

控制与决策

Control and Decision

基于预设性能的非仿射非线性系统自适应有限时间控制

陈明, 李小华

引用本文:

陈明, 李小华. 基于预设性能的非仿射非线性系统自适应有限时间控制[J]. 控制与决策, 2020, 35(5): 1259–1264.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1127>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一类不确定广义时滞系统的 H^∞ 自适应控制

Adaptive H^∞ control for a class of uncertain singular time–delay systems

控制与决策. 2019, 34(10): 2157–2163 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0141>

基于全状态预设性能的受限指令反演控制器设计

Constrained command backstepping controller design under full state prescribed performance

控制与决策. 2018, 33(3): 479–485 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.0172>

不确定广义大系统有限时间鲁棒分散控制

Finite–time robust decentralized control for uncertain singular large–scale systems

控制与决策. 2017, 32(8): 1493–1498 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0769>

交会对接模拟系统姿态跟踪有限时间抗干扰控制

Finite–time active disturbance rejection attitude tracking control for rendezvous and docking simulator

控制与决策. 2017, 32(7): 1189–1195 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0571>

交会对接模拟系统姿态位置耦合有限时间控制

Coupled attitude and position finite–time control for rendezvous and docking simulator

控制与决策. 2017, 32(10): 1789–1795 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1163>

改进快速全局滑模控制方法

Improved quick global sliding mode control

控制与决策. 2016, 31(12): 2267–2270 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1398>

输入饱和和受限下的刚体飞行器姿态系统的有限时间镇定

Finite–time attitude stabilization of rigid spacecraft under input saturation

控制与决策. 2015, 30(8): 1386–1392 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0840>

一类扩展结构大系统的分散有限时间鲁棒关联镇定

Decentralized finite–time robust connective stabilization for a class of large–scale systems with expanding construction

控制与决策. 2015, 30(11): 1967–1973 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1379>

基于预设性能的非仿射非线性系统自适应有限时间控制

陈明[†], 李小华

(辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁 鞍山 114051)

摘要: 针对一类具有死区的非仿射非线性系统, 将预设性能控制与有限时间控制相结合, 提出一种具有预设性能的自适应有限时间跟踪控制方法. 基于 Backstepping 技术、模糊逻辑系统及有限时间 Lyapunov 稳定理论, 给出使系统半全局实际有限时间稳定 (semi-globally practically finite-time stable, SGPFS) 的充分条件和设计步骤. 该控制策略不仅使系统的输出误差在有限时间内收敛到一个预先设定区域, 同时保证其收敛速度、最大超调量和稳态误差均满足预先设定的性能要求. 最后通过仿真示例验证了所提出设计方法的有效性.

关键词: 有限时间控制; 预设性能; Backstepping; 非仿射非线性系统; 自适应控制; 跟踪控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Adaptive finite-time tracking control for nonaffine nonlinear systems based on prescribed performance

CHEN Ming[†], LI Xiao-hua

(School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, China)

Abstract: By combining prescribed performance and finite-time control, an adaptive finite-time tracking control method is proposed for a class of nonaffine nonlinear systems with dead zones. Based on the Backstepping technology, the fuzzy logic system and the finite-time Lyapunov stability theory, the sufficient conditions for the semi-global practical finite-time stable (SGPFS) and design steps are given. The control strategy can maintain that the output error converges to the predefined region in a finite time, as well as guarantee that the prescribed performance are achieved, such as the convergence speed, the maximum overshoot and the steady-error. Finally, a simulation example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: finite-time control; prescribed performance; Backstepping; nonaffine nonlinear systems; adaptive control; tracking control

0 引言

近年来,有限时间控制因为其有限时间收敛等良好品质受到很多学者关注,并已被成功应用于航空/航天等应用领域.其中,有限时间 Lyapunov 稳定理论成为连续有限时间控制的重要方法之一,并已取得很多相关成果^[1-2].

文献 [3] 奠定了有限时间控制基础理论,提出了有限时间 Lyapunov 稳定理论.在该研究基础上,文献 [4] 给出了系统局部有限时间稳定的充分条件.进一步,文献 [5] 研究了一类带有零动态不确定非线性系统有限时间可调的有限时间镇定问题.文献 [6] 研究了一类仿射非线性系统自适应有限时间控制问题,该控制算法保证系统的跟踪误差在有限时间内限定达到平衡点附近的一个邻域内.以上方法大都考虑系

统状态能否在有限时间内收敛到平衡点或平衡点附近某一邻域,有限时间内能否保证系统具有良好的动态和稳态性能也是一个重要问题.预设性能控制是改善系统性能的强有力的算法工具,在保证系统跟踪误差收敛到一个预先设定区域的同时,保证其收敛速度及超调量也满足预先设定的要求,目前该理论已取得一些研究成果^[7-8].

目前对系统稳定性的研究大都基于渐近稳定或指数稳定,而基于有限时间理论的非仿射非线性系统有限时间控制研究不是很多.预设性能控制最显著的特点是保证跟踪误差限定在指定的界限或区域内,即在保证系统稳定的同时,兼顾系统的稳态性能和暂态性能.将有限时间控制与预设性能控制相结合,对进一步改善系统性能具有重要意义.本文首次

收稿日期: 2018-08-18; 修回日期: 2018-12-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61403177); 辽宁省自然科学基金项目 (20180550319).

[†]通讯作者. E-mail: cm8061@sina.com.

将预设性能控制与有限时间控制相结合,针对一类带死区的非仿射非线性系统,提出一种使系统半全局实际有限时间稳定(semi-globally practically finite-time stable, SGPFs)的控制方法.受文献[9]的启发,避免了Backstepping设计过程中控制器的奇点问题,该控制算法不仅能保证系统跟踪误差在有限时间内达到预先设定的区域,同时保证其稳态和动态性能也满足预先设定的要求.最后,通过仿真示例验证设计方法的有效性.

1 预备知识与问题描述

1.1 预备知识

考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (1)$$

其中: $f(\cdot)$ 是一个在原点邻域内的光滑函数, $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $u \in \mathbf{R}$ 分别是系统的状态变量和输入变量,且 $f(0, 0) = 0$.

首先给出SGPFs的定义及存在的充分条件.

定义1^[10] 考虑系统(1),在任意给定的初始状态 $x(t_0) = x_0$ 下,若存在实数 $\delta > 0$ 及有限收敛时间 $T_s(\delta, x_0)$,对于所有 $t \geq t_0 + T_s$,满足 $\|x(t)\| < \delta$,则系统(1)在平衡点是SGPFs.

定理1^[6,10] 考虑系统(1),若存在连续可微正定函数 $V(x)$ 以及实数 $\alpha > 0, \beta \in (0, 1), \varrho > 0$,使得

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V^\beta(x) + \varrho, \quad (2)$$

则系统是SGPFs. 调节时间 T_s 为

$$T_s = \frac{1}{\alpha(1-\beta)\varpi_0} \left[V^{1-\beta}(x(0)) - \left(\frac{\varrho}{\alpha(1-\varpi_0)} \right)^{(1-\beta)/\beta} \right],$$

其中 $0 < \varpi_0 \leq 1$.

引理1^[11] 对于紧集 Ω_Z 上的任意给定连续函数 $f(Z)$,存在一个模糊逻辑系统 $W^T R(Z)$,存在 $\forall \varepsilon > 0$,使得

$$\sup_{x \in \Omega_Z} \|f(Z) - W^T R(Z)\| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

其中: $W^T = [w_1, \dots, w_N]^T$ 是模糊系统的权参数向量; $R(Z) = [r_1(Z), \dots, r_N(Z)]^T / \sum_{i=1}^N r_i(Z)$ 是模糊基函数向量, $r_i(Z) = \exp \left[\frac{-(Z - \xi_i)^T (Z - \xi_i)}{\eta_i^2} \right]$. 这里, N 表示模糊规则的条数, $\xi_i = [\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{iN}]^T$ 和 η_i 分别表示高斯函数 $s_i(Z)$ 的中心和宽度.

引理2^[12] 对于变量 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ 及任意实数 c, d, w ,如下关系成立:

$$\|x\|^c \|y\|^d \leq \frac{c}{c+d} w \|x\|^{c+d} + \frac{d}{c+d} w^{-\frac{c}{d}} \|y\|^{c+d}. \quad (4)$$

引理3^[13] 对于任意 $x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n, \gamma \in (0, 1)$,满足

$$(\|x_1\| + \dots + \|x_n\|)^\gamma \leq \|x_1\|^\gamma + \dots + \|x_n\|^\gamma. \quad (5)$$

1.2 问题描述

考虑如下非仿射非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + p_i(t), & 1 \leq i \leq n-1; \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\bar{x}_n(t), D_z(u)) + p_n(t); \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\bar{x}_j(t) = [x_1, \dots, x_j]^T \in \mathbf{R}^j$ ($j = 1, \dots, n$); $u(t) \in \mathbf{R}, y(t) \in \mathbf{R}$ 和 $p_i(t)$ 分别为系统的状态向量、输入、输出和外界干扰, $\bar{p}_i(t)$ 满足 $\|p_i(t)\| \leq \bar{p}_i, \bar{p}_i$ 为未知常数. $f_i(\cdot)$ 为未知光滑函数. $D_z(u)$ 为参数未知的死区输出函数,描述为

$$D_z(u) = \begin{cases} g_r(u), & u \geq b_r, b_r > 0; \\ 0, & b_l < u < b_r; \\ g_l(u), & u \leq b_l, b_l < 0. \end{cases} \quad (7)$$

$g_r(u), g_l(u)$ 是连续光滑函数, b_r, b_l 是未知常数.

本文成果主要基于如下几个假设条件.

假设1 对于死区输出函数 $D_z(u)$,存在未知正常数 k_{l0}, k_{l1}, k_{r0} 和 k_{r1} 满足

$$\begin{cases} 0 < k_{l0} \leq \dot{g}_l(u) \leq k_{l1}, & u \leq b_l; \\ 0 < k_{r0} \leq \dot{g}_r(u) \leq k_{r1}, & u \geq b_r. \end{cases} \quad (8)$$

根据假设1,可将 $D_z(u)$ 变换为

$$D_z(u) = K^T(t) \Theta(t) u + d(u). \quad (9)$$

其中

$$K(t) = [K_r(u(t)) \quad K_l(u(t))]^T.$$

$$\Theta(t) = [\Theta_r(t) \quad \Theta_l(t)]^T.$$

$$K_r(u(t)) = \begin{cases} 0, & u(t) \leq b_l; \\ g'_r(\xi_r(u)), & u(t) > b_l. \end{cases}$$

$$K_l(u(t)) = \begin{cases} 0, & u(t) \geq b_r; \\ g'_l(\xi_l(u)), & u(t) < b_r. \end{cases}$$

$$\Theta_r(t) = \begin{cases} 1, & u(t) > b_l; \\ 0, & u(t) \leq b_l. \end{cases}$$

$$\Theta_l(t) = \begin{cases} 1, & u(t) < b_r; \\ 0, & u(t) \geq b_r. \end{cases}$$

$$d(u) = \begin{cases} -g'_r(\xi_r(u)) b_r, & u(t) \geq b_r; \\ -[g'_r(\xi_r(u)) + g'_l(\xi_l(u))] u, & b_l < u(t) < b_r; \\ -g'_l(\xi_l(u)) b_l, & u(t) \leq b_l. \end{cases}$$

注1 推导易知,存在正常数 $\bar{d} = (k_{l1} + k_{r1}) \max(-b_l, b_r)$,使得 $\|d(u)\| \leq \bar{d}$; 设 $\beta_0 = \min\{k_{l0}, k_{r0}\}$,则 $\beta_0 \leq K^T(t) \Theta(t) \leq k_{l1} + k_{r1}$. 常数 b_r, b_l, k_{l0}, k_{l1} ,

k_{r0} 、 k_{r1} 和 \bar{d} 对控制设计无影响, 无需给出其确切值.

由中值定理, 将函数 $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 表示为

$$f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}^0) + h_{\mu_i}(x_{i+1} - x_{i+1}^0). \quad (10)$$

将式(10)代入系统(6), 可将非仿射系统转化为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, 0) + h_{\mu_i}x_{i+1} + p_i, & 1 \leq i \leq n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, 0) + h_{\mu_n}K^T \Theta u + h_{\mu_n}d(u) + p_n. \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} h_{\mu_i} &= \left. \frac{\partial f(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right|_{x_{i+1}=x_{\mu_i}}, \\ x_{\mu_i} &= \mu_i x_{i+1} + (1 - \mu_i)x_{i+1}^0, \\ 0 < \mu_i < 1, & i = 1, \dots, n; \\ x_{n+1} = u, & x_{i+1}^0 = 0. \end{aligned}$$

注2 为表示方便, 略掉各式中所有时间变量 t .

假设2 h_{μ_i} 是有界的, 不失一般性, 同时也为计算及分析问题方便, 本文假设 h_{μ_i} 为正数, 且满足

$$\begin{aligned} 0 < c_i < h_{\mu_i}, & 1 \leq i \leq n-1; \\ 0 < c_n & \leq h_{\mu_n}K^T \Theta. \end{aligned}$$

本文的控制目标: 设计自适应控制律, 使系统(6)是半全局时间有限时间稳定, 且保证系统输出信号 $y(t)$ 在有限时间内跟踪期望轨迹 $y_r(t)$, 其跟踪误差 $e(t) = y(t) - y_r(t)$ 满足预先设定的性能函数.

假设3 期望轨迹 $y_r(t)$ 已知、连续可导且有界.

2 预设性能函数及误差变换

预设性能函数 $\rho(t)$ 的定义^[9-10]如下:

$$\rho = (\rho_0 - \rho_\infty)\exp(-\kappa t) + \rho_\infty. \quad (12)$$

其中: ρ 是正的且严格递减, ρ_0 、 ρ_∞ 、 κ 是预先设定的正常数. 本文的控制目标通过如下不等式实现:

$$\begin{cases} -M\rho < e < \rho, & e \geq 0; \\ -\rho < e < M\rho, & e < 0. \end{cases} \quad (13)$$

其中 $0 \leq M \leq 1$ 为设计参数.

根据本文的控制目标, 跟踪误差限定在不等式(13)所描述的区域. 令 $e = \rho S(\epsilon)$, 其中 $S(\epsilon)$ 光滑可逆, 满足

$$\epsilon(t) = S^{-1}\left(\frac{e}{\rho}\right). \quad (14)$$

本文选取如下典型形式的 $S(\epsilon)$:

$$S(\epsilon) = \frac{e^\epsilon - Me^{-\epsilon}}{e^\epsilon + e^{-\epsilon}}, \quad e \geq 0.$$

或

$$S(\epsilon) = \frac{Me^\epsilon - e^{-\epsilon}}{e^\epsilon + e^{-\epsilon}}, \quad e < 0.$$

对 $\epsilon(t)$ 求一阶导数, 有

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= (\dot{e} - \dot{\rho}S(\epsilon)) / \rho \left(\frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right) = \\ &\phi(f_1 + h_{\mu_1}x_2 + p_1 - \dot{y}_r - \dot{\rho}S(\epsilon)). \end{aligned} \quad (15)$$

令 $\phi = 1 / \rho \left(\frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right)$, 显然 $\phi > 0$, 且 $0 < \phi_l \leq \phi \leq \phi_u$.

3 主要成果

本文主要基于 Backstepping 技术, 给出系统(6)的预设性能自适应有限时间跟踪控制器设计步骤.

首先, 分别定义坐标变换 z_i 和虚拟控制量 α_{i-1} :

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (16)$$

根据式(15)和(16), 原系统等效变换为

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \phi(f_1 + h_{\mu_1}\alpha_1 + h_{\mu_1}z_2 - \dot{y}_r - \dot{\rho}S(\epsilon) + p_1); \\ \dot{z}_i = \\ f_i + h_{\mu_i}\alpha_i + h_{\mu_i}z_{i+1} + p_i - \dot{\alpha}_{i-1}, & 2 \leq i \leq n-1; \\ \dot{z}_n = f_n + h_{\mu_n}K^T \Theta u + h_{\mu_n}d(u) + p_n - \dot{\alpha}_{n-1}. \end{cases} \quad (17)$$

具体设计过程如下.

step 1: 考虑式(17)中的第一个子系统, 构造 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{c_1}{2r_1}\tilde{\theta}_1^2. \quad (18)$$

对其求导

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \\ \phi\epsilon(f_1 + h_{\mu_1}\alpha_1 + h_{\mu_1}z_2 - \dot{y}_r - \dot{\rho}S(\epsilon) + p_1) &- \frac{c_1}{r_1}\tilde{\theta}_1\dot{\theta}_1, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$. 显然, $\epsilon p_1 \leq \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{2}p_1^2$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \phi_u \epsilon h_{\mu_1} z_2 + \phi_u \epsilon (F_1 + h_{\mu_1} \alpha_1) - \\ &\phi_u k_1 \epsilon^{2\gamma} + \frac{\phi_u}{2} \tilde{p}_1^2 - \frac{c_1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + \phi_u c_1 \Gamma_1 \epsilon^2. \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 - \dot{y}_r + \frac{1}{2}\epsilon - \dot{\rho}S(\epsilon) + k_1 \epsilon^{2\gamma-1} - c_1 \Gamma_1 \epsilon, \\ 0.5 < \gamma < 1. \end{aligned}$$

根据引理1, 有

$$F_1(Z_1) = W_1^T R_1(Z_1) + \delta_1(Z_1), \quad \|\delta_1(Z_1)\| \leq \epsilon_1. \quad (20)$$

根据完全平方公式, 得到

$$\epsilon F_1 \leq \frac{c_1}{2a_1^2} \epsilon^2 \theta_1 R_1^T R_1 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{c_1}{2} \epsilon^2 + \frac{\epsilon_1^2}{2c_1}. \quad (21)$$

令 $\frac{\|W_i\|^2}{c_i} = \theta_i$, 将式(21)代入(19), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \phi_u \epsilon h_{\mu_1} \alpha_1 - \phi_u k_1 \epsilon^{2\gamma} + \frac{\phi_u}{2} \tilde{p}_1^2 - \frac{c_1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + \\ &\phi_u \left(\epsilon h_{\mu_1} z_2 + \frac{c_1}{2a_1^2} \epsilon^2 \theta_1 R_1^T R_1 + \frac{a_1^2}{2} + \right. \\ &\left. \frac{c_1}{2} \epsilon^2 + \frac{\epsilon_1^2}{2c_1} + c_1 \Gamma_1 \epsilon^2 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

设计虚拟控制量 α_1 和自适应律 $\dot{\hat{\theta}}_1$ 为

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2a_1^2}\epsilon\hat{\theta}_1R_1^TR_1 - \frac{1}{2}\epsilon - \Gamma_1\epsilon, \quad (23)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \phi_u \frac{r_1}{2a_1^2}\epsilon^2R_1^TR_1 - \sigma_1\hat{\theta}_1, \quad (24)$$

其中 $a_1, \Gamma_1, r_1, \sigma_1$ 均为大于零的设计参数.

根据假设2及式(23),有

$$\epsilon h_{\mu_1}\alpha_1 \leq -\frac{c_1}{2a_1^2}\epsilon^2\hat{\theta}_1R_1^TR_1 - \frac{c_1}{2}\epsilon^2 - c_1\Gamma_1\epsilon^2. \quad (25)$$

将式(23)~(25)代入(22),得到

$$\dot{V}_1 \leq \phi_u h_{\mu_1}\epsilon z_2 + \tau_1. \quad (26)$$

其中

$$\tau_1 = \frac{\phi_u}{2}\left(a_1^2 + \frac{\epsilon_1^2}{c_1}\right) - \phi_u k_1 \epsilon^{2\gamma} + \frac{\phi_u}{2}\bar{p}_1^2 + \frac{c_1\sigma_1}{r_1}\tilde{\theta}_1\hat{\theta}_1.$$

step i ($2 \leq i \leq n-1$): 选择第 i 个子系统的李亚普诺夫函数为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2 + \frac{c_i}{2r_i}\tilde{\theta}_i^2. \quad (27)$$

与上述推导过程类似,令

$$F_i = h_{\mu_{i-1}}z_{i-1} + f_i(\bar{e}_i, 0) + k_i z_i^{2\gamma-1} + \frac{1}{2}z_i - \dot{\alpha}_{i-1} - c_i\Gamma_i z_i. \quad (28)$$

因为

$$F_i = W_i^TR_i + \delta_i, \|\delta_i\| \leq \epsilon_i, \\ z_i F_i \leq \frac{c_i}{2a_i^2}z_i^2\theta_i^2R_i^TR_i + \frac{a_i^2}{2} + \frac{c_i}{2}z_i^2 + \frac{\epsilon_i^2}{2c_i},$$

所以

$$\dot{V}_i \leq h_{\mu_i}z_i z_{i+1} + \frac{c_i}{2a_i^2}z_i^2\theta_iR_i^TR_i + \frac{c_i}{2}z_i^2 + z_i h_{\mu_i}\alpha_i + \frac{1}{2}\left(a_i^2 + \frac{1}{c_i}\epsilon_i^2\right) - k_i z_i^{2\gamma} + \frac{1}{2}\bar{p}_i^2 + \tau_{i-1} - \frac{c_i}{r_i}\tilde{\theta}_i\dot{\theta}_i + c_i\Gamma_i z_i^2.$$

设计如下虚拟控制律和自适应控制律:

$$\alpha_i = -\frac{1}{2a_i^2}z_i\hat{\theta}_iR_i^TR_i - \frac{1}{2}z_i - \Gamma_i z_i, \quad (29)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \frac{r_i}{2a_i^2}z_i^2R_i^TR_i - \sigma_i\hat{\theta}_i. \quad (30)$$

得到

$$\dot{V}_i \leq h_{\mu_i}z_i z_{i+1} + \tau_i. \quad (31)$$

其中

$$\tau_i = \frac{\phi_u}{2}\left(a_1^2 + \frac{\epsilon_1^2}{c_1}\right) - \phi_u k_1 \epsilon^{2\gamma} + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^i\left(a_j^2 + \frac{1}{c_j}\epsilon_j^2\right) - \sum_{j=2}^i k_j z_j^{2\gamma} + \frac{\phi_u}{2}\bar{p}_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^i \bar{p}_j^2 + \sum_{j=1}^i \frac{c_j\sigma_j}{r_j}\tilde{\theta}_j\hat{\theta}_j.$$

step n : 定义最后一个子系统的Lyapunov函数

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{c_n}{2r_n}\tilde{\theta}_n^2. \quad (32)$$

令

$$F_n = h_{\mu_{n-1}}z_{n-1} + f_n + k_n z_n^{2\gamma-1} + \frac{1}{2}z_n - \dot{\alpha}_{n-1} + \frac{1}{2}z_n h_{\mu_n}^2 - c_n\Gamma_n z_n.$$

与step i 证明过程类似,对 V_n 求一阶导数,并根据注1,有 $z_n h_{\mu_n} d \leq \frac{1}{2}z_n^2 h_{\mu_n}^2 + \frac{1}{2}\bar{d}^2$,从而得到

$$\dot{V}_n \leq z_n h_{\mu_n} K^T \Theta u - k_n z_n^{2\gamma} - \frac{c_n}{r_n}\tilde{\theta}_n\dot{\theta}_n + \frac{1}{2}\bar{d}^2 + \frac{c_n}{2a_n^2}z_n^2\theta_nR_n^TR_n + \frac{a_n^2}{2} + \frac{c_n}{2}z_n^2 + \frac{\epsilon_n^2}{2c_n} + \frac{1}{2}\bar{p}_n^2 + \tau_{n-1} + c_n\Gamma_n z_n^2. \quad (33)$$

设计实际控制律($u = \alpha_n$)和自适应控制律

$$u = -\frac{z_n}{2a_n^2}\hat{\theta}_nR_n^TR_n - \frac{z_n}{2} - \Gamma_n z_n, \quad (34)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \frac{r_n}{2a_n^2}z_n^2R_n^TR_n - \sigma_n\hat{\theta}_n. \quad (35)$$

根据式(34)和(35),并将 τ_{n-1} 代入式(33),利用假设2,得到

$$\dot{V}_n \leq \sum_{j=1}^n \frac{c_j\sigma_j}{r_j}\tilde{\theta}_j\theta_j - \phi_u K_0 \left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)^\gamma - \sum_{j=2}^n k_j z_j^{2\gamma} + \frac{1}{2}\bar{d}^2 + \frac{\phi_u}{2}\left(a_1^2 + \frac{\epsilon_1^2}{c_1}\right) + \frac{\phi_u}{2}\bar{p}_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^n \left(a_j^2 + \frac{1}{c_j}\epsilon_j^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^n \bar{p}_j^2, \quad (36)$$

其中 $K_0 = 2^\gamma k_1$.

又容易得到

$$-\sum_{j=2}^n 2^\gamma k_j \left(\frac{z_j^2}{2}\right)^\gamma \leq -K_1 \sum_{j=2}^n \left(\frac{z_j^2}{2}\right)^\gamma. \quad (37)$$

令 $K_1 = 2^\gamma \min\{k_j\}$,将式(37)代入(36),并根据 $\tilde{\theta}_j\hat{\theta}_j \leq -\frac{\tilde{\theta}_j^2}{2} + \frac{\theta_j^2}{2}$,得到

$$\dot{V}_n \leq \sum_{j=1}^n \frac{c_j\sigma_j}{2r_j}\theta_j^2 - \sum_{j=1}^n \frac{c_j\sigma_j}{2r_j}\tilde{\theta}_j^2 - \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j \frac{c_j}{2r_j}\tilde{\theta}_j^2\right)^\gamma - \phi_u K_0 \left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)^\gamma - K_1 \left(\sum_{j=2}^n \frac{z_j^2}{2}\right)^\gamma + \frac{\bar{d}^2}{2} + \sum_{j=2}^n \frac{1}{2}\left(a_j^2 + \frac{\epsilon_j^2}{c_j}\right) + \frac{\phi_u}{2}\bar{p}_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^n \bar{p}_j^2 + \frac{\phi_u}{2}\left(a_1^2 + \frac{\epsilon_1^2}{c_1}\right) + \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j \frac{c_j}{2r_j}\tilde{\theta}_j^2\right)^\gamma. \quad (38)$$

根据引理2,得到

$$\left(\sum_{j=1}^n \sigma_j \frac{c_j}{2r_j}\tilde{\theta}_j^2\right)^\gamma \leq (1-\gamma)\gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} + \sum_{j=1}^n \sigma_j \frac{c_j}{2r_j}\tilde{\theta}_j^2. \quad (39)$$

将式(39)代入(38),得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & - \\ & \left(\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j c_j \tilde{\theta}_j^2}{2r_j} \right)^\gamma - \phi_u K_0 \left(\frac{\epsilon^2}{2} \right)^\gamma - K_1 \left(\sum_{j=2}^n \frac{z_j^2}{2} \right)^\gamma + \varrho. \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} \varrho = & \sum_{j=1}^n \frac{c_j \sigma_j}{2r_j} \theta_j^2 + (1-\gamma)\gamma \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{2} \bar{d}^2 + \frac{\phi_u}{2} \left(a_1^2 + \right. \\ & \left. \frac{\epsilon_1^2}{c_1} \right) + \sum_{j=2}^n \frac{1}{2} \left(a_j^2 + \frac{1}{c_j} \epsilon_j^2 \right) + \frac{\phi_u}{2} \bar{p}_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \bar{p}_j^2. \end{aligned}$$

令 $\phi_u K_0 = K_2, \varsigma = \min\{\min\{\sigma_j^\gamma\}, K_2, K_1\}$, 易得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\varsigma \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2 \right)^\gamma + \left(\frac{\epsilon^2}{2} \right)^\gamma + \left(\sum_{j=2}^n \frac{z_j^2}{2} \right)^\gamma \right] + \varrho. \end{aligned}$$

根据引理3, 导出

$$V_n^\gamma \leq \left(\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2 \right)^\gamma + \left(\frac{\epsilon^2}{2} \right)^\gamma + \left(\sum_{j=2}^n \frac{z_j^2}{2} \right)^\gamma, \quad (41)$$

最后得到

$$\dot{V}_n \leq -\varsigma V_n^\gamma + \varrho. \quad (42)$$

根据定义1和定理1, 式(42)表明该系统满足SGPFS的充分条件. 该控制器使系统的跟踪误差能在有限时间内收敛到一个预先设定的区域, 且保证其收敛速度、最大超调量等满足预先设定要求.

注3 针对式(42), 令 $\forall 0 < \xi < 1$, 根据定理1, 闭环系统所有的信号是半全局有限时间实际稳定的, 其有限时间 T_s 为

$$T_s = \frac{1}{\varsigma(1-\gamma)\xi} \left[V^{1-\gamma}(z(0)) - \left(\frac{\varrho}{(1-\xi)\varsigma} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} \right], \quad (43)$$

其中 $z(0) = [\epsilon(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]^T$. 因此, 在有限调节时间内, 状态 $\epsilon, z_2, \dots, z_n$ 均能到达限定区域. 进而不难证明, 原系统(6)中跟踪误差信号在有限时间内满足预设性能要求.

定理2 对于一类仿射非线性系统(6), 若满足假设1~假设3, 并选取合适的设计参数 $a_i > 0, \Gamma_i > 0, r_i > 0, \sigma_i > 0, 0.5 < \gamma < 1$, 采用式(23)、(24)、(29)、(30)、(34)和(35)求得其控制律和自适应变化律, 则该闭环系统中所有信号半全局实际有限时间稳定, 同时其跟踪误差满足预先设定的性能要求.

4 仿真分析

考虑如下带死区的非仿射非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1+x_1^2)x_2 + x_2^3 + p_1, \\ \dot{x}_2 = (5+\cos x_1 + \sin x_2)x_3 + x_3^2 + p_2, \\ \dot{x}_3 = (3+x_1 + \sin x_2 + x_3^2)D_Z(u) + \sin(D_Z(u)) + p_3. \end{cases} \quad (44)$$

其中死区输出函数描述为

$$D_Z(u) = \begin{cases} 1.5(u-2.5), & u \geq 2.5; \\ 0, & -1 < u < 2.5; \\ 0.5(u+1), & u \leq -1. \end{cases} \quad (45)$$

根据定理2, 设计系统有限时间自适应跟踪控制器. 期望输出 $y_r = 0.5 \sin(t) + \sin(0.5t)$; 预设性能函数为 $\rho(t) = (0.7 - 0.15)\exp(-0.5t) + 0.15$; 选取误差变换函数 $S(\epsilon) = \frac{e^\epsilon - M e^{-\epsilon}}{e^\epsilon + e^{-\epsilon}}, M = 0.2$; 初始状态 $x(0) = [0.6, -0.3, 0.2]^T$; $p_1(t) = 0.1 \sin(100t), p_2(t) = 0.01 \sin(100t), p_3(t) = 0.1 \sin(10t)$. 本设计中, 需要选取合适的设计参数对控制器进行设计, 仿真分析发现, 设计参数 $a_i, \Gamma_i, r_i, \sigma_i (i = 1, 2, 3)$ 的选择对系统性能影响较大: 参数选择过大或过小, 系统可能出现反应缓慢或振荡, 甚至发散. 如 a_i, σ_i 选择越小, 跟踪效果越差, 甚至出现不稳定. 仿真过程中, 为了调节参数方便, 令 $a_1 = a_2 = a_3$, 其他参数也按照这个思路进行选取. 经过多次反复试凑, 控制器参数选择为 $a_i = 10, \Gamma_i = 6, r_i = 10, \sigma_i = 500$. 自适应律初始值为 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_3 = 0.1$. 图1是实际输出和期望输出的响应曲线, 图2是跟踪误差响应曲线, 图3是系统状态 x_2, x_3 响应曲线, 图4是控制输入响应曲线. 仿真结果表明, 在有限时间内, 系统实际输出跟随期望输出, 保证跟踪误差达到预先设定区域, 系统具有一定的暂态和稳态性能, 且各变量均有界.

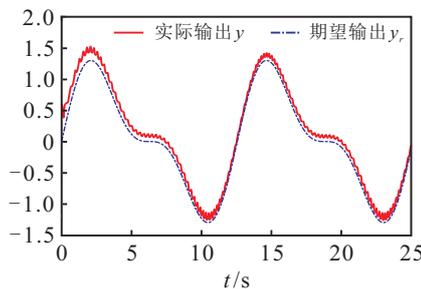


图1 输出响应曲线

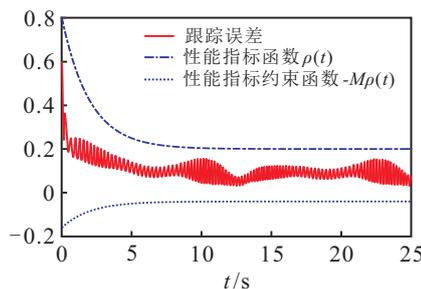
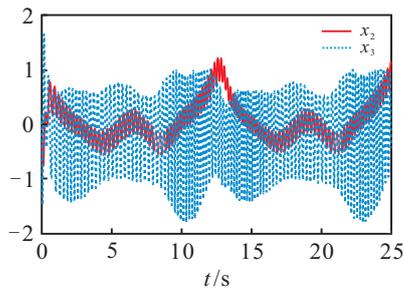
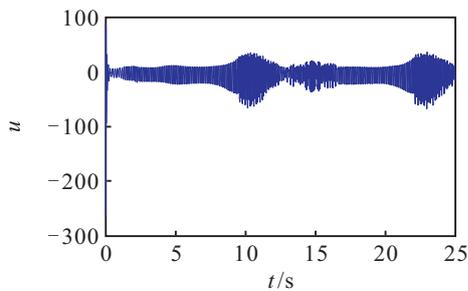
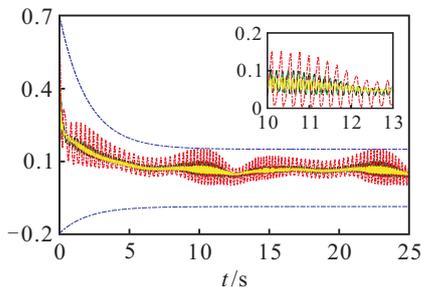


图2 跟踪误差响应曲线

图3 x_2 、 x_3 响应曲线图4 控制输入 u 响应曲线

进一步,为了更直观表明控制器设计参数 Γ_i 对系统性能影响,图5给出在 a_i 、 σ_i 取值一定的情况下, Γ_i 取不同值时的跟踪效果比较曲线. 仿真结果表明,在一定范围内, Γ_i 取值越大,跟踪效果越好,但是超出一定范围,系统不稳定.

图5 a_i 、 σ_i 取值一定, Γ_i 取值不同时的跟踪曲线比较

5 结论

本文利用 Backstepping 技术提出了一种具有预设性能的自适应有限时间跟踪控制设计方法. 该方法不仅使系统的输出误差在有限时间内收敛到一个预先设定区域,同时兼顾系统的暂态性能和稳态性能,通过仿真实例验证了设计方法的有效性. 该研究成果能够为进一步研究非线性预设性能及其他相关理论与方法提供一定的参考和借鉴.

参考文献(References)

- [1] Hong Y G, Wang J K, Cheng D Z. Adaptive finite-time control of nonlinear systems with parametric uncertainty[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(5): 858-862.
- [2] Hua C C, Li Y F, Guan X P. Finite / fixed-time stabilization for nonlinear interconnected systems with dead-Zone input[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017,

62(5): 2554-2560.

- [3] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.
- [4] Shen Y J, Xia X H. Semi-global finite-time observers for nonlinear systems[J]. Automatica, 2008, 44(12): 3152-3156.
- [5] 常霞, 刘允刚. 一类具有零动态不确定非线性系统的停息时间可调的有限时间镇定[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(4): 358-364.
(Chang X, Liu Y G. The finite-time stabilization for a class of zero-dynamics uncertain nonlinear systems with adjustable-settling-time[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(4): 358-364.)
- [6] Wang H H, Chen B, Lin C, et al. Adaptive finite-time control for a class of uncertain high-order non-linear systems based on fuzzy approximation[J]. IET Control Theory and Applications, 2017, 11(5): 677-684.
- [7] Li Y M, Tong S C, Liu L, et al. Adaptive output-feedback control design with prescribed performance for switched nonlinear systems[J]. Automatica, 2017, 80(5): 225-231.
- [8] 陈明, 张士勇. 基于 Backstepping 的非线性系统预设性能鲁棒控制器设计[J]. 控制与决策, 2015, 30(5): 877-881.
(Chen M, Zhang S Y. Prescribed performance robust controller design for nonlinear systems based on backstepping[J]. Control and Decision, 2015, 30(5): 877-881.)
- [9] Liu Y, Liu X P, Jing Y W, et al. Design of finite-time H_∞ controller for uncertain nonlinear systems and application[J]. International Journal of Control, 2018, 3(5): 1-28.
- [10] Wang F, Chen B, Lin C, et al. Adaptive neural network finite-time output feedback control of quantized nonlinear systems[J]. Automatica, 2008, 48(6): 1-10.
- [11] Wang L X, Mendel J M. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1992, 3(5): 807-814.
- [12] Qian C J, Lin W. Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization[J]. Systems and Control Letters, 2001, 42(3): 185-200.
- [13] Yu S G, Yu X H. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding modes[J]. Automatica, 2005, 41(11): 1957-1964.

作者简介

陈明(1977-), 女, 副教授, 博士, 从事非线性系统容错控制、预设性能控制等研究, E-mail: cm8061@sina.com;

李小华(1964-), 女, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统结构与控制、工业过程建模与控制等研究, E-mail: lixiaohua6412@163.com.

(责任编辑: 齐 霖)