

# 控制与决策

Control and Decision

## 一种广义次成分提取算法及其收敛性分析

杜柏阳, 孔祥玉, 冯晓伟, 高迎彬, 罗家宇

引用本文:

杜柏阳, 孔祥玉, 冯晓伟, 等. 一种广义次成分提取算法及其收敛性分析[J]. 控制与决策, 2020, 35(6): 1505–1511.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1151>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 多维广义次成分提取准则及自适应算法

Multiple minor generalized eigenvectors extraction information and its adaptive algorithm

控制与决策. 2019, 34(1): 105–112 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1028>

### 自稳定的双目的特征对提取算法及其收敛性分析

Unified self-stabilizing eigen-pairs extraction algorithm and its convergence analysis

控制与决策. 2017, 32(4): 600–606 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0317>

### 并行提取多个次成分的改进型M?ller算法

Modified M?ller algorithm for multiple minor components extraction

控制与决策. 2017, 32(3): 493–497 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1382>

### 基于并行Kleinman迭代算法的Markov跳变系统优化 $H^\infty$ 控制

Optimal  $\infty$  control of Markov jump systems based on parallel Kleinman iteration algorithm

控制与决策. 2016(3): 559–563 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1898>

### 一种新的相位角编码量子进化算法

A new phase angle encoded quantum evolutionary algorithm

控制与决策. 2015(4): 739–744 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2013.1600>

# 一种广义次成分提取算法及其收敛性分析

杜柏阳<sup>†</sup>, 孔祥玉, 冯晓伟, 高迎彬, 罗家宇

(火箭军工程大学 导弹工程学院, 西安 710025)

**摘要:** 广义次成分分析 (generalized minor component analysis, GMCA) 在现代信号处理的许多领域具有重要作用. 目前现有的大多算法不能同时具备与算法对应的信息准则, 以及收敛性、自稳定性和多个广义次成分提取的性能. 针对上述问题, 利用一种新的信息传播规则, 推导出一种广义次成分提取算法, 并采用确定离散时间方法 (deterministic discrete time, DDT) 对算法的全局收敛性能进行分析; 同时, 通过理论分析算法的收敛性能与算法初始状态的关系, 表明算法具有自稳定性. 进一步地, 探索了算法在多重广义次成分提取方面的应用. 相比之前的算法, 所提算法具有更快的收敛速度. Matlab 仿真验证了所提出算法的各项性能.

**关键词:** 广义次成分分析; 确定性离散时间; 收敛性分析; 自稳定性分析

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## A generalized minor component extraction algorithm and its convergence analysis

DU Bo-yang<sup>†</sup>, KONG Xiang-yu, FENG Xiao-wei, GAO Ying-bin, LUO Jia-yu

(College of Missile Engineering, The Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

**Abstract:** Generalized minor component analysis (GMCA) has played a vital role in many areas of the modern signal processing. Up to now, few algorithms can possess four properties together, which are the information criterion corresponding to the algorithm, convergence property, self-stabilizing property and ability of extracting multiple generalized minor components. To deal with this problem, a novel information criterion is proposed and based on the criterion, a generalized minor component extraction algorithm is derived. Then, the global convergence of the algorithm is analyzed using the deterministic discrete time method. Besides, self-stabilizing property is illustrated through theoretical researching on the relationship between the convergence ability and initial state of the algorithm. Furthermore, the application of the algorithm in multiple GMCs extraction is explored. In contrast with the existing algorithms, the proposed algorithm is superior in convergence speed. The properties of the algorithm are verified by simulations in Matlab.

**Keywords:** generalized minor component analysis (GMCA); deterministic discrete time (DDT); convergence analysis; self-stabilizing property

## 0 引言

在现代信息处理过程中, 广义次成分分析 (generalized minor component analysis, GMCA) 广泛应用于数据降维<sup>[1]</sup>、自适应波束<sup>[2]</sup>、特征估计<sup>[3]</sup>和机器学习<sup>[4]</sup>等问题. 通常, 广义次成分是指在由输入信号的自相关矩阵组成的矩阵束中, 与前  $r$  个最小特征值对应的特征向量. 由这些特征向量张成的空间被称为广义次子空间 (generalized minor subspace, GMS).

在当前 GMCA 问题的研究中, 神经网络方法因为具有良好的收敛性等优点, 在近些年引起了许多

学者的关注, 多位学者从不同的角度提出了 GMCA 的解决方案. Ye 等<sup>[5]</sup>从线性判别分析的角度提出了一种在线自适应 GMCA 算法, 但是其收敛速度不能总保持在理想的状态上. 针对这个问题, Nguyen 等<sup>[6]</sup>通过改进幂算法和 MOX(modified oja-xu) 算法提出了两个不同的 GMCA 算法. 分析可知, 所提算法具有良好的收敛性能, 只是在多个广义次成分提取方面尚未开展研究, 同时其算法的自稳定性能也没有在理论上展开讨论. 实际上, 多个广义次成分的提取性能和算法的自稳定性在许多实际应用中扮演着重要的角色. Yang 等<sup>[7]</sup>通过拓展投影法提出了一系列基

收稿日期: 2018-08-25; 修回日期: 2019-02-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61374120, 61673387).

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: duboyange@163.com.

于回归最小二乘算法的自适应方法来提取广义次子空间<sup>[8]</sup>,为探讨多个广义次成分的提取问题开拓了思路.然而,无论是Nguyen算法还是Yang算法都需要在已有算法上改进,这限制了算法在理论上进一步推广探讨的可能性,因此人们需要更多地研究基于信息准则的算法.

对于神经网络算法而言,收敛性分析具有十分重要的意义.通过对算法进行收敛性分析,可以得知算法在不同信号下具有不同表现的原因.实质上,神经网络算法本身是一种随机离散时间(stochastic discrete time, SDT)系统.学者们主要通过间接方法对其展开分析,目前为止,分析方法大致分为两大类.传统的方法是采用确定性连续时间方法(deterministic continuous time, DCT)<sup>[9-12]</sup>.DCT方法的核心是,在假设算法步长微小到可以忽略其对算法性能影响的前提下,将算法形式转化为对应的常微分方程(ordinary differential equation, ODE)的形式,通过分析该方程性质,从而获得算法的收敛条件.该方法确实能够分析算法的收敛性能,但受到一个较强假设的局限<sup>[13]</sup>.另一种分析方法是DDT方法,该方法直接分析原算法的离散形式,这样可以更加精确地研究离散情况下算法的收敛过程,从而避免上述问题.不仅如此,DDT方法还可以求出保证算法收敛性时算法对步长的约束条件<sup>[14]</sup>.

当前,针对广义次成分的算法中同时具备与算法对应的信息准则,以及收敛性、自稳定性和多重广义次成分提取多项优点的还比较少.因此,本文在某信息准则的基础上,提出一种新的信息传播规则,基于该规则提出一种新型的广义次成分提取算法,并且采用DDT方法分析其算法收敛性.不仅如此,还探讨了算法的自稳定性和实现多重广义次成分的方式,并通过Matlab仿真验证了本文算法在理论分析基础上的各项性能.

## 1 算法的提出

广义成分提取是寻找两束信号的公共成分或者公共子空间,其基本关系表达为

$$\mathbf{C}_y \mathbf{v} = \lambda \mathbf{C}_x \mathbf{v}. \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{C}_y = E[\mathbf{y}(k)\mathbf{y}^T(k)]^T$  是输入信号  $\mathbf{y}$  的自相关矩阵,  $\mathbf{C}_x = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)]^T$  是输入信号  $\mathbf{x}$  的自相关矩阵,且输入信号  $\mathbf{x}(k)$  和  $\mathbf{y}(k)$  为  $n$  维实向量;  $\lambda_i$  和  $\mathbf{v}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 是矩阵束  $(\mathbf{C}_x, \mathbf{C}_y)$  的特征值和特征向量,同一个  $i$  对应的特征值和特征向量称为一组特征对.通过式(1)容易知道,所有的特征向量都是单

位化的、相互正交的,即  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{C}_x \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 且  $\delta_{ij}$  是 Kronecker 函数.假设特征值升序排列,即满足  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ ,则最大特征值对应的特征向量则为广义主成分;与之相反,最小特征值对应的特征向量就是广义次成分.本文针对信号中广义次成分的提取问题开展研究,从而得到一种新的提取算法.

本文基于 AMEX 准则<sup>[15]</sup>,提出一种新的信息传播准则:

$$\min J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} [\mathbf{w}^T \mathbf{C}_y \mathbf{w} - \ln(\mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w})], \quad (2)$$

其中  $\mathbf{w}$  为包含信号特征信息的向量.设计该函数的目的是,当且仅当包含信号中最小特征值对应的特征向量时,函数才能取得最小.等号右边的两个乘法项都包含了信号的特征值信息.通过对式(2)分析可知,该准则不需要通过经验估计参数,并且状态矩阵的初始状态与对应算法的收敛能力没有约束关系.同时,采用自然对数是为了降低计算过程中的数值误差.通过推导信息传播规则,可以获得一种新的广义次成分提取方法,即

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) = \\ \mathbf{w}(k) - \eta [\mathbf{C}_x^{-1} \mathbf{C}_y \mathbf{w}(k) - \mathbf{w}(k) (\mathbf{w}^T(k) \mathbf{C}_x \mathbf{w}(k))^{-1}]. \end{aligned} \quad (3)$$

其中:学习因子  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\mathbf{w}(k)$  为  $k$  时刻的状态向量.与式(2)不同,式(3)的  $\mathbf{w}(k)$  处于离散形式.

实际上,式(3)表达的是算法的DDT系统.DDT系统对原离散系统的各个变量应用条件期望算子,这样得到的形式有利于简化算法自稳定性分析和收敛性分析,本文后续的讨论和分析也采用该系统.在处理实时输入信号时,该算法需要用自相关矩阵的估计值  $\hat{\mathbf{C}}_x$  和  $\hat{\mathbf{C}}_y$  替代式中的  $\mathbf{C}_x$  和  $\mathbf{C}_y$ .自相关矩阵的估计值可以通过窗口函数<sup>[14]</sup>获得,即

$$\hat{\mathbf{C}}_x(k+1) = \alpha_1 \hat{\mathbf{C}}_x(k) + \mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1), \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_y(k+1) = \alpha_2 \hat{\mathbf{C}}_y(k) + \mathbf{y}(k+1)\mathbf{y}^T(k+1), \quad (5)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$  都是遗忘因子.为了避免直接求解矩阵的逆,  $\hat{\mathbf{C}}_x$  矩阵的逆  $\mathbf{Q}_x$  可通过引理<sup>[16]</sup>求解,即

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_x(k+1) = \\ \frac{1}{\alpha_2} \left[ \mathbf{Q}_x(k) - \frac{\mathbf{Q}_x(k)\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{Q}_x(k)}{\alpha_2 + \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{Q}_x(k)\mathbf{x}(k+1)} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2 算法的自稳定性

自稳定性是指算法迭代过程中,以任意初始值开始,状态向量总是能够移动到稳定的点,其具体表现是状态向量的模值总是收敛到一个固定值,这体

现出算法在任意初始状态下的收敛能力. Cirrincione等<sup>[11]</sup>通过研究多个算法的稳定发现,缺乏自稳定性能的算法是潜在发散的.因此,对自稳定性分析十分必要.

根据范数理论<sup>[17]</sup>,定义状态向量  $w$  的矩阵导引范数为  $\|w\|_{C_x} = \sqrt{w^T C_x w}$ . 状态向量的模值变化规律可以通过其比例变化分析获得,根据式(3)可得如下定理.

**定理1** 在学习因子足够小,且输入向量有界的情况下,在式(3)中,  $w$  的  $C_x$  矩阵导引范数总能够收敛到常数1.

**证明** 首先求解  $w(k+1)$  的矩阵导引范数,根据式(3),有

$$\begin{aligned} & \|w(k+1)\|_{C_x}^2 = \\ & w^T(k+1)C_x w(k+1) = \\ & [w(k) - \eta[C_x^{-1}C_y w(k) - \\ & w(k)(w^T(k)C_x w(k))^{-1}]]^T C_x [w(k) - \\ & \eta[C_x^{-1}C_y w(k) - w(k)(w^T(k)C_x w(k))^{-1}]] = \\ & w^T(k)C_x w(k) - 2\eta[w^T(k)C_y w(k) - 1] + o(\eta^2) = \\ & \|w(k)\|_{C_x}^2 - 2\eta(\|w(k)\|_{C_y}^2 - 1). \end{aligned} \tag{7}$$

考虑到学习因子足够小,高阶项  $o(\eta^2)$  对范数影响在后续的研究中可以被忽略.由此可知

$$\begin{aligned} & \frac{\|w(k+1)\|_{C_x}^2}{\|w(k)\|_{C_x}^2} = \\ & \frac{\|w(k)\|_{C_x}^2 - 2\eta(\|w(k)\|_{C_y}^2 - 1)}{\|w(k)\|_{C_x}^2} = \\ & 1 - \frac{2\eta}{\|w(k)\|_{C_x}^2} (\|w(k)\|_{C_y}^2 - 1) \\ & \begin{cases} > 1, \|w(k)\|_{C_y}^2 < 1; \\ = 1, \|w(k)\|_{C_y}^2 = 1; \\ < 1, \|w(k)\|_{C_y}^2 > 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

分析不同情况下状态向量的模值变化:当  $\|w(k)\|_{C_y}^2 < 1$  时,算法状态向量的模值在本次更新过程中会增大,而在  $\|w(k)\|_{C_y}^2 > 1$  时会减小,最终的趋势是  $\|w(k)\|_{C_y}^2$  逐渐稳定在常数1附近.这表明本文提出的算法具有自稳定性.  $\square$

### 3 算法收敛性分析

考虑到向量集  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是空间  $R^n$  的一组单位正交基,已知在空间  $R^n$  中,任意向量都可以表示为矩阵束特征向量的一组线性表达.那么,对于  $k \geq 0$ ,可以表示为

$$w(k) = \sum_{i=1}^n z_i(k)v_i, \tag{9}$$

其中  $z_i(k) = w^T(k)v_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为状态向量  $w(k)$  在特征向量  $v_i$  方向上的投影.

将式(9)代入(3),可得

$$z_i(k+1) = \{1 - \eta[\lambda_i - (w^T(k)C_x w(k))^{-1}]\} z_i(k). \tag{10}$$

下面通过几个定理探寻本文所提出算法的收敛性条件,并给出收敛性证明.

**定理2** 假设  $\eta\lambda_1 < 0.45$ . 如果初始状态向量有界并满足  $w^T(0)v_n \neq 0$ ,则对于所有的  $k \geq 0$ ,状态向量模值满足  $\|w(k)\| \geq \min\{(1 + \eta - \eta\lambda_1), 2\eta\}$ .

**证明** 由式(9)和(10)可得

$$\begin{aligned} & \|w(k+1)\|^2 = \\ & \sum_{i=1}^n z_i^2(k+1) = \\ & \sum_{i=1}^n \{1 - \eta[\lambda_i - (w^T(k)C_x w(k))^{-1}]\} z_i^2(k) \geq \\ & \{1 - \eta[\lambda_1 - (w^T(k)C_x w(k))^{-1}]\} \|w(k)\|^2. \end{aligned} \tag{11}$$

不妨假设  $s = \|w(k)\|_{C_x}^2, f(s) = \|w(k+1)\|^2$ . 在区间  $[0, 1]$  可定义一个可微函数,即

$$f(s) = (1 + \eta(s^{-1} - \lambda_1))^2 s. \tag{12}$$

对式(12)求微分可得

$$\dot{f}(s) = (1 + \eta(s^{-1} - \lambda_1))(1 - \eta(s^{-1} + \lambda_1)). \tag{13}$$

令  $\dot{f}(s) = 0$ ,可以求解函数  $f(s)$  的极点为

$$s_1 = -\frac{\eta}{1 - \eta\lambda_1}, s_2 = \frac{\eta}{1 - \eta\lambda_1}. \tag{14}$$

容易分析得知,在区间  $[0, 1]$  以内,  $f(s)$  有下界. 当  $0 < \eta(1 - \eta\lambda_1)^{-1} < 1$  时,  $f(s)$  是有唯一极小点的,即

$$\min f(s) = f\left(\frac{\eta}{1 - \eta\lambda_1}\right) = 2\eta. \tag{15}$$

因此,对于  $k \geq 0$ ,总有

$$\|w(k)\| \geq \min\{(1 + \eta - \eta\lambda_1), \sqrt{2\eta}\}. \quad \square$$

定理2证明了状态向量的有界性.那么,如果在定理1成立的同时,状态向量能够实现  $\lim_{k \rightarrow \infty} w(k) = \pm \lambda_n^{-\frac{1}{2}} v_n$  的收敛,则说明该算法具有收敛性.

首先讨论  $\{z_i(k)\}$  序列的保号性.利用定理2分析式(10)可知

$$\begin{aligned} & 1 - \eta[\lambda_i - (w^T(k)C_x w(k))^{-1}] > \\ & 1 - \eta\lambda_1 \geq 1 - 0.45 > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

这说明了  $\{z_i(k)\}$  序列在  $k > 0$  时满足保号性.式(9)可分解为两个部分,即

$$\mathbf{w}(k) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i(k)\mathbf{v}_i + z_n(k)\mathbf{v}_n. \quad (17)$$

然后分别分析  $\{z_i(k)\}$  序列的前半部分和后半部分的收敛性能.

**定理3** 如果  $\eta\lambda_1 < 0.45$  且初始向量有界, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_i(k) = 0, i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

**证明** 对于  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , 有

$$\begin{aligned} \left[ \frac{z_i(k+1)}{z_n(k+1)} \right]^2 &= \\ \left[ \frac{1 - \eta\lambda_i + \eta(\mathbf{w}^T(k)\mathbf{C}_x\mathbf{w}(k))^{-1}}{1 - \eta\lambda_n + \eta(\mathbf{w}^T(k)\mathbf{C}_x\mathbf{w}(k))^{-1}} \right] \frac{z_i^2(k)}{z_n^2(k)} &= \\ \left[ 1 + \frac{\eta(\lambda_n - \lambda_i)}{1 - \eta\lambda_n + \eta(\mathbf{w}^T(k)\mathbf{C}_x\mathbf{w}(k))^{-1}} \right] \frac{z_i^2(k)}{z_n^2(k)}. \end{aligned} \quad (18)$$

定义  $\sigma_k = \frac{\eta(\lambda_n - \lambda_i)}{1 - \eta\lambda_n + \eta(\mathbf{w}^T(k)\mathbf{C}_x\mathbf{w}(k))^{-1}}$ , 式(18)可以改写为

$$\begin{aligned} \left[ \frac{z_i(k+1)}{z_n(k+1)} \right]^2 &= \\ \left[ \frac{z_i(k)}{z_n(k)} \right]^2 (1 + \sigma_k) &= \\ \left[ \frac{z_i(k-1)}{z_n(k-1)} \right]^2 (1 + \sigma_k)(1 + \sigma_{k-1}) &= \dots = \\ \left[ \frac{z_i(0)}{z_n(0)} \right]^2 \prod_{j=1}^k (1 + \sigma_j). \end{aligned} \quad (19)$$

分析式(18)可知, 如果  $z_i(k)$  有界, 且  $-1 < \sigma_k < 0$ , 则结论成立. 已知  $1 - \eta\lambda_n + \eta(\mathbf{w}^T(k)\mathbf{C}_x\mathbf{w}(k))^{-1} > 1 - \eta\lambda_n > 1 - \eta\lambda_1 > 0.55$  和  $\lambda_n \leq \lambda_i$ , 由此可以得到  $\sigma_k < 0$ . 另外,

$$\begin{aligned} -\sigma_k &= \frac{\eta(\lambda_i - \lambda_n)}{1 - \eta\lambda_n + \eta(\mathbf{w}^T(k)\mathbf{C}_x\mathbf{w}(k))^{-1}} < \\ \frac{\eta\lambda_1}{1 - \eta\lambda_1} &< \frac{0.45}{0.55} = 0.818 < 1, \end{aligned} \quad (20)$$

这表明  $1 + \sigma_j \in (0, 1), j \in N^+$ . 于是, 对于  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_i(k) = 0$  是成立的.  $\square$

针对序列的后半部分, 可通过如下定理分析.

**定理4** 如果  $\eta\lambda_n < 0.20$ , 且初始向量有界, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_n(k) = \pm \lambda_n^{-\frac{1}{2}}.$$

**证明** 不妨设一个足够大的自然数  $k_0$ , 由定理3可知, 存在  $k > k_0$  使  $\mathbf{w}(k) = z_n(k)\mathbf{v}_n$ , 有

$$z_n(k+1) = \{1 - \eta[\lambda_n - (z_n(k))^{-2}]\}z_n(k), \quad (21)$$

可得

$$\begin{aligned} z_n(k+1) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}} &= \\ \{1 - \eta[\lambda_n - (z_n(k))^{-2}]\}z_n(k) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}} &= \\ (z_n(k) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}})(1 - \eta\lambda_n - \eta\lambda_n^{\frac{1}{2}}z_n^{-1}(k)). \end{aligned} \quad (22)$$

此时,

$$\begin{aligned} \frac{z_n(k+1) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}}{z_n(k) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}} &= \\ 1 - \eta\lambda_n - \eta\lambda_n^{\frac{1}{2}}z_n^{-1}(k) &> \\ 1 - \eta\lambda_n - \eta\lambda_n^{\frac{1}{2}}(2\eta)^{-\frac{1}{2}} &> \\ 1.5 - (\sqrt{\eta\lambda_n} + 2^{-\frac{1}{2}})^2 &> 0.167 > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

设  $\beta = 1 - \eta\lambda_n - \eta\lambda_n^{\frac{1}{2}}z_n^{-1}(k)$ , 可得

$$\begin{aligned} |z_n(k+1) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}| &\leq \\ |z_n(k) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}|\beta &\leq \dots \leq |z_n(0) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}|\beta^{k+1}. \end{aligned} \quad (24)$$

为了验证  $\{z_n(k)\}$  序列的收敛特性, 假设存在  $k_1 > k_2 > k_0$ , 其差值的模为

$$\begin{aligned} |z_n(k_1) - z_n(k_2)| &= \\ \left| \sum_{r=k_2}^{k_1-1} z_n(r+1) - z_n(r) \right| &\leq \\ \left| \sum_{r=k_2}^{k_1-1} \eta\lambda_n z_n^{-1}(r)(z_n(r) + \lambda_n^{-\frac{1}{2}})(z_n(r) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}) \right| &\leq \\ \eta\lambda_n(2\eta)^{-\frac{1}{2}}((2\eta)^{\frac{1}{2}} + \lambda_n^{-\frac{1}{2}}) \left| \sum_{r=k_2}^{k_1-1} (z_n(r) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}) \right| &\leq \\ \Pi \sum_{r=k_2}^{k_1-1} (z_n(r) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}) &\leq \Pi \sum_{k_0}^{+\infty} (z_n(r) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}) \leq \\ \frac{\Pi k_0 e^{-\varepsilon k_0}}{(1 - e^{-\alpha})^2} &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi &= \eta\lambda_n(2\eta)^{-\frac{1}{2}}((2\eta)^{\frac{1}{2}} + \lambda_n^{-\frac{1}{2}})|z_n(0) - \lambda_n^{-\frac{1}{2}}|, \\ \alpha &= -\ln \beta. \end{aligned}$$

根据柯西数列的定义可知,  $\{z_n(k)\}$  序列具有收敛性, 而且收敛到一个定常数. 假设该常数为  $z_n^*$ , 有

$$z_n^* = \{1 - \eta[\lambda_n - (z_n^*)^{-2}]\}z_n^*, \quad (26)$$

可以解得  $z_n^* = \pm \lambda_n^{-\frac{1}{2}}$ .  $\square$

**注1** 综合定理2~定理4, 本文所提出算法具有收敛性的条件是  $\eta\lambda_n < 0.20, \eta\lambda_1 < 0.45$ , 初始状态向量有界并满足  $\mathbf{w}^T(0)\mathbf{v}_n \neq 0$ . 由分析过程可知, 采用DDT方法分析该算法的收敛性时, 需要特别考虑自相关矩阵估计的准确程度, 因此在式(3)和(4)中遗忘因子的选择需要结合与算法和实际信号相匹配. 同时, 结合定理3和定理4可知, 状态向量收敛到

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{w}(k) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i(k)\mathbf{v}_i + z_n(k)\mathbf{v}_n = \pm \lambda_n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{v}_n.$$

#### 4 多重广义次成分提取

在现代信号处理中, 单个特征的提取往往存在局限性, 在本节中主要讨论所提出算法在多个广义次

成分提取方面的可行性及其成立条件. 根据矩阵理论<sup>[17]</sup>,通过对自相关矩阵作合理的调整,重复单次提取过程可以得到多个广义次成分.

带调整矩阵的算法DDT系统表示如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j(k+1) = & \mathbf{w}_j(k) - \eta[\mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{C}_y + \mathbf{M}_j(k))\mathbf{w}_j(k) - \\ & \mathbf{w}_j(k)(\mathbf{w}_j^T(k)\mathbf{C}_x\mathbf{w}_j(k))^{-1}]. \end{aligned} \quad (27)$$

其中:  $j \in \{1, 2, \dots, n_{\text{GMC}}\}$ ,  $n_{\text{GMC}}$ 是需要提取GMC的个数;  $\mathbf{M}$ 是修正矩阵,其中  $\mathbf{M}_1 = 0$ ,且第  $j$ 次提取使用的  $\mathbf{M}_j$ 需要借助第  $j-1$ 次提取的结果,即

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_j = \mathbf{M}_{j-1} + \tau \frac{\mathbf{C}_x \mathbf{w}_{j-1} \mathbf{w}_{j-1}^T \mathbf{C}_x}{\mathbf{w}_{j-1}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}_{j-1}} = \\ \tau \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\mathbf{C}_x \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{C}_x}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}_i}, \end{aligned}$$

$\tau$ 是一个常量.

**定理5** 对于  $j \in \{1, 2, \dots, n_{\text{GMC}}\}$ 而言,如果  $\mathbf{w}_j^T(0)\mathbf{C}_x\mathbf{v}_n \neq 0, \eta[\lambda_1 + (n_{\text{GMC}} - 1)] < 0.45$ ,则有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}_j(k) = \pm \lambda_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}_{n-j+1}$ .

**证明**  $j$ 次提取后,自相关矩阵的更新公式为

$$\mathbf{C}_y + \mathbf{M}_{j+1} = \mathbf{C}_y + \mathbf{M}_j + \tau \frac{\mathbf{C}_x \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j^T \mathbf{C}_x}{\mathbf{w}_j^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}_j}. \quad (28)$$

由文献[18]可知

$$\tau = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j}. \quad (29)$$

其中:  $\lambda_{i,j+1} \geq \lambda_{i,j}, \lambda_{i+1,*} \geq \lambda_{i,*}$ , “\*”表示任意数字;  $\lambda_{i,j}$ 表示第  $j$ 次提取中的第  $i$ 个特征值;  $\mathbf{M}$ 的物理意义同式(27). 容易知道  $\mathbf{M}_1 = 0$ ,所以当  $j = 1$ 时,参考定理2~定理4,这部分的收敛过程相似于单个广义次成分提取,结论为  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{w}_1(k) = \pm \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}_n$ . 当  $j = 2$ 时,有

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_y + \mathbf{M}_{j+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{C}_x \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + \tau \mathbf{C}_x \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T = \\ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{C}_x \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + (\tau + \lambda_n) \mathbf{C}_x \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T. \end{aligned} \quad (30)$$

注意,因为  $\tau + \lambda_n \geq \lambda_1$ ,所以此时最小特征值是  $\lambda_{n-1}$ . 再次应用式(28)和(29),可得  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{w}_2(k) = \pm \lambda_{n-1}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}_{n-1}$ . 以此类推,最终可得  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{w}_j(k) = \pm \lambda_{n+1-j}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}_{n+1-j}$ ,其中  $j \in \{1, 2, \dots, n_{\text{GMC}}\}$ .  $\square$

**注2** 定理5说明,通过设计一个合适的修正矩阵,所提出算法就可以完成多重广义次成分提取的任务. 实际上,修正矩阵设计方案可以针对算法在具体的应用环节进行定制性设计,这一点与董海迪等<sup>[19]</sup>

提出的采用加权矩阵方法实现并行提取方案是不同的. 后者正向量的特征提取方面在计算量上具有优势,而本文算法考虑了加入偏好信息的方式和方法,兼顾算法功能和计算复杂度,对于一些需要通过连续回归获得构建模型的数据分析问题具有重要意义.

### 5 仿真实验

针对算法在理论分析中的各种性能,用 Matlab 仿真加以验证. 主要设计3个实验:第1个实验验证算法的DDT系统是否具有收敛性能,并将其收敛性能同已知的算法作比较;第2个实验主要说明算法的自稳定性;第3个实验验证该算法在推广到多个广义次成分提取时的有效性. 为说明算法的可比性,在生成数据阶段预先统一设定特征信号,在各个仿真算例中,使用相同自相关矩阵的信号. 具体的矩阵特征值随机生成. 通过 Matlab 生成一组随机矩阵束  $(\mathbf{C}_x, \mathbf{C}_y)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_x = & \begin{bmatrix} 0.0644 & 0.0092 & 0.0027 \\ 0.0092 & 0.0681 & -0.0160 \\ 0.0027 & -0.0160 & 0.0803 \\ 0.0244 & -0.0004 & -0.0192 \\ -0.0128 & -0.0013 & -0.0034 \\ -0.0126 & 0.0239 & 0.0161 \\ 0.0244 & -0.0128 & -0.0126 \\ -0.0004 & -0.0013 & 0.0239 \\ -0.0192 & -0.0034 & 0.0161 \\ 0.0675 & 0.0087 & 0.0082 \\ 0.0087 & 0.0690 & 0.0287 \\ 0.0082 & 0.0287 & 0.0715 \end{bmatrix} \rightarrow \\ \mathbf{C}_y = & \begin{bmatrix} 0.0614 & 0.0174 & -0.0127 \\ 0.0174 & 0.0661 & -0.0189 \\ -0.0127 & -0.0189 & 0.0578 \\ -0.0049 & 0.0052 & 0.0008 \\ 0.0110 & 0.0131 & -0.0169 \\ -0.0294 & -0.0226 & 0.0317 \\ -0.0049 & 0.0110 & -0.0294 \\ 0.0052 & 0.0131 & -0.0226 \\ 0.0008 & -0.0169 & 0.0317 \\ 0.0473 & 0.0024 & -0.0023 \\ 0.0024 & 0.0506 & -0.0082 \\ -0.0023 & -0.0082 & 0.0471 \end{bmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

并通过矩阵特征值分解的方法求解出该矩阵束的特征值  $\lambda_1 = 2.7015, \lambda_2 = 2.2032, \lambda_3 = 0.6181, \lambda_4 =$

0.5673,  $\lambda_5 = 0.4561$ ,  $\lambda_6 = 0.2028$ , 以及特征向量作为评判广义次成分的离线基准, 验证算法提取广义次成分的有效性. 在所有的算例中, 仿真结果取的是40次蒙特卡洛仿真的平均结果.

### 5.1 算法收敛性

由定理2~定理4可知, 在算法的DDT系统中, 各个投影长度  $z_i(k)$  具有两个特性, 对于  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $z_i(k)$  逐渐收敛到0; 对于  $i = n$ ,  $z_n(k)$  逐渐收敛到  $\lambda_n^{-\frac{1}{2}}$ . 上述两个特性同时满足可以体现出算法的收敛特性. 为了体现本文算法的优越性, 将该算法同Nguyen等<sup>[6]</sup>在2013年提出的GMOX算法进行比较. 另外, 根据定理约束, 确定学习因子  $\eta = 0.1$ . 状态向量的初始值  $w(0)$  是随机生成的.

如图1所示, 本文算法DDT系统的投影长度均为实线. 容易看出, 图中标示  $z_n(k)$  的变化情况明显与其他  $z_i(k)$  不同,  $z_n(k)$  能够快速收敛到  $\lambda_n^{-\frac{1}{2}}$  ( $(0.2028)^{-\frac{1}{2}} = 2.2201$ ), 其他  $z_i(k)$  均收敛到0. 与此相似, GMOX算法的  $z_n(k)$  和  $z_i(k)$  也能收敛到相应的值. 这说明本文提出的算法和GMOX算法都能够顺利完成广义次成分提取的任务. 但是两者的速度有着明显的差别, 为了更加充分体现这种差别, 图1的横轴采用对数递增. 表1对两种算法的投影长度进行了详细的数据对比, 为了统一标准, 两种算法的收敛精度均为  $5 \times 10^{-4}$ . 对比结果表明, 在相同初始条件下, 本文算法中平均收敛次数的数量级为  $10^2$ , 而GMOX算法中该值接近  $10^4$ . 这说明本文提出的算法在收敛速度上具有优势.

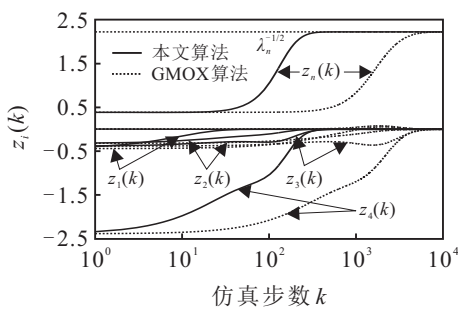


图1 DDT系统的投影长度变化以及算法对比

表1 各个投影长度在  $5 \times 10^{-4}$  精度下收敛时的平均步长

序号	本文算法	GMOX算法
1	20	8263
2	72	1095
3	394	7275
4	559	9331
5	662	9995
6	513	9161

### 5.2 算法自稳定性

自稳定性验证算法主要验证在不同的初始条件下, 状态向量的范数能否保证稳定在确定的数值. 随机生成一个向量作为状态向量的初始值  $w(0)$ , 并且将该向量的范数值规范化为1.5、1.0和0.5, 从而设置3种范数值不同的初始条件, 即大于、等于和小于1.0. 在3种初始条件下采用同一个初始向量  $w(0)$ . 这3种情况下, 状态向量的  $C_x$  和  $C_y$  范数值会有不同的变化方式. 此外, 根据定理条件, 在该算例中选择学习因子  $\eta = 0.1$ .

算法自稳定性的仿真结果如图2所示. 3种初始条件的变化曲线分别用实线、虚线和点画线表示. 但无论是哪一种初始情况, 两种范数值变化都在  $10^2$  这个数量级上收敛到各自特定的值,  $C_y$  范数稳定在1, 而  $C_x$  范数稳定在  $\lambda_n^{-\frac{1}{2}}$  (这一点与算法收敛性验证的结论相一致). 同时, 这是一个多次平均的结果, 因而能够反映该算法的一般规律. 在3种情况下变化方式的对比表明该算法具有自稳定性.

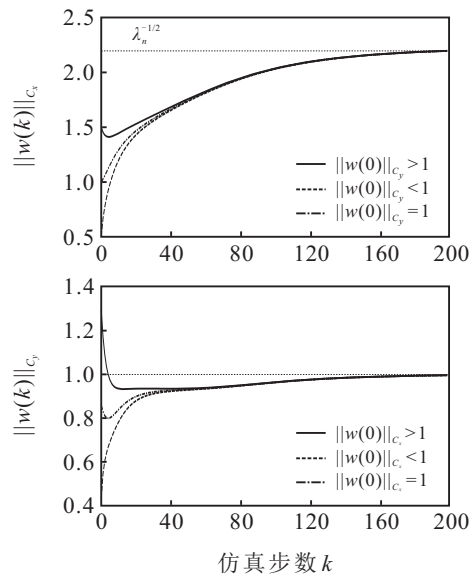


图2 算法的自稳定性

### 5.3 多重广义次成分提取

通过计算方向余弦来表现算法提取多个广义次成分的性能. 方向余弦主要表现广义次成分方向的收敛速度, 表达为

$$\text{DireCou}(i, k) = \frac{\|w_i^T(k)u_i\|}{\|w_i(k)\| \cdot \|u_i\|}, \quad (31)$$

其中  $w_i$  和  $u_i$  分别是信号特征中相互对应的估计和真实的次成分, 易知在两个方向相同时该函数值为1.

由图3可知, 虽然在不同的方向上提取速度不同, 但是每个状态向量最终收敛到各自对应的信号广义次成分的方向, 并且仿真步数基本保持在  $10^2$  这个数量级或者更低一点. 3条曲线均收敛到1的事实表明,

该算法完全能够提取多个广义次成分.

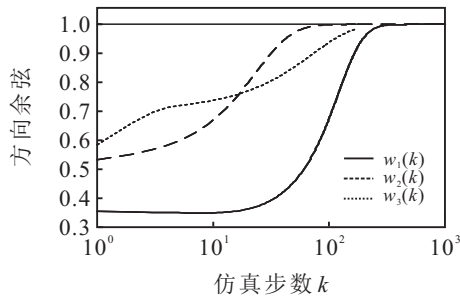


图3 算法对多重广义次成分的提取

## 6 结论

本文提出了一种新型的广义次成分提取算法. 该算法具有对应的信息准则,并且具有良好的收敛性和自稳定性. 其中,通过范数理论和矩阵运算证明了算法的自稳定性,同时通过DDT方法找出该算法实现收敛的条件. 另外,结合修正矩阵的设计探讨了该算法多重广义次成分提取的实现方法. 最后,采用不同形式的实验设计分别对上述特性进行了Matlab仿真验证. 理论和仿真实验表明,所提算法完全具备以上各个特性. 收敛性能仿真的对比实验表明,所提算法在同类算法中具有更好的收敛速度.

## 参考文献(References)

- [1] Gao K, Ahmad M O, Swamy M. Learning algorithm for total least-squares adaptive signal processing[J]. Electronics Letters, 1992, 28(4): 430-432.
- [2] Feng D Z, Zheng W X, Jia Y. Neural network learning algorithms for tracking minor subspace in high-dimensional data stream[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2005, 16(3): 513-521.
- [3] Mathew G, Reddy V U. Development and analysis of a neural network approach to pisarenko's harmonic retrieval method[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(3): 663-667.
- [4] Wang R, Yao M L, Cheng Z, et al. Interference cancellation in GPS receiver using noise subspace tracking algorithm[J]. Signal Processing, 1994, 91(2): 338-343.
- [5] Ye M, Liu Y, Wu H, et al. A few online algorithms for extracting minor generalized eigenvectors[C]. IEEE International Joint Conference on Neural Networks. Hong Kong: IEEE, 2008: 1714-1720.
- [6] Nguyen T D, Takahashi N, Yamada I. An adaptive extraction of generalized eigen subspace by using exact nested orthogonal complement structure[J]. Multidimensional System on Signal Processing, 2013, 24: 457-483.
- [7] Yang B. Projection approximation subspace tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(1): 95-107.
- [8] Yang J, Xi H, Yang F, et al. RLS-based adaptive algorithms for generalized eigendecomposition[J]. IEEE

- Transactions on Signal Processing, 2006, 54(4): 1177-1188.
- [9] Sakai H, Shimizu K. A new adaptive algorithm for minor component analysis[J]. Signal Processing, 1998, 71: 301-308.
- [10] Nguyen T D, Yamada I. A unified convergence analysis of normalized PAST algorithms for estimating principal and minor components[J]. Signal Processing, 2013, 93(1): 176-184.
- [11] Cirrincione G, Cirrincione M, Héroult J, et al. The MCA EXIN neuron for the minor component analysis[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2002, 13(1): 160-187.
- [12] Möller R, Köries A. Coupled principal component analysis[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2004, 15(1): 214-222.
- [13] Peng D, Zhang Y. Convergence analysis of a deterministic discrete time system of Feng's MCA learning algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(9): 3626-3632.
- [14] Li H Z, Du B Y, Kong X Y, et al. A generalized minor component extraction algorithm and its analysis[J]. IEEE Access, 2018, 99(7): 1-8.
- [15] Ouyang S, Bao Z, Liao G, et al. Adaptive minor component extraction with modular structure [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(9): 2127-2137.
- [16] Toshihisa T. Fast generalized eigenvector tracking based on the power method[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(11): 969-972.
- [17] Golub G H, Van Loan C F. Matrix computations[M]. 4th ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013: 71-76.
- [18] Shougen W, Shuqin Z. An algorithm for  $Ax = \lambda Bx$  with symmetric and positive-definite A and B[J]. SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 1991, 12: 654-660.
- [19] 董海迪, 刘刚, 何兵, 等. 多维广义次成分提取准则及自适应算法[J]. 控制与决策, 2019, 34(1): 105-112. (Dong H D, Liu G, He B, et al. Multiple minor generalized eigenvectors extraction information and its adaptive algorithm[J]. Control and Decision, 2019, 34(1): 105-112.)

## 作者简介

杜柏阳(1990—), 男, 博士生, 从事信号特征提取的研究, E-mail: duboyangepgc@163.com;

孔祥玉(1967—), 男, 教授, 博士生导师, 从事工业过程故障诊断、自适应信号处理和系统建模等研究, E-mail: xiangyukong01@163.com;

冯晓伟(1986—), 男, 讲师, 博士, 从事工业过程故障诊断、信号特征提取的研究, E-mail: xiaowei121416@163.com;

高迎彬(1986—), 男, 讲师, 博士, 从事工业过程故障诊断、信号特征提取的研究, E-mail: welcome8793@sina.com;

罗家宇(1994—), 男, 硕士生, 从事工业过程故障诊断的研究, E-mail: luojiayuepgc@163.com.