(2020)05-1231-09 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1257

零售商多种价格策略下的最优订购模型

孟志青[1†], 牧云志[1,2], 徐蕾艳[1,3], 郑敏超[1]

(1. 浙江工业大学 管理学院，杭州 310023；2. 浙江理工大学 科技与艺术学院，浙江 绍兴 312369；3. 浙江财经大学 教务处，杭州 310018)

摘　要: 同种产品以多种价格同时销售(多种价格策略)是零售商常用的折扣策略,为了找到多种价格策略下零售商实现期望利润最大化的订购量,对经典报童模型进行拓展,分别从无订购量约束和订购量约束两方面进行研究和讨论. 在多种价格对应消费者需求不确定情况下建立一个新的报童模型,使用拉格朗日乘子法求解订购量约束问题,并设计近似最优总订购量的求解算法. 数值分析结果表明: 多种价格策略优于单一价格策略,订购量约束对零售商多种价格策略的选择会产生影响;在有订购量约束情况下,零售商的多种价格策略还会受到价格折扣系数、需求差异性的影响.

关键词: 报童问题；最优订购策略；拉格朗日乘子法；多种价格；订购量约束

中图分类号: F272；C934　　　**文献标志码:** A

Optimal ordering strategy for retailers under multiple-price strategy

MENG Zhi-qing[1†], *MU Yun-zhi*[1,2], *XU Lei-yan*[1,3], *ZHENG Min-chao*[1]

(1. School of Management，Zhejiang University of Technology，Hangzhou 310023，China；2. Keyi College of Zhejiang Sci-Tech University，Shaoxing 312369，China；3. Academic Affairs Office，Zhejiang University of Finance and Economics，Hangzhou 310018，China)

Abstract: It is a popular discount strategy for retailers to sell the same product at multiple prices simultaneously (multiple-price strategy). In order to determine the order quantity of the retailer such that the expected profit is maximized, the classical newsboy problem is extended, and a new newsboy model is established wherein multiple prices correspond to uncertain consumer demand. Two aspects of with and without order quantity constraint are discussed respectively. The Lagrangian multiplier method is applied to solve the order quantity constraint problem, and an algorithm for solving the approximate optimal total order quantity is designed. Numerical results show that the multiple-price strategy is better than a single price strategy, and order quantity constraint has an impact on the choice of the retailers' multiple-price strategy. The retailer's multiple-price strategy is also affected by the price discount coefficient and the difference in demand in the case of order quantity constraint.

Keywords: newsboy problem；optimal ordering strategy；Lagrangian multiplier method；multiple-price；order quantity constraint

0 引　言

多种价格同时销售的模式在实践中已得到广泛应用. 无论是在线销售平台还是线下实体店,消费者经常可看到零售商采用多种价格同时销售一种产品的促销信息. 例如,天猫(Tmall.com)、京东(JD.com)、当当网(Dangdang.com)、亚马逊(Amazon.cn)等在线平台上的许多产品(食品、日用品、化妆品、保健品、办公用品、服装、图书等)采用多种价格同时销售的模式,星巴克的咖啡、麦当劳的甜筒、共享按摩椅的使用时间等线下产品也在采用多种价格同时销售的模式. 消费者可以按常规价格(全价)购买一个单位产品,也可以按折扣价格同时购买多个单位产品,将多种价格同时销售的模式称之为多种价格策略.

实践证明多种价格策略可以有效地增加消费者的购买量和零售商的利润,采用多种价格策略的零售商在订购产品时会比单一价格时增加一定的订购量,但是,已有的订购模型大都是针对单一零售价建立的,获得的订购策略不适合多种价格策略的订购问题. 因此,有必要研究建立多种价格策略下的最优订购模型,这对于指导零售商的多种价格策略下的订购

收稿日期: 2018-09-14；**修回日期:** 2018-11-20.
基金项目: 国家自然科学基金项目(11871434).
责任编委: 王光臣.
†通讯作者. E-mail: mengzhiqing@zjut.edu.cn.

策略具有重要的理论意义和实际价值.

在供应链中,供应商提供多种数量折扣价格对零售商最优订购策略影响的研究已经很多,相关代表性研究可以参见文献[1-9],但这些研究建立的零售商订购模型是针对供应商提供多种订购价格的情况,并不适合多种价格策略下零售商的订购问题.

目前,类似关于零售商采用多种价格策略时的订购问题的研究,主要分析不同销售阶段采用不同销售价格的订购问题. Khouja[10] 研究了零售商实现期望利润最大化的渐近式多折扣报童模型的订购策略. Khouja[11] 进一步考虑供应商的影响,构建了以期望利润最大化为目标,供应商提供全数量折扣、零售商提供渐近式的多折扣报童模型. Feng 等[12] 建立了产品价格随时间单调变化且服从泊松分布的价格敏感型需求的动态规划模型,在模型中根据销售剩余时间和库存确定最佳价格转换时间以实现期望收益最大化. 王丽颖等[13] 研究了零售企业将商品在一级市场销售之后,将剩余商品以折扣价格在二级市场上继续销售的订购模型. 上述研究没有考虑零售商的约束问题, Khouja 等[14] 在这方面做出了重要努力,他们以期望利润最大化为目标,提出并解决了一个多产品的报童问题,在存储或预算约束下通过多折扣销售过剩产品. Moon 等[15] 以期望利润最大化为目标,分别建立剩余库存采用渐近式的多折扣、多种升级或折扣与升级的组合方式进行销售的报童模型,并且扩展到存储约束或预算约束的多产品报童问题. 上述研究为本文的研究奠定了比较好的研究基础,但是这些研究主要考虑不同销售阶段采用不同零售价的模型,没有考虑本文多种价格同时销售的研究情况,因此以上研究结果并不适合零售商采用多种价格策略下产品有订购量约束的订购问题.

Lu 等[16] 对多种价格策略问题的研究做出了重要贡献,他们基于需求不确定的假定,分析了采用双重价格策略的零售商如何确定最优定价和库存策略以实现期望利润最大化. 诚然, 文献 [16] 对于多种价格策略下零售商最优订购问题的研究具有重要的启发意义,但是该研究仅考虑了两种价格情况, 并没有考虑订购量约束条件. 为此, 在文献 [16] 的基础上, 本文考虑订购量约束, 研究更一般化的数量折扣方式(零售商同时采用多种销售价格), 得到为实现利润最大化目标的零售商最优订购策略, 并分析多种价格策略相较于单一价格策略的优势. 本文所提的多种价格同时销售的零售商最优订购策略能够在一定程度上填补多种价格策略研究的空白, 是对现有收益管理研究的有益补充; 本文从无约束和有约束两种情况下分析同一阶段多种销售价格的问题, 对相应的结果进行对比分析, 能更加突出所得结论和贴近零售商运行现实. 论文的主要贡献是: 建立了在多种销售价格下一个新的报童模型, 获得了采用多价格策略销售同一种产品的近似最优订购算法.

1 模型描述与求解

1.1 无约束期望利润订购模型

零售商基于对消费者差异性价格承受能力的细分, 通常会采用多种价格策略的促销方式, 吸引更多的潜在消费者, 增加销量, 同时增加产品的订购量. 在整个销售期内, 零售商采用 n 种不同的数量折扣价格 ($p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$) 同时进行产品销售, p_i 为同时购买 i 单位产品时的单价 (p_1 为产品的正常价格). 设 $p_i = (1-(i-1)d)p_1, i = 1, 2, \ldots, n$. d 为折扣系数, $0 < d < 1$; p_i 对应的需求为随机变量 ξ_i, 需求的概率密度函数为 $f_i(\xi_i)$; 累计分布函数为 $F_i(\xi_i)$; p_i 对应的订购量 q_i 为决策变量, $i = 1, 2, \ldots, n$, 总订购量为 $\sum_{i=1}^{n} q_i$; 单位产品订购成本为 c, 在销售期初零售商决定订购量. 在销售期内, 如果出现产品缺货, 则会导致缺货损失, s 为单位产品缺货损失费. 销售期结束后, 如有剩余产品, 则以低价 p_h 处理 (低价销售或被供应商回收), $p_h < c$. 根据经典报童模型, 零售商的利润为

$$\pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \min(\xi_i, q_i) - c\sum_{i=1}^{n} q_i + \sum_{i=1}^{n} p_h (q_i - \xi_i)^+ - \sum_{i=1}^{n} s(\xi_i - q_i)^+. \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$.

零售商的期望利润函数为

$$\mathrm{E}[\pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\xi})] = \sum_{i=1}^{n} \Big[(p_i + s)\int_{q_i}^{+\infty} q_i f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i - s\int_{q_i}^{+\infty} \xi_i f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i + (p_i - p_h)\int_{0}^{q_i} \xi_i f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i + p_h\int_{0}^{q_i} q_i f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i - cq_i\Big]. \quad (2)$$

其中 p_i 价格下的期望利润为

$$\mathrm{E}[\pi_i(q_i)] = (p_i + s)\int_{q_i}^{+\infty} q_i f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i - s\int_{q_i}^{+\infty} \xi_i f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i + (p_i - p_h)\int_{0}^{q_i} \xi_i f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i + p_h\int_{0}^{q_i} q_i f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i - cq_i. \quad (3)$$

建立期望利润最大化的订购模型

$$\begin{aligned}&\max_{q}\ \mathrm{E}[\pi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi})]=\\&\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[\pi_i(q_i)]=\\&\sum_{i=1}^{n}\Big[(p_i+s)\int_{q_i}^{+\infty}q_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i-\\&s\int_{q_i}^{+\infty}\xi_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i+(p_i-p_h)\int_0^{q_i}\xi_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i+\\&p_h\int_0^{q_i}q_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i-cq_i\Big].\end{aligned}\tag{4}$$

计算期望利润函数(4)的一阶条件和二阶条件,易知,式(4)是关于订购量q_i的严格凹函数,由一阶条件等于0,得到p_i对应的最优订购量q_i^*满足以下条件:

$$\int_0^{q_i^*}f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i=F_i(q_i^*)=\frac{p_i+s-c}{p_i+s-p_h}.\tag{5}$$

综上,得到无订购量约束情况下使零售商期望利润最大化的最优订购策略,结论如下.

定理1 在无订购量约束情况下,以期望利润最大化为目标的零售商的最优总订购量为

$$Q_N^*=\sum_{i=1}^{n}q_i^*=\sum_{i=1}^{n}F_i^{-1}\Big(\frac{p_i+s-c}{p_i+s-p_h}\Big).\tag{6}$$

当$n=1$时,式(6)即为零售商采用单一价格策略时的最优总订购量,此时与经典报童模型的结论相同.

证明 计算期望利润函数式(4)的一阶条件

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathrm{E}[\pi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi})]}{\partial q_i}=\frac{\partial\mathrm{E}[\pi(q_i)]}{\partial q_i}=\\&(p_h-p_i-s)F_i(q_i)+p_i+s-c,\end{aligned}$$

二阶条件

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\mathrm{E}[\pi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi})]}{\partial q_i^2}=\frac{\partial^2\mathrm{E}[\pi(q_i)]}{\partial q_i^2}=\\&(p_h-p_i-s)f_i(q_i)<0.\end{aligned}$$

由于$f_i(q_i)>0$, $p_h-p_i-s<0$,期望利润函数的二阶条件严格小于0,因此式(4)是关于订购量q_i的严格凹函数. 由一阶条件等于0,可得p_i对应的最优订购量q_i^*满足以下条件:

$$\int_0^{q_i^*}f_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i=F_i(q_i^*)=\frac{p_i+s-c}{p_i+s-p_h}.$$

因此,得到无订购量约束情况下使零售商期望利润最大化的最优订购策略

$$Q_N^*=\sum_{i=1}^{n}q_i^*=\sum_{i=1}^{n}F_i^{-1}\Big(\frac{p_i+s-c}{p_i+s-p_h}\Big).\qquad\square$$

1.2 考虑有订购量约束的期望利润订购模型

由于零售商运营资金的限制,其订购量不可能任意放大,零售商在订购决策中考虑订购量约束的情况比较符合实际. 现在分析零售商在各种折扣零售价$p_i(i=1,2,\ldots,n)$下的订购量约束问题,在式(4)的基础上要求各种零售价p_i下总订购量满足$\sum\limits_{i=1}^{n}q_i\leqslant\bar{a}$,其中$\bar{a}$表示各种价格$p_i$下给定的最大订购总量.

订购模型为

$$\begin{aligned}&\max_{q}\ \mathrm{E}[\pi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi})]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[\pi_i(q_i)]=\\&\sum_{i=1}^{n}\Big[(p_i+s)\int_{q_i}^{+\infty}q_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i-\\&\int_{q_i}^{+\infty}\xi_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i+(p_i-p_h)\int_0^{q_i}\xi_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i+\\&p_h\int_0^{q_i}q_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i-cq_i\Big];\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n}q_i\leqslant\bar{a}.\end{aligned}\tag{7}$$

订购模型(7)的目标函数是关于订购量q_i的严格凹函数,为了应用拉格朗日乘子法,将带有不等式约束条件的期望利润最大化的订购模型转化为仅含等式的情形进行求解,式(7)变为

$$\begin{aligned}&\max_{q}\ \mathrm{E}[\pi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi})]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[\pi_i(q_i)];\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n}q_i=a.\end{aligned}\tag{8}$$

上述模型对应的拉格朗日乘子函数

$$\begin{aligned}&L(\boldsymbol{q},\lambda)=\\&\sum_{i=1}^{n}\Big[(p_i+s)\int_{q_i}^{+\infty}q_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i-\\&s\int_{q_i}^{+\infty}\xi_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i+(p_i-p_h)\int_0^{q_i}\xi_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i+\\&p_h\int_0^{q_i}q_if_i(\xi_i)\mathrm{d}\xi_i-cq_i\Big]+\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}q_i-a\Big),\end{aligned}$$

其中a是待定参数. 求L关于q_i的一阶偏导数等于0,可得p_i对应的最优订购量q_i^*为

$$q_i^*=F_i^{-1}\Big(\frac{p_i+s-c+\lambda^*}{p_i+s-p_h}\Big),\ i=1,2,\ldots,n,\tag{9}$$

其中λ^*是最优拉格朗日乘子. 式(9)不含a.

综上,得到有订购量约束情况下使零售商期望利润最大化的最优订购策略,有以下结论.

定理2 在订购量约束情况下,零售商的最优总订购量为

$$Q^*(\lambda^*)=\sum_{i=1}^{n}q_i^*=\sum_{i=1}^{n}F_i^{-1}\Big(\frac{p_i+s-c+\lambda^*}{p_i+s-p_h}\Big),\tag{10}$$

其中最优拉格朗日乘子λ^*应满足$c-p_i-s\leqslant\lambda^*\leqslant c-p_h,\ i=1,2,\ldots,n.$

证明 求拉格朗日乘子函数L关于q_i的一阶偏

导数

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\lambda)}{\partial q_i}=(p_h-p_i-s)F_i(q_i)+p_i+s-c+\lambda.$$

式(7)的目标函数是关于q_i的严格凹函数,由一阶条件等于0,可得p_i对应的最优订购量q_i^*为

$$q_i^*=F_i^{-1}\Big(\frac{p_i+s-c+\lambda^*}{p_i+s-p_h}\Big),\ i=1,2,\ldots,n,$$

其中λ^*是最优拉格朗日乘子. 因此,得到订购量约束情况下使零售商期望利润最大化的最优订购策略

$$Q^*(\lambda^*)=\sum_{i=1}^{n}q_i^*=\sum_{i=1}^{n}F_i^{-1}\Big(\frac{p_i+s-c+\lambda^*}{p_i+s-p_h}\Big).$$

由于$0\leqslant F_i(q_i)\leqslant 1$,可得$c-p_i-s\leqslant\lambda^*\leqslant c-p_h$. □

注1 定理2说明,如果将订购总量a看成是参数,在实际计算中,按式(10)取 $a:=Q^*(\lambda^*)=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^*$,总订购量按式(10)计算,以保证零售商获得最大利润,因此将式(10)称为最优总订购量. 如果最大订购量$\bar{a}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^*$,则零售商应按式(10)订购,此时式(9)是(7)的最优订购量. 如果$\bar{a}<\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^*$,则零售商按给定的订购总量$\bar{a}$订购,但这时并不是最优总订购量,此时式(9)不是(7)的最优订购量.

推论1 当$\lambda^*=0$时,退化为无约束问题的最优总订购量.

推论2 随着单位产品订购成本c的增加,零售商的最优总订购量和期望利润均减少.

将$p_i=(1-(i-1)d)p_1$代入式(7)的目标函数,易知期望利润关于d的一阶导数小于0,于是有以下结论.

推论3 当$n>1$时,随着折扣系数d的增加,零售商的期望利润逐渐减少.

零售商的最优总订购量Q^*是关于λ的函数,λ的取值会影响Q^*,本文设计了求解最优订购策略的近似算法.

算法1 近似最优总订购量$\tilde{Q}^*$的求解算法.

初始化:确定参数初始值$\bar{a},p_i,c,s,p_h,\mu_i,\sigma_i$.

step 1: 确定拉格朗日乘子λ的取值区间,设$\lambda_{\min}=\max\limits_i\{c-p_i-s\}$,$\lambda_{\max}=c-p_h$,则$\lambda_{\min}\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{\max}$.

step 2: 在λ的取值区间内均匀地选取$M+1$个值,设$\Delta\lambda=(\lambda_{\max}-\lambda_{\min})/M$,将$\lambda$的取值区间划分成长度为$\Delta\lambda$的$M$个子区间,$\lambda^{(k)}$取值为

$$\lambda^{(k)}=\begin{cases}\lambda_{\min}+\varepsilon,\ k=0;\\ \lambda_{\min}+k\Delta\lambda,\ k=1,2,\ldots,M-1;\\ \lambda_{\max}-\varepsilon,\ k=M.\end{cases}$$

由于λ取值区间两端值的特殊性,零售商的最优总订购量在$\lambda=\lambda_{\min}$和$\lambda=\lambda_{\max}$处无法求解,这里取一个比较小的正数ε,对两端进行处理,即$k=0$和$k=M$时的两种情况.

step 3: 将$\lambda^{(k)}$代入式(9)计算$q_i^k,i=1,2,\ldots,n,k=0,1,\ldots,M$,计算总订购量$\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^k,k=0,1,\ldots,M$.

step 4: 确定拉格朗日乘子的近似最优值$\tilde{\lambda}^*$,寻找最接近$\bar{a}$的$\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^k,k=0,1,\ldots,M$,$\Big|\bar{a}-\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^{k^*}\Big|=\max\limits_k\Big|\bar{a}-\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^k\Big|$,则$\tilde{\lambda}^*=\lambda^{k^*}$.

step 5: 计算订购量约束情况下零售商的近似最优总订购量$\tilde{Q}^*$和相应的期望利润$\tilde{\mathrm{E}}^*$,比较$\bar{a}$与$\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^{k^*}$.

当$\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^{k^*}\leqslant\bar{a}$,则近似最优总订购量为$\tilde{Q}^*=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i^{k^*}$,将$q_i^{k^*}$代入式(7)的目标函数,计算零售商的期望利润

$$\tilde{\mathrm{E}}^*=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[\pi_i(q_i^{k^*})].$$

当$\sum\limits_{i=1}^{n}q^{k^*}>\bar{a}$,根据前文对定理2的说明,取总订购量为$\bar{a}$,若$\sum\limits_{i=1}^{n-j}q_i^{k^*}<\bar{a}<\sum\limits_{i=1}^{n-j+1}q_i^{k^*},j=1,2,\ldots,n$,则零售商的期望利润为

$$\tilde{\mathrm{E}}^*=\sum_{i=1}^{n-j}\mathrm{E}[\pi_i(q_i^{k^*})]+\mathrm{E}\Big\{\pi_{n-j+1}\Big[q_{n-j+1}^{(k^*)}-\Big(\sum_{i=1}^{n-j+1}q_i^{k^*}-\bar{a}\Big)\Big]\Big\}.$$

为了验证报童扩展模型的有效性,对比无订购量约束和订购量约束模型的求解结果,下文将给出数值例子.

2 数值分析

通过数值例子讨论零售商采用n种价格同时销售一种产品,即零售商采用多种价格策略时,比较无订购量约束和有订购量约束情况下的最优订购策略和相应的期望利润,并通过灵敏度分析讨论单位订购成本、折扣系数、需求差异性对零售商多种价格策略的影响. 本部分将分别计算$n=1\sim 5$这几种情况下的结果,其中$n=1$表示零售商采用一种价格销售产品,即零售商采用单一价格策略,可视为多种价格策略的一个特例.

为使数值分析更符合实际,先对采用多种价格策

略的线上和线下零售商进行调研,主要了解一些食品、日用品的销售情况,在此基础上,设置参数条件和初始参数值.

2.1　参数设置

数值计算时价格和成本参数应满足以下条件.

条件1): $0 < \frac{p_i - c}{p_i} < 1, 0 \leqslant \frac{p_i + s - c}{p_i + s - p_h} \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

条件2): $i(p_i - c) \leqslant j(p_j - c), i < j, p_i > p_j$;

条件3): $ip_i \leqslant jp_j, i < j, p_i > p_j$.

产品的销售单价p_i应大于单位订购成本c,显然有$0 < \frac{p_i - c}{p_i} < 1$;由于$0 \leqslant F_i(q_i) \leqslant 1$,根据式(5),可得$0 \leqslant \frac{p_i + s - c}{p_i + s - p_h} \leqslant 1$.

零售商采用多种价格策略的目的是为了增加销量获得更多的利润,当$i < j, p_i > p_j$时,零售商以较优惠的单价p_j同时销售j单位产品所获得的利润应不低于单价p_i同时销售i单位产品所获得的利润,即$i(p_i - c) \leqslant j(p_j - c)$,否则零售商不会考虑低价$p_j$销售产品.

消费者购买产品时希望能减少支出,同时又希望购买到更多的产品,当$i < j, p_i > p_j$时,消费者以较优惠的单价p_j同时购买j单位产品的支出应大于以单价p_i同时购买i单位产品的支出,即满足$ip_i \leqslant jp_j$,否则单价p_i的需求量为0,零售商也不会考虑以高价p_i销售产品.

在满足以上3个条件的基础上,假设产品在不同价格$p_i(p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n)$销售时需求服从正态分布,均值为$\mu_i$,标准差为$\sigma_i$,将价格和订购成本等参数进行标准化处理,正常价格$p_1$标准化为1,单位产品订购成本$c = 0.3$,折扣系数为$d = 0.05$,处理价格$p_h = 0.1$,单位产品缺货损失费$s = 0.2$,其他相关参数设置见表1.

表1　数值计算的初始参数

n	μ_i	σ_i	p_i
1	400	40	1
2	(200, 400)	(20, 40)	(1, 0.95)
3	(160, 300, 400)	(16, 30, 40)	(1, 0.95, 0.9)
4	(120, 200, 350, 450)	(12, 20, 35, 45)	(1, 0.95, 0.9, 0.85)
5	(100, 200, 300, 400, 500)	(10, 20, 30, 40, 50)	(1, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8)

2.2　最优订购策略

采用2.1节中的初始参数值,订购量约束条件中给定的最大总订购量$\bar{a} = 1\,200$,运用近似最优总订购量的求解算法计算在有订购量约束情况下零售商的最优订购策略和期望利润. 图1和图2分别反映拉格朗日乘子λ在其取值范围$\lambda_{\min} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max}$内,均匀选取近100个值,计算零售商的近似最优总订购量和期望利润. 在图1和图2中: ★表示有订购量约束时,近似最优拉格朗日乘子$\tilde{\lambda}^*$对应的近似最优总订购量存在和期望利润; ■表示无订购量约束时,对应的最优总订购量和期望利润. 订购量约束时,图1中寻找最接近$\bar{a}$的订购量,对应的横坐标即为$\tilde{\lambda}^*$,然后根据近似算法,计算零售商的近似最优总订购量和期望利润. 根据推论1,当$\lambda^* = 0$时,退化为无约束问题,观察图2易知此处对应的期望利润最大. 相应地,可以得到图1中的最优总订购量. 表2分别对比了无订购量约束和有订购量约束情况下的结果.

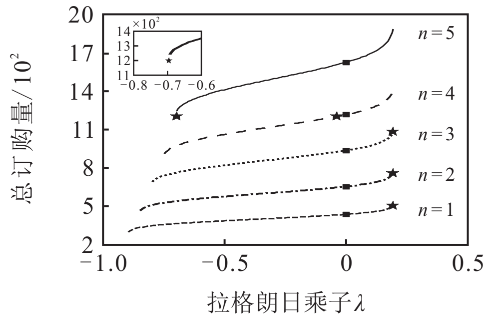


图1　零售商的总订购量

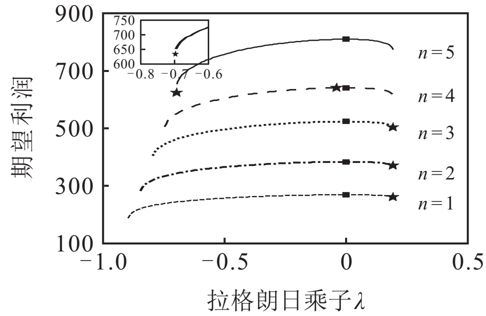


图2　零售商的期望利润

表2　无订购量约束与有订购量约束的结果对比

n	无订购量约束				有订购量约束			
	λ^*	最优总订购量	订购成本	期望利润	$\tilde{\lambda}^*$	近似最优总订购量	订购成本	期望利润
1	0	436.34	130.90	268.38	0.195 0	504.34	151.30	259.07
2	0	653.21	195.96	382.78	0.195 0	755.88	226.76	368.73
3	0	934.48	280.35	522.59	0.195 0	1 082.55	324.77	502.35
4	0	1 214.09	364.23	640.17	−0.037 5	1 199.82	359.95	639.91
5	0	1 622.28	486.68	808.62	−0.695 0	1 200.00	360.00	623.00

随着多种价格策略销售模式的应用,产品的订购量和期望利润有了很大的提高,由此导致零售商将多种价格策略作为经常使用的折扣策略,从经济运行的实际反映了报童扩展模型的有效性. 观察图1的总订购量曲线和图2的期望利润曲线的右端和左端,零售商不会盲目增加订购量,亦不会盲目减少订购量. 可以发现: $n > 1$ 的多种价格策略优于单一价格策略 ($n = 1$),但在有订购量约束情况下,为了增加收益,零售商不能盲目增大 n,如图1中 $n = 4$ 时的近似最优总订购量与无订购量约束时最优总订购量最为接近,对应图2以及表2中的 $n = 4$ 时的期望利润高于 $n = 5$ 时的期望利润. 这意味着存在订购量约束时,零售商采用多种价格策略时,要控制价格的数量 n,并不是 n 越大对零售商越有利. 将 $n = 5$ 的近似最优总订购量和相应的期望利润局部放大,发现用五角星标记的近似最优总订购量和期望利润分别低于总订购量曲线和利润曲线. 这说明存在订购量约束时,最优订货策略可能无法实现,这与文献[17]的描述一致.

表2对比了无订购量约束和有订购量约束的结果,无订购量约束时的期望利润高于有订购量约束时的期望利润,当 $n < 4$ 时,订购量约束时的近似最优总订购量大于无约束时的最优总订购量;当 $n \geqslant 4$ 时,订购量约束时的近似最优总订购量小于无约束时的最优总订购量.

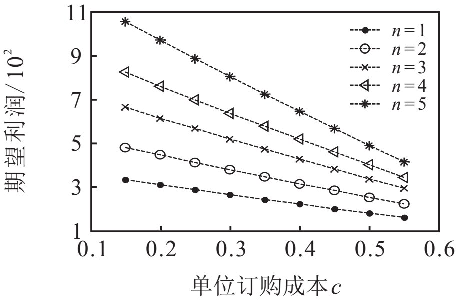
有订购量约束与无订购量约束情况下零售商的最优订购策略的差异可以用拉格朗日乘子来解释. 拉格朗日乘子可以反映订购量约束条件改变时,对零售商最优总订购量影响的度量,因此分析 λ^* 的取值,可以反映在有订购量约束情况下零售商最优订购策略的变化. 观察图1: 当 $n < 4$ 时, λ^* 的取值在右端点,此时近似最优总订购量比无订购量约束情况下的最优总订购量要大很多;当 $n = 4$ 时, λ^* 的取值在零值的左边,但与零值偏离不大,此时近似最优总订购量比无订购量约束情况下要略小一些;当 $n = 5$ 时, λ^* 的取值在左端点,此时近似最优总订购量比无订购量约束情况下要小很多. 这说明订购量约束对零售商最优订购策略确实有很大的影响.

下面分析在无订购量约束时,单位订购成本、折扣系数、需求差异性对零售商多种价格策略的影响.

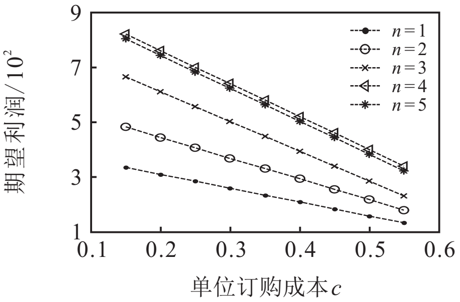
2.3 订购成本对零售商多种价格策略的影响

其他条件不变时,考虑单位订购成本 c 从0.15变到0.55,分析单位订购成本对零售商多种价格策略的影响. 从图3可以看出,对于每一条利润线,期望利润随着订购成本的增加逐渐减少,与推论2的结果一致.

如图3(a) 所示,在无订购量约束情况下,零售商的期望利润随着 n 的增大而增加,特别是当订购成本较低时,随着 n 的增大,多种价格策略获得的期望利润有大幅度的增加,说明采用多种价格策略的优势. 如图3(b) 所示, $n = 4$ 对应的利润曲线超过 $n = 5$ 的利润曲线,说明在订购量约束情况下,零售商倾向于采用多种价格策略,但会避免 n 取值过大. 另一方面,在不同单位订购成本下, n 的最优值稳定,说明单位订购成本不影响零售商多种价格策略的选择.



(a) 无订购量约束



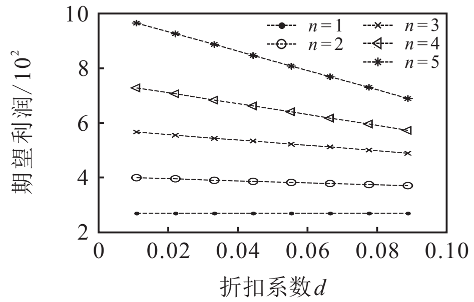
(b) 有订购量约束

图3 单位订购成本对零售商期望利润的影响

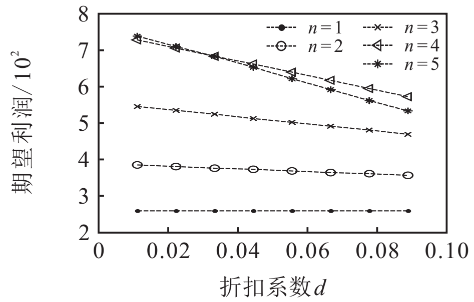
2.4 折扣系数对零售商多种价格策略的影响

其他条件不变时,考虑价格折扣系数 d 从0.01变化到0.08,分析折扣系数对零售商多种价格策略的影响. 这里计算了无订购量约束与有订购量约束情况下,不同折扣系数对应的零售商期望利润,如图4所示. 当 $n = 1$ 时,价格折扣系数不影响单一价格策略下的期望利润;当 $n > 1$ 时,价格折扣系数对多种价格策略下期望利润产生影响,对于每一条利润线,期望利润随着折扣系数的增加逐渐减少,与推论3的结果一致.

零售商向消费者提供更优惠数量的产品,让利消费者时,无订购量约束与有订购量约束的结果有所不同. 图4(a) 反映了无订购量约束情况下,零售商的期望利润随着 n 的增大而增加,特别是当折扣系数较低时,随着 n 的增大,多种价格策略获得的期望利润有大幅度的增加,同时,折扣系数对期望利润的影响随着 n 的增大而增大,特别是 $n = 5$ 时期望利润的减少程度更加明显. 图4(b) 反映了有订购量约束情况下,



(a) 无订购量约束



(b) 有订购量约束

图4 价格折扣系数对零售商期望利润的影响

在$d=0.03$附近,$n=4$和$n=5$这两条利润线相交,折扣系数较大时,$n=4$比$n=5$时的期望利润高,折扣系数较小时,$n=5$比$n=4$时的期望利润高,这说明在订购量约束情况下,折扣系数会影响零售商多种价格策略的选择,当折扣系数较小时,零售商倾向于选择较大的n,当折扣系数较大时,零售商倾向于选择较小的n.

2.5 需求差异性对零售商多种价格策略的影响

在库存系统中,需求的可变性越大,需求的方差越大[18]. 为了反映需求的差异性对订购量的影响,在表2初始标准差的0.5至2.5倍的范围内选取了需求标准差逐渐增大的5个取值$\sigma_i^{(m)}, m=1,2,\dots,5$. 其他条件不变时,需求标准差逐渐增大,即消费者需求差异性增加时,分别计算在无订购量约束和有订购量约束情况下的最优订购策略和期望利润,表3和表4给出了相应的结果.

表3 需求标准差增大时的最优总订购量

	n	$\sigma_i^{(1)}$	$\sigma_i^{(2)}$	$\sigma_i^{(3)}$	$\sigma_i^{(4)}$	$\sigma_i^{(5)}$
无订购量约束	1	418.17	436.34	454.51	472.68	490.858
	2	626.61	653.21	688.91	710.97	733.04
	3	897.24	934.48	972.80	1 011.69	1 050.59
	4	1 165.38	1 214.09	1 258.65	1 312.92	1 354.94
	5	1 564.96	1 622.28	1 683.03	1 761.69	1 839.45
有订购量约束	1	452.17	504.34	556.52	608.69	660.86
	2	677.94	755.88	859.90	924.80	989.70
	3	971.28	1 082.55	1 196.51	1 191.88	1 200.00
	4	1 200.00	1 199.82	1 199.88	1 200.00	1 197.45
	5	1 200.00	1 200.00	1 196.10	1 200.00	1 194.41

表4 需求标准差增大时的期望利润

	n	$\sigma_i^{(1)}$	$\sigma_i^{(2)}$	$\sigma_i^{(3)}$	$\sigma_i^{(4)}$	$\sigma_i^{(5)}$
无订购量约束	1	274.19	268.38	262.57	256.76	250.95
	2	391.39	382.78	371.26	364.10	356.94
	3	534.80	522.59	510.07	497.31	484.55
	4	656.39	640.17	625.34	607.21	593.21
	5	827.97	808.62	787.99	761.15	734.55
有订购量约束	1	269.53	259.07	248.60	238.14	227.67
	2	384.37	368.73	347.86	334.84	321.82
	3	524.68	502.35	479.49	478.60	472.97
	4	653.85	639.91	622.13	598.47	579.06
	5	631.50	623.00	610.99	593.98	565.16

随着消费者需求差异性的增加,无订购量约束情况下,零售商的最优总订购量逐渐增加;有订购量约束情况下,零售商的近似最优总订购量逐渐增加直至达到订购量约束条件. 两种情况下,期望利润却随着消费者需求波动性的增加逐渐减少. 一方面,由于需求不稳定性的影响,零售商会选择增加订购量来应对需求增大的可能情况,同时也会造成过量订购损失的增加;另一方面,零售商达到订购量约束条件后,可能造成缺货损失的增加,因此出现了最优总订购量或近似最优总订购量增加但期望利润减少的情况.

观察表4可以发现:无订购量约束时,随着n的增加,期望利润也在增加,零售商倾向于选择n较大的多种价格策略. 有订购量约束时,在目前讨论的需求标准差范围内(表2初始标准差的0.5至2.5倍),$n=4$时的期望利润最大.

为了分析需求方差进一步增大时,在订购量约束情况下,零售商的多种价格策略是否会受到影响,这里将标准差增加到表2初始标准差的4倍左右,发现期望利润继续减少,$n=4$时为525.40,$n=5$时为529.48,即采用5种价格同时销售时的期望利润超过4种价格. 这说明消费者需求差异性会影响零售商多种价格策略的选择,当消费者需求差异性较大时,零售商倾向于选择较大的n,当消费者需求差异性较小时,零售商倾向于选择较小的n.

3 最优策略的启示

在现实经济中,为实现利润最大化,零售商经常以多种价格同时销售一种产品,即多种价格策略. 但在需求不确定的情况下,如何采用多种价格策略以实现期望利润最大化是个难题. 本文以零售商期望利润为分析标杆,验证了多种价格策略的合理性,在此基础上分别考察了在无订购量约束和有订购量约束情况下不同因素对期望利润的影响,得到的结论可为零售商利润最大化的实现提供一种可以借鉴的思路.

启示1: 有订购量约束时的期望利润低于无订购量约束时的期望利润,有订购量约束时的近似最优总订购量是否大于无约束时的最优总订购量与多种价格的数量n有关. 因此,零售商为了获得更高的期望利润,需要放宽订购预算,在进行订购决策时要结合订购量约束的具体条件及多种价格的数量.

启示2: 在提高零售商利润和销量上,无论是否考虑订购量约束条件,多种价格策略都明显优于单一价格策略. 订购量约束对零售商多种价格策略的选择有影响,无订购量约束时,零售商采用多种价格策略时倾向于选择比较大的价格数量n,认为n越大越好;有订购量约束时,零售商采用多种价格策略时,需要控制价格的数量n,并不是n越大对零售商越有利.

启示3: 无论是否有订购量约束,零售商单位订购成本与期望利润变动都存在反向变动关系,为此,零售商应高度重视订购成本的作用,将订购成本的降低作为实现期望利润最大化的一个重要途径. 单位订购成本对零售商多种价格策略的选择没有影响,因此零售商在决定多种价格数量时,无需考虑单位订购成本.

启示4: 基于折扣系数对零售商期望利润的影响,期望利润随着折扣系数的增加逐渐减少,因此零售商采用多种价格策略时,为了维持一定的利润水平,应该努力防止折扣系数过高,对于折扣系数的大小要给予慎重的决定. 在订购量约束情况下,折扣系数会影响零售商多种价格策略的选择,当折扣系数较小时,零售商倾向于选择较大的n,当折扣系数较大时,零售商倾向于选择较小的n,因此零售商在决定多种价格数量时,需要结合折扣系数的大小.

启示5: 由于需求差异性与期望利润存在反向变动关系,零售商应该通过各种方式和方法降低需求差异性,如通过需求预测的方法降低需求差异性对零售商期望利润的影响. 在订购量约束情况下,需求差异性会影响零售商多种价格策略的选择,当消费者需求差异性较大时,零售商倾向于选择较大的n,当消费者需求差异性较小时,零售商倾向于选择较小的n. 因此,零售商在决定多种价格的数量时,需要考虑需求差异性的大小.

4 结 论

在需求不确定的情况下,研究零售商采用多种价格策略时的订购决策是实现期望利润最大化所需解决的一个现实问题. 本文对这一实际问题进行研究,分别在无订购量约束和有订购量约束情况下建立了报童模型,使用拉格朗日乘子法求解订购量约束问题,设计了近似最优总订购量的求解算法. 算例分析了零售商采用多种价格策略的最优总订购量和相应的期望利润,通过灵敏度分析讨论单位订购成本、折扣系数、需求差异性对零售商多种价格策略的影响,并提炼了几点管理启示,对零售商最优订购决策和多种价格策略选择有一定的参考价值.

研究结果表明: 无论是否考虑订购量约束的条件,多种价格策略显著优于单一价格策略,订购量约束对零售商多种价格策略的选择会产生影响,零售商会控制多种价格的数量,在订购量约束情况下,零售商的多种价格策略还会受到价格折扣系数、需求差异性的影响.

本文的研究可以从如下几方面进行拓展:

1) 考虑转移概率,探究消费者面对同种产品有不同数量价格时的购买倾向;

2) 采用多种价格策略时,考虑需求预测的零售商最优订购决策;

3) 本文研究了风险中性零售商的最优订购策略,后续的研究方向是从决策者行为的角度研究风险厌恶零售商采用多种价格策略时的最优订购决策.

参考文献(References)

[1] Lee H L, Rosenblatt M J. A generalized quantity discount pricing model to increase supplier's profits[J]. Management Science, 1986, 32(9): 1177-1185.

[2] Lin C S, Kroll D E. The single-item newsboy problem with dual performance measures and quantity discounts[J]. European Journal of Operational Research, 1997, 100(3): 562-565.

[3] Altintas N, Erhun F, Tayur S. Quantity discounts under demand uncertainty[J]. Management Science, 2008, 54(4): 777-792.

[4] Chen X. Inventory centralization games with price-dependent demand and quantity discount[J]. Operations Research, 2009, 57(6): 1394-1406.

[5] Chen S P, Ho Y H. Analysis of the newsboy problem with fuzzy demands and incremental discounts[J]. International Journal of Production Economics, 2011, 129(1): 169-177.

[6] Chen S P, Ho Y H. Optimal inventory policy for the fuzzy newsboy problem with quantity discounts[J]. Information Sciences, 2013, 228(7): 75-89.

[7] Chung W, Talluri S, Narasimhan R. Optimal pricing and inventory strategies with multiple price markdowns over time[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 243(1): 130-141.

[8] Taleizadeh A A, Stojkovska I, Pentico D W. An economic order quantity model with partial backordering

and incremental discount[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 82: 21-32.

[9] Tamjidzad S, Mirmohammadi S H. Optimal (r, Q) policy in a stochastic inventory system with limited resource under incremental quantity discount[J]. Computers & Industrial Engineering, 2017, 103: 59-69.

[10] Khouja M. The newsboy problem under progressive multiple discounts[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 84(2): 458-466.

[11] Khouja M. The newsboy problem with multiple discounts offered by suppliers and retailers[J]. Decision Sciences, 1996, 27(3): 589-599.

[12] Feng Y, Xiao B. Optimal policies of yield management with multiple predetermined prices[J]. Operations Research, 2000, 48(2): 332-343.

[13] 王丽颖, 巩天啸, 陈丽华, 等. 二级市场季节性商品的订购和销售决策[J]. 管理科学学报, 2014, 17(5): 35-42.
(Wang L Y, Gong T X, Chen L H, et al. Decisions for ordering seasonal goods and switching to secondary markets[J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(5): 35-42.)

[14] Khouja M, Mehrez A. A multi-product constrained newsboy problem with progressive multiple discounts[J]. Computers & Industrial Engineering, 1996, 30(1): 95-101.

[15] Moon I, Yoo D K, Saha S. The distribution-free newsboy problem with multiple discounts and upgrades[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2016, 2016: 1-11.

[16] Lu Y, Chen Y, Song M, et al. Optimal pricing and inventory control policy with quantity-based price differentiation[J]. Operations Research, 2014, 62(3): 512-523.

[17] Zhang G. The multi-product newsboy problem with supplier quantity discounts and a budget constraint[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 206(2): 350-360.

[18] 禹海波. 需求不确定性对最小化成本和最大化利润报童问题的影响[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(7): 1756-1768.
(Yu H B. Effect of demand uncertainty on newsvendor problems with minimization cost and maximization profit[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(7): 1756-1768.)

作者简介

孟志青 (1962–), 男, 教授, 博士生导师, 从事优化管理、风险管理、系统工程理论与方法等研究, E-mail: mengzhiqing@zjut.edu.cn;

牧云志 (1983–), 女, 讲师, 博士生, 从事需求管理、优化管理的研究, E-mail: muyunzhi@zstu.edu.cn;

徐蕾艳 (1982–), 女, 博士生, 从事物流与供应链管理的研究, E-mail: xuleiyan@zufe.edu.cn;

郑敏超 (1986–), 女, 博士生, 从事物流与供应链管理的研究, E-mail: 598690626@qq.com.

(责任编辑: 齐 霁)

下 期 要 目