

# 控制与决策

Control and Decision

采用干扰差分补偿的无切换吸引离散时间控制方法

孙明轩, 胡志云, 李威, 李鹤

引用本文:

孙明轩, 胡志云, 李威, 等. 采用干扰差分补偿的无切换吸引离散时间控制方法[J]. *控制与决策*, 2020, 35(6): 1512–1518.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1130>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### [基于椭圆吸引律的离散重复控制](#)

Discrete repetitive control based on elliptical attraction law

*控制与决策*. 2020, 35(4): 1009–1016 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0684>

### [带扰动补偿的无抖振离散重复控制器设计](#)

Chatting-free discrete-time repetitive controller design with disturbance compensator

*控制与决策*. 2017, 32(3): 467–473 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0036>

### [一种自适应吸引律离散时间控制方法](#)

A discrete-time control method based on adaptive attracting law

*控制与决策*. 2016, 31(9): 1546–1552 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0833>

### [基于约束输入变速吸引律的离散重复控制器设计](#)

Rare-variant attracting law based design of discrete-time repetitive controllers with constrained input

*控制与决策*. 2016, 31(10): 1742–1748 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0939>

### [基于死区吸引律的离散重复控制](#)

Discrete repetitive control using attracting law with dead zone

*控制与决策*. 2015(6): 977–984 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0434>

# 采用干扰差分补偿的无切换吸引离散时间控制方法

孙明轩<sup>†</sup>, 胡志云, 李 威, 李 鹤

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

**摘 要:** 提出一种基于无切换吸引律的离散控制器设计方法, 将干扰差分补偿措施嵌入吸引律中构建理想误差动态, 依据理想误差动态推导离散时间控制器. 所提控制方案既回避了抖振, 也能够有效抑制干扰. 给出稳态误差带、绝对吸引层、单调减区间和跟踪误差首次进入稳态误差带的最多步数的具体表达式, 用以刻画系统跟踪误差瞬态、稳态性能, 并指导控制器参数整定. 数值仿真与实验结果验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 抖振; 无切换吸引律; 参数整定; 干扰差分; 理想误差动态; 离散时间系统

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Non-switching-attracting discrete-time control method by using disturbance difference compensation

SUN Ming-xuan<sup>†</sup>, HU Zhi-yun, LI Wei, LI He

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract:** A non-switching attracting law based discrete-time control method is proposed, where the disturbance difference compensation term is embedded in order to construct the ideal error dynamics. Based on the ideal error dynamics, a discrete-time controller can be derived, by which the chattering phenomenon can be avoided. Expressions of four performance indexes, including the steady-state error band, the absolute attracting layer, the monotonically decreasing region, and the maximum number of steps of that the tracking error converges into the steady-state error band for the first time, are derived to characterize both the transient and steady-state performance of the tracking error. Numerical simulation and experiment results verify the effectiveness of the proposed control scheme.

**Keywords:** chattering; non-switching attracting laws; parameter tuning; disturbance differences; ideal error dynamics; discrete-time systems

## 0 引 言

滑模控制系统的典型特征是其控制过程具有滑动模态, 这种模态对满足匹配条件的干扰信号具有不变性, 使得闭环系统具有强抗干扰性能. 由于实现时采用计算机技术, 离散滑模控制备受人们关注, 特别是趋近律方法<sup>[1]</sup>具有稳定性分析简便, 易于控制器设计等特点, 已成为常用的离散控制技术. 目前, 人们已将这一方法推广到高相对阶情形<sup>[2]</sup>, 使其具有更为广泛的适用性.

与基于不等式到达条件的传统滑模控制方法不同, 趋近律方法采用等式到达条件, 可直接推导出控制器. 文献[1]中刻画了滑模的运动特征, 切换函数步步穿越滑模面形成了 zigzag 滑动, 给出了拟滑动模态的具体定义以及拟滑模带宽表达式. 滑模控制过程中存在的抖振问题一直是相关研究的焦点. 将趋近

律中的断续函数连续化是克服抖振的主要方法, 如边界层方法<sup>[3-4]</sup>, 以饱和函数替换符号函数. 文献[5]采用  $\frac{s}{|s| + \delta}$  替代断续函数. 文献[6]中讨论的离散趋近律是文献[5]中趋近律的特殊形式. 文献[7]分析了高氏趋近律的稳态特性, 指出其系统状态不能收敛到原点, 而是收敛到原点附近的一个区域内. 为解决此问题, 该文建议一种比例-等速-变速的组合趋近律方法. 文献[8]分别引入反正切函数和双曲正切函数修正符号函数前的系数. 文献[9]提出了一种无抖振离散滑模控制方法, 其闭环系统性能与采样周期有关. 文献[10]基于等效控制, 提出了一种非光滑滑模控制策略, 有效减小了抖振.

拟滑模带宽是衡量趋近律性能的一个重要指标, 针对高氏趋近律的分析结果详见文献[2, 11]. 在设计趋近律时, 提高扰动抑制能力, 减小拟滑模带宽, 是需

收稿日期: 2018-08-21; 修回日期: 2019-03-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573320, 61403343).

责任编委: 张维海.

<sup>†</sup>通讯作者. mxsun@zjut.edu.cn.

要特别关注的问题.文献[12]给出了切换函数从初始时刻到达滑动模态所需要的最多步数;文献[13]提出了一种广义趋近律,给出了刻画切换变量收敛过程的指标;文献[14]依据预设性能构造一种新型离散趋近律,改进了收敛性能.

通常,以极点配置方法设计控制器,会使得闭环系统性能具有渐近收敛特性.吸引律(文中所指的)刻画了有限时间收敛的动态系统,将吸引律直接用于控制系统设计(即有限时间控制系统设计),使得闭环系统性能具有有限时间收敛特性.上述滑模控制的趋近律方法要求切换面有限时间到达,趋近律即关于切换函数的吸引律.应该指出的是,常规滑模控制并未保证跟踪误差有限时间收敛.为此,切换函数的构造也应采用吸引律设计终态滑模控制,从而保证闭环系统有限时间收敛特性.

以吸引律刻画、规定闭环系统动态特性,是控制器设计吸引律方法的主要特点.由于直接采用跟踪误差信号,无需定义切换函数,这种控制器设计方法在设计步骤上更为直接、简洁<sup>[15]</sup>.吸引律方法不同于趋近律方法,两者的主要区别表现在:吸引律方法用跟踪误差取代切换函数,以原点取代切换面;趋近律方法要求有限时间达到切换面,而吸引律方法要求有限时间达到原点;吸引律方法设计的闭环系统同样具有关于参数漂移和外部干扰的鲁棒性能,不同之处是滑模控制考虑滑动模态的不变性,而吸引律方法注重稳态过程的不变性.通常的吸引律反映了未受扰动时的系统动态特性,在存在干扰情形下,直接依据吸引律方法设计的控制器无法实现.可将干扰抑制措施“嵌入”吸引律,构建具有扰动抑制作用的理想误差动态,依据构造的理想误差动态方程设计控制器.这样,闭环系统动态过程由理想误差动态所决定,且具有理想误差动态所表征的期望特征<sup>[16]</sup>.

近年来,有限时间控制系统所能达到的诱人控制性能,引起了人们的特别关注,已经发展成为一种有效的控制方法<sup>[17-18]</sup>.仍值得研究的方向有:1)构造新型吸引律,进一步丰富吸引律形式,分析相应的收敛性能;2)干扰项存在时,吸引律的收敛性能分析,这是将吸引律用于控制器设计时需要解决的问题;3)吸引律方法中干扰/不确定特性观测技术起到干扰抑制、提高系统控制性能的作用,是吸引律方法中需要研究的关键技术.另外,目前已发表文献中缺乏采用吸引律方法的离散时间控制系统时的相关研究结果.

本文提出无切换离散吸引律进行控制器设计,控制器中不含符号函数,回避了系统抖振,且将干扰抑

制措施“嵌入”理想误差动态,以抑制未知干扰对于闭环系统性能的影响.文中给出下述4个收敛性能指标:稳态误差带、绝对吸引层、同号单调递减区域以及跟踪误差首次进入稳态误差带所需的最多步数.4个指标的具体取值依赖于控制器参数,也依赖于等效干扰信号的界.给理想误差动态形式,可预先给出4个指标的具体取值,以便于衡量系统跟踪性能.文中提出干扰差分方法,可有效抑制干扰,减小等效干扰信号的界.最后通过数值仿真与电机实验所得结果,验证了所提出控制方案的有效性.

## 1 问题描述

考虑下述单输入单输出离散时间系统:

$$A(q^{-1})y_k = q^{-1}B(q^{-1})u_k + w_k. \quad (1)$$

其中: $u_k$ 、 $y_k$ 、 $w_k$ 分别为 $k$ 时刻的输入、输出及干扰信号, $A(q^{-1})$ 、 $B(q^{-1})$ 分别为延时算子 $q^{-1}$ 的多项式, $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$ , $B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}$ , $m$ 、 $n$ 分别为 $A(q^{-1})$ 、 $B(q^{-1})$ 的阶数, $b_0 \neq 0$ .

本文的控制目标是设计控制器 $u_k$ ,使系统(1)的实际输出 $y_k$ 跟踪上给定的参考信号 $r_k$ .定义跟踪误差 $e_k = r_k - y_k$ .表征系统(1)跟踪误差 $e_k$ 瞬态和稳态性能的指标包括:稳态误差带 $\Delta_{SSE}$ 、绝对吸引层 $\Delta_{AAL}$ 、单调递减区间 $\Delta_{MDR}$ ,以及误差首次进入 $\Delta_{SSE}$ 的最多步数 $[k^*]$ .具体定义如下.

1) 稳态误差带 $\Delta_{SSE}$

$$|e_k| \leq \Delta_{SSE}. \quad (2)$$

2) 绝对吸引层 $\Delta_{AAL}$

$$|e_{k+1}| \leq |e_k|, |e_k| \geq \Delta_{AAL}. \quad (3)$$

3) 单调递减区间 $\Delta_{MDR}$

$$\begin{cases} 0 < e_{k+1} < e_k, e_k > \Delta_{MDR}; \\ e_k < e_{k+1} < 0, e_k < -\Delta_{MDR}. \end{cases} \quad (4)$$

4) 最多收敛步数 $k^*$ . $e_k$ 从初始状态 $e_0$ ,经过 $k^*$ 步,进入 $\Delta_{SSE}$ .

本文针对一类无切换吸引律,推导出4个性能指标的具体表达式,用于刻画系统收敛性能.应该说明的是,由于初始条件的影响,前3个指标需经过初始步数后才能成立.通过推导,4个性能指标的取值取决于控制器参数的选取.当给定期望的性能指标,推导出的指标表达式还可用于控制器参数整定.

## 2 无切换吸引律

本文讨论文献[6]中提出的趋近律,容易看出,它是文献[5]提出的趋近律的特殊情形.不同于文献[5-6]的工作,本文采用吸引律方法.吸引律的具体形式

如下:

$$e_{k+1} = (1 - \rho(e_k))e_k, \quad (5)$$

其中  $\rho(e_k) = \frac{\delta}{|e_k| + \delta}$ , 这里  $\delta > 0$  为可调整参数. 由式(5)可以看出, 当  $e_k$  远离原点时,  $\rho(e_k) \approx 0$ , 且  $1 - \rho(e_k) \approx 1$ ; 当  $e_k$  靠近原点时,  $\rho(e_k) \approx 1$ , 且  $1 - \rho(e_k) \approx 0$ . 在误差收敛过程中, 吸引速度由初始位置起逐渐增大,  $\delta$  为用于调整吸引速度的参数.

为了提高干扰抑制性能, 将干扰抑制措施嵌入该吸引律, 构造如下理想误差动态:

$$e_{k+1} = (1 - \rho(e_k))e_k + d_{k+1}^* - d_{k+1}. \quad (6)$$

其中:  $d_{k+1}$  为  $k+1$  时刻的等效干扰;  $d_{k+1}^*$  为干扰补偿作用, 用于补偿  $d_{k+1}$ . 本文假设干扰补偿误差满足  $|d_{k+1}^* - d_{k+1}| \leq \Delta$ , 等效干扰的具体形式在第3节给出. 本文提出的吸引律方法有如下特点: 1) 不含符号函数, 能够完全避免系统抖振; 2) 调整参数  $\delta$ , 使  $\rho(e_k)$  接近于1, 能够提高系统跟踪误差收敛速度; 3) 改进的干扰抑制措施能够有效抑制干扰.

理想误差动态(6)决定了跟踪误差  $e_k$  瞬态与稳态性能, 下面给出表征  $e_k$  收敛过程的性能指标具体表达式:

$$\Delta_{\text{AAL}}, \Delta_{\text{SSE}} = \frac{\delta\Delta}{\delta - \Delta}; \quad (7)$$

$$\Delta_{\text{MDR}} = \begin{cases} \frac{\delta\Delta}{\delta - \Delta}, & \Delta < \delta \leq 2\Delta; \\ \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4\delta\Delta}}{2}, & \delta > 2\Delta. \end{cases} \quad (8)$$

$e_k$  自初始时刻至首次进入  $\Delta_{\text{SSE}}$  的最多步数为  $[k^*]$ , 其中

$$k^* = \log_{1-\rho(e_0)} \left( \frac{\rho(e_0)\Delta_{\text{SSE}} - \Delta}{|e_0|\rho(e_0) - \Delta} \right), \quad (9)$$

$e_0$  为误差初始值. 这里,  $[a]$  为不小于  $a$  的最小整数.

可以看出, 4个性能指标的表达式均与参数  $\delta$  及干扰补偿的界值  $\Delta$  有关, 因此, 在控制器设计时, 4个指标可用于指导控制器参数整定.

## 2.1 稳态误差带 ( $\Delta_{\text{SSE}}$ )

对于由理想误差动态(6)所决定的收敛过程, 误差  $e_k$  最终会收敛到  $(-\Delta_{\text{SSE}}, \Delta_{\text{SSE}})$  的对称区域内.

当  $0 < e_k \leq \Delta_{\text{SSE}}$  时, 由稳态误差带定义可知,  $e_{k+1}$  的最小值需大于  $-\Delta_{\text{SSE}}$ ,  $e_{k+1}$  的最大值需小于  $\Delta_{\text{SSE}}$ , 即

$$\begin{cases} -\Delta_{\text{SSE}} \leq \left(1 - \frac{\delta}{\delta + |e_k|}\right)e_k - \Delta \leq e_{k+1}, \\ e_{k+1} \leq \left(1 - \frac{\delta}{\delta + |e_k|}\right)e_k + \Delta \leq \Delta_{\text{SSE}}. \end{cases}$$

将  $e_k$  的最小值和最大值分别代入上式, 有

$$\begin{cases} -\Delta_{\text{SSE}} \leq -\Delta, \\ \left(1 - \frac{\delta}{\delta + \Delta_{\text{SSE}}}\right)\Delta_{\text{SSE}} + \Delta \leq \Delta_{\text{SSE}}. \end{cases}$$

将上式化简可得

$$\begin{cases} \Delta_{\text{SSE}} \geq \Delta, \\ \Delta_{\text{SSE}} \geq \frac{\delta\Delta}{\delta - \Delta}. \end{cases}$$

因此,  $\Delta_{\text{SSE}}$  可表达为

$$\Delta_{\text{SSE}} \geq \max \left\{ \frac{\Delta\delta}{\delta - \Delta}, \Delta \right\} = \frac{\Delta\delta}{\delta - \Delta}.$$

当  $-\Delta_{\text{SSE}} \leq e_k \leq 0$  时, 可推导出相同的  $\Delta_{\text{SSE}}$ .

## 2.2 绝对吸引层 ( $\Delta_{\text{AAL}}$ )

对于理想误差动态(6), 当  $|e_k|$  大于绝对吸引层的边界  $\Delta_{\text{AAL}}$  时,  $|e_k|$  会单调递减.

当  $e_k > 0$  时, 由绝对吸引层定义可得,  $e_{k+1}$  的最小值需大于  $-e_k$ ,  $e_{k+1}$  的最大值需小于  $e_k$ , 即

$$\begin{cases} e_{k+1} \leq \left(1 - \frac{\delta}{\delta + |e_k|}\right)e_k + \Delta < e_k, \\ e_{k+1} \geq \left(1 - \frac{\delta}{\delta + |e_k|}\right)e_k - \Delta > -e_k. \end{cases}$$

将上式化简可得

$$\begin{cases} \delta e_k > \Delta\delta + \Delta e_k, \\ 2e_k^2 + (\delta - \Delta)e_k - \Delta\delta > 0. \end{cases}$$

继而可解得

$$e_k \geq \max \left\{ \frac{\Delta\delta}{\delta - \Delta}, \frac{(\Delta - \delta) + \sqrt{(\delta - \Delta)^2 + 8\Delta\delta}}{4} \right\}.$$

当  $e_k < 0$  时, 同样可推得上式.

记  $M_1 = \frac{(\Delta - \delta) + \sqrt{(\delta - \Delta)^2 + 8\Delta\delta}}{4}$ ,  $M_2 = \frac{\Delta\delta}{\delta - \Delta}$ , 可将  $4(M_1 - M_2)$  表达为

$$4(M_1 - M_2) = 4\frac{\Delta\delta}{\delta - \Delta} + (\delta - \Delta) - \sqrt{(\delta - \Delta)^2 + 8\Delta\delta}. \quad (10)$$

将式(10)右端前两项平方可得

$$\begin{aligned} & \left(4\frac{\Delta\delta}{\delta - \Delta} + (\delta - \Delta)\right)^2 = \\ & (\delta - \Delta)^2 + 8\Delta\delta + \left(4\frac{\Delta\delta}{\delta - \Delta}\right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

结合式(10)和(11)可知,  $4(M_1 - M_2) > 0$ , 即  $M_1 > M_2$ . 因此, 跟踪误差绝对吸引层即为式(7).

## 2.3 单调递减区域 ( $\Delta_{\text{MDR}}$ )

在理想误差动态式(6)的作用下, 跟踪误差  $e_k$  存在单调递减区域  $\Delta_{\text{MDR}}$ . 当  $e_k$  大于单调递减区域的边界时,  $e_k$  是同号单调递减的.

当  $e_k > 0$  时, 由单调递减区域定义知,  $e_{k+1}$  的最小值需大于0,  $e_{k+1}$  的最大值需小于  $e_k$ , 即

$$\begin{cases} e_{k+1} \leq \left(1 - \frac{\delta}{\delta + |e_k|}\right)e_k + \Delta < e_k, \\ e_{k+1} \geq \left(1 - \frac{\delta}{\delta + |e_k|}\right)e_k - \Delta > 0. \end{cases}$$

化简可得

$$\begin{cases} \delta e_k > \Delta\delta + \Delta e_k, \\ e_k^2 - \Delta e_k - \Delta\delta > 0. \end{cases}$$

由上式解得

$$e_k \geq \max \left\{ \frac{\Delta\delta}{\delta - \Delta}, \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4\Delta\delta}}{2} \right\}.$$

当  $e_k < 0$  时, 同样可推得上式.

记  $M_2 = \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4\Delta\delta}}{2}$ , 由  $M_2$  和  $M_3$  分别关于  $\delta$  的导数可知,  $M_2$  是关于  $\delta$  的单调减函数, 而  $M_3$  是关于  $\delta$  的单调增函数. 因此, 只需求出  $M_2 = M_3$  时  $\delta$  的值, 便可确定两者的大小. 令  $M_2 = M_3$ ,

$$\frac{\Delta\delta}{\delta - \Delta} = \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4\Delta\delta}}{2},$$

可解得  $\delta = 2\Delta$ . 因此, 当  $\delta \in (\Delta, 2\Delta]$  时, 有  $M_2 \geq M_3$ ; 而当  $\delta \in (2\Delta, +\infty)$  时, 有  $M_2 < M_3$ . 继而, 可给出跟踪误差单调减区域边界(8).

### 2.4 收敛步数

根据理想误差动态(6), 跟踪误差有限步内可收敛于由式(7)所确定的误差带. 由式(6)可确定每个时刻的跟踪误差为

$$\begin{cases} e_1 = (1 - \rho(e_0))|e_0| + d_1^* - d_1, \\ e_2 = (1 - \rho(e_1))(1 - \rho(e_0))|e_0| + \\ \quad (1 - \rho(e_1))(d_1^* - d_1) + d_2^* - d_2, \\ \vdots \\ e_m = (1 - \rho(e_{m-1})) \times \cdots \times (1 - \rho(e_0))|e_0| + \\ \quad \sum_{i=1}^{m-1} \left( \prod_{j=1}^i (1 - \rho(e_{m-j})) (d_{m-j}^* - d_{m-j}) \right) + \\ \quad d_m^* - d_m. \end{cases}$$

由于绝对吸引层与稳态误差带边界相同, 即  $\Delta_{AAL} = \Delta_{SSE}$ , 当  $e_m > \Delta_{SSE}$  时,  $e_m < e_{m-1}$ . 由此

$$e_m \leq [1 - \rho(e_0)]^m |e_0| + \frac{1 - [1 - \rho(e_0)]^m}{\rho(e_0)} \Delta. \quad (12)$$

将由式(9)给出的  $k^*$  代入(12), 有

$$e_{k^*} \leq \frac{|e_0| \rho(e_0) \Delta_{SSE} - \Delta |e_0|}{|e_0| \rho(e_0) - \Delta} + \frac{|e_0| \Delta - \Delta_{SSE} \Delta}{|e_0| \rho(e_0) - \Delta} = \Delta_{SSE}. \quad (13)$$

因此, 跟踪误差收敛于由式(7)所确定的误差带的收敛步数最大为  $k^*$ .

### 3 干扰差分补偿策略

将式(6)描述的理想误差动态中的  $d_{k+1}^*$  用于补偿等效干扰, 本文将取为  $d_{k+1}^* = d_k$ . 给定参考信号  $r_k$  为时间变量  $k$  的多项式,  $M$  表示该多项式的最高幂次, 根据参考信号的具体形式可选择相应的干扰差分补偿. 为此, 针对  $M$  的取值首先定义等效干扰信号.

$M = 0$  时的等效干扰信号为

$$d_{k+1} = w_{k+1}; \quad (14)$$

$M = 1$  时的等效干扰信号为

$$d_{k+1} = w_{k+1} - w_k; \quad (15)$$

$M = 3$  时的等效干扰信号为

$$d_{k+1} = [(w_{k+1} - w_k) - (w_k - w_{k-1})] - [(w_k - w_{k-1}) - (w_{k-1} - w_{k-2})]. \quad (16)$$

对于更高的  $M$  取值, 也可类似定义相应的等效干扰信号. 记干扰差分步数为  $L$ , 它表示等效干扰补偿误差包含  $L$  个相继时刻的干扰信号. 例如, 在式(14)中,  $L = 2$ , 它表示两步干扰差分  $d_{k+1} - d_k = w_{k+1} - w_k$ , 其中含有  $w_{k+1}$  与  $w_k$  两个时刻的干扰信号. 一般地, 在选择等效干扰时,  $L$  的取值应满足如下条件:

$$L \geq [M] + 2. \quad (17)$$

### 4 控制器设计

依据理想误差动态式(6)和等效干扰信号  $d_{k+1}$ , 容易推导出控制器的表达式.

利用式(1)可将  $e_{k+1}$  写成

$$e_{k+1} = r_{k+1} + (A(q^{-1}) - 1)y_{k+1} - B(q^{-1})u_k - w_{k+1}. \quad (18)$$

这样, 欲使理想误差动态式(6)成立, 可得

$$B(q^{-1})u_k = -(1 - \rho(e_k))e_k - d_{k+1}^* + d_{k+1} + r_{k+1} + (A(q^{-1}) - 1)y_{k+1} - w_{k+1}. \quad (19)$$

由于存在不确定项, 式(19)不可以作为控制器使用. 为了给出可实施的控制器表达式, 需定义式(18)中的等效干扰  $d_k$ . 为表达方便, 记

$$A_1(q^{-1}) = A(q^{-1}) - 1, \quad B_1(q^{-1}) = B(q^{-1}) - b_0.$$

1) 当  $d_{k+1}$  取式(14)时, 有

$$u_k = u_{k-1} - \frac{1}{b_0} (-\rho e_k - r_{k+1} + r_k + A_1(q^{-1}) \times (y_{k+1} - y_k) + B_1(q^{-1})(u_k - u_{k-1})), \quad (20)$$

且  $d_{k+1}^* = A(q^{-1})y_k - B(q^{-1})u_{k-1}$ .

2) 当  $d_{k+1}$  取式(15)时, 有

$$u_k = u_{k-1} - \frac{1}{b_0} (-\rho e_k + d_{k+1}^* - r_{k+1} + r_k - A(q^{-1})(y_{k+1} - y_k) + B_1(q^{-1})(u_k - u_{k-1})), \quad (21)$$

其中

$$d_{k+1}^* = y_k - y_{k-1} + A_1(q^{-1})(y_k - y_{k-1}) - q^{-1}B(q^{-1})(u_k - u_{k-1}). \quad (22)$$

3) 当  $d_{k+1}$  取式(16)时,有

$$u_k = u_{k-1} - \frac{1}{b_0}(-\rho e_k + d_{k+1}^* - r_{k+1} + r_k - A(q^{-1})(y_{k+1} - y_k) + B_1(q^{-1})(u_k - u_{k-1}) + A(q^{-1})(2y_k - 3y_{k-1} + y_{k-2}) - q^{-1}B(q^{-1})(2u_k - 3u_{k-1} + u_{k-2})), \quad (23)$$

其中

$$d_{k+1}^* = y_k - y_{k-1} + A_1(q^{-1})(y_k - y_{k-1}) + q^{-1}B(q^{-1})(u_k - u_{k-1}) - A(q^{-1})(2y_{k-1} - 3y_{k-2} + y_{k-3}) + q^{-1}B(q^{-1})(2u_{k-1} - 3u_{k-2} + u_{k-3}). \quad (24)$$

### 5 实验结果

本节以永磁同步电机执行位置跟踪任务为例,设计离散时间控制器用于位置环控制,其中电流环与速度环控制器由ELMO驱动器提供;位置环控制器由DSP开发板TMS320F2812提供.

经辨识获得的伺服系统数学模型如下:

$$y_{k+1} = 1.5001y_k - 0.4989y_{k-1} + 2.1589u_k - 0.5113u_{k-1} + w_{k+1}.$$

在不改变采样周期  $T_s$  与控制器参数  $\delta$  的情况下,比较不同干扰抑制措施的效果.为验证本文改进的干扰抑制措施的有效性,给出如下2种参考信号:

1) 三角波参考信号 ( $M = 1$ ).

$$r(k) = \begin{cases} \frac{2A}{N}k, & 0 < k \leq \frac{N}{2}; \\ -\frac{2A}{N}(k - N), & \frac{N}{2} < k \leq N; \\ r_{k-N}, & k > N. \end{cases} \quad (25)$$

2) S曲线信号 ( $M = 3$ ).

$$r_k = \begin{cases} 0, & 0 < k \leq \frac{N}{4}; \\ 3A\left(\frac{4k}{N} - 1\right)^2 - 2A\left(\frac{4k}{N} - 1\right)^3, & \frac{N}{4} < k \leq \frac{N}{2}; \\ A, & \frac{N}{2} < k \leq \frac{3N}{4}; \\ 3A\left(4 - \frac{4k}{N}\right)^2 - 2A\left(4 - \frac{4k}{N}\right)^3, & \frac{3N}{4} < k \leq N; \\ r_{k-N}, & k > N. \end{cases} \quad (26)$$

其中:  $A$ 为信号幅值,  $N$ 为参考信号  $r_k$ 的周期.对于三角波参考信号,采用控制器(21);对于S曲线信号,采用控制器(23).实验中置采样周期为  $T_s = 0.2\text{ms}$ ,控制器参数  $\delta = 0.8$ .

**实验1** 给定由式(25)描述的参考信号  $r_k$ ,其中  $A = 90\text{deg}$ . 1) 取控制器(20),这时不满足式(17),实验结果见图1.由图1可以看出,  $\Delta = 0.2\text{deg}$ ,  $\Delta_{\text{SSE}} = 0.266\text{deg}$ . 2) 取控制器(21),这时满足式(17),实验结果见图2.由图2可以看出,  $\Delta = 0.045\text{deg}$ ,  $\Delta_{\text{SSE}} = 0.048\text{deg}$ .

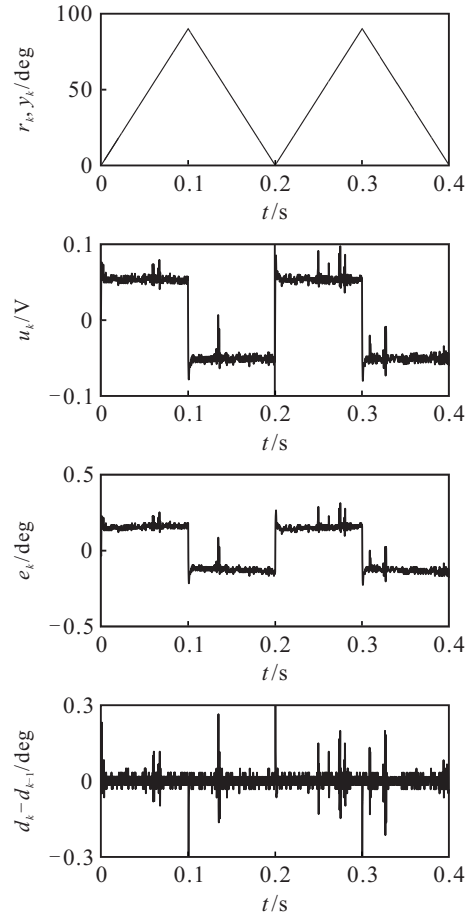


图1 参考/实际位置信号、控制输入、跟踪误差、干扰补偿误差 ( $M = 1, L = 2$ )

**实验2** 给定由式(26)描述的参考信号  $r_k$ ,其中  $A = 135\text{deg}$ . 1) 取控制器(20),这时不满足式(17),实验结果见图3.由图3可以看出,  $\Delta = 0.15\text{deg}$ ,  $\Delta_{\text{SSE}} = \frac{\delta\Delta}{\delta - \Delta} = 0.185\text{deg}$ . 2) 取控制器(21),这时不满足式(17),实验结果见图4.由图4可以看出,  $\Delta = 0.1\text{deg}$ ,  $\Delta_{\text{SSE}} = 0.115\text{deg}$ . 3) 取控制器(23),这时满足式(17),实验结果见图5.由图5可以看出,  $\Delta = 0.05\text{deg}$ ,  $\Delta_{\text{SSE}} = 0.053\text{deg}$ .

由实验1和实验2可知:当  $M$  与  $L$  满足式(17)时,采用干扰差分补偿设计的控制器能够实现对给定参考信号的精确跟踪;当  $M$  与  $L$  不满足式(17)时,  $L$  越接近  $M + 2$  系统,跟踪性能越好,且控制过程无抖振.

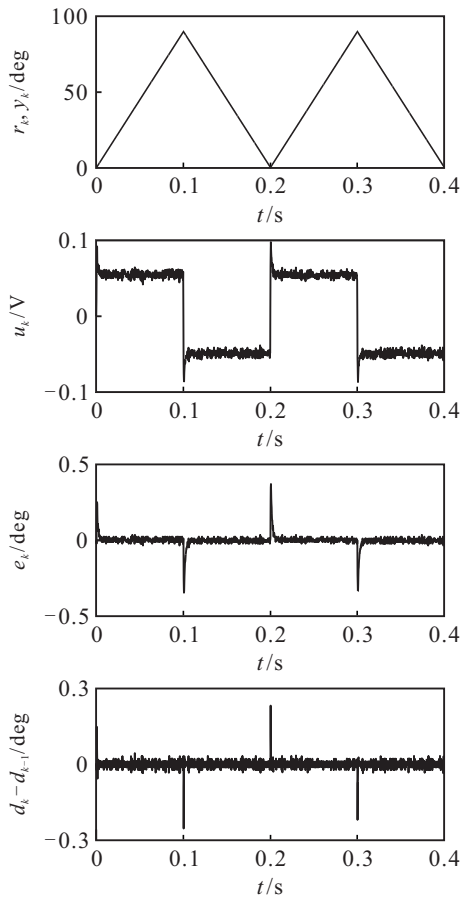


图2 参考/实际位置信号、控制输入、跟踪误差、干扰补偿误差 ( $M = 1, L = 3$ )

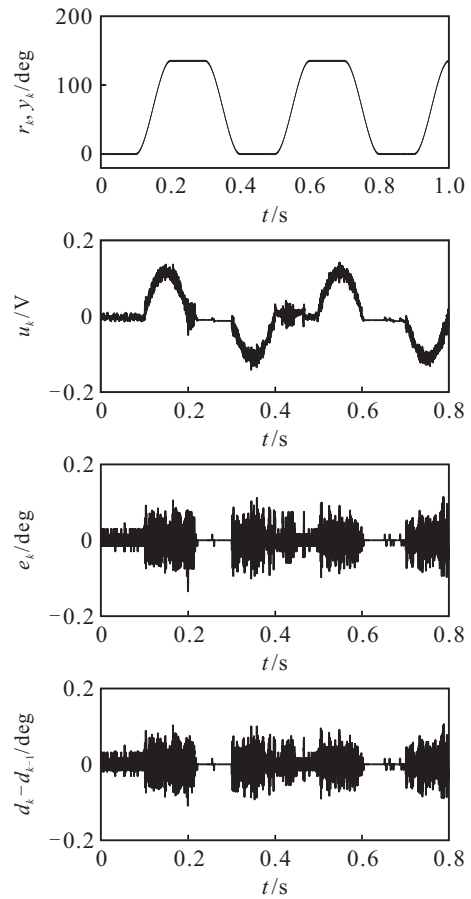


图4 参考/实际位置信号、控制输入、跟踪误差、干扰补偿误差 ( $M = 3, L = 3$ )

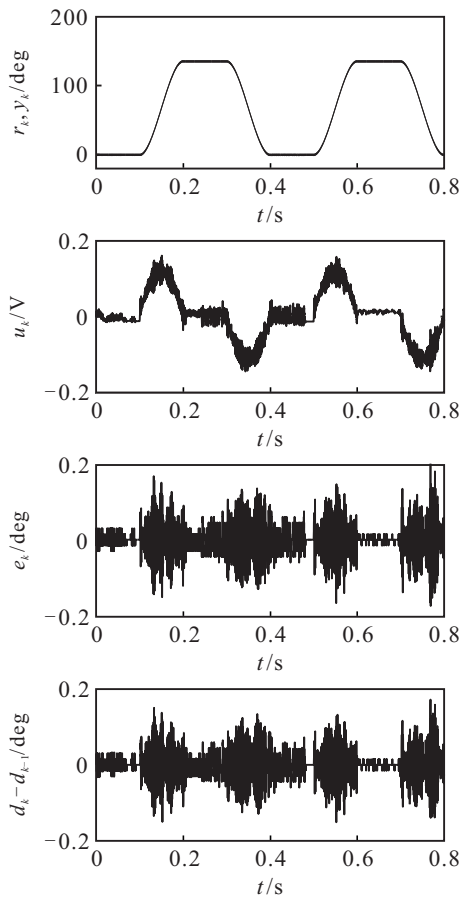


图3 参考/实际位置信号、控制输入、跟踪误差、干扰补偿误差 ( $M = 3, L = 2$ )

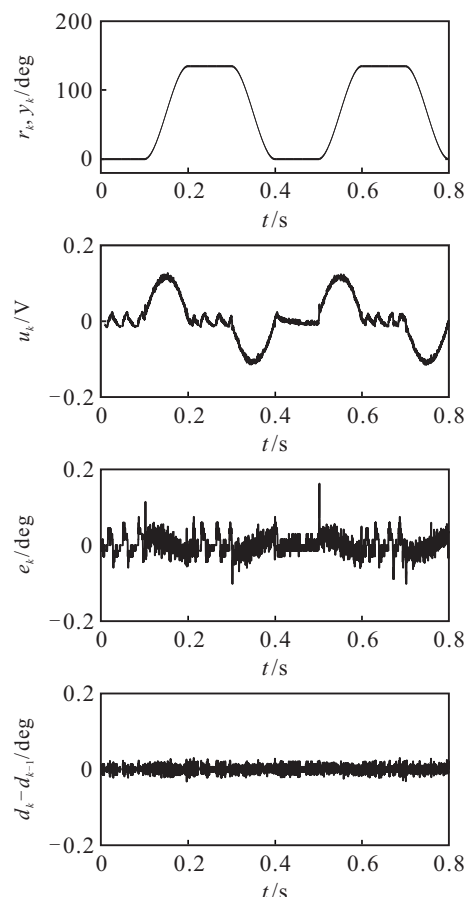


图5 参考/实际位置信号、控制输入、跟踪误差、干扰补偿误差 ( $M = 3, L = 5$ )

## 6 结论

本文提出的离散时间控制器设计方法直接采用吸引律,并依据跟踪任务,采用相应干扰差分技术,改进了干扰抑制措施.具体做法是将提出的干扰抑制措施嵌入吸引律,构建具有干扰抑制作用的理想误差动态,依据此理想误差动态设计离散时间控制器.闭环系统具有理想误差动态所刻画特性,因而提高了控制系统跟踪性能和抗干扰能力.控制器设计采用的无切换吸引律回避了抖振现象.具体给出了稳态误差带、绝对吸引层、单调减区域以及跟踪误差首次进入稳态误差带所需的最多步数的表达式,用于刻画闭环系统收敛过程.获得的数值仿真与电机实验结果验证了所提出控制方案的有效性.

### 参考文献(References)

- [1] Gao W B, Wang Y F, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.
- [2] Bartoszewicz A, Latosinski P. Generalization of Gao's reaching law for higher relative degree sliding variables[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(9): 3173-3179.
- [3] Eun Y, Kim J H, Kim L. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a cnc servomechanism[J]. IEEE Transactions on Control System, 1999, 7(4): 414-423.
- [4] Tang C Y, Misawa E A. Discrete variable structure control for linear multivariable systems[J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement & Control, 2000, 122(4): 783-792.
- [5] 孙明轩, 范伟云, 王辉. 用于离散滑模重复控制的新型趋近律[J]. 自动化学报, 2011, 37(10): 1213-1221. (Sun M X, Fan W Y, Wang H. Discrete sliding mode repetitive control with novel reaching law[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(10): 1213-1221.)
- [6] Bartoszewicz A, Lesniewski P. Reaching law approach to the sliding mode control of periodic review inventory systems[J]. IEEE Transactions on Automation Science & Engineering, 2014, 11(3): 810-817.
- [7] 姚琼荟, 宋立忠, 温洪. 离散变结构控制系统的比例-等速-变速控制[J]. 控制与决策, 2000, 15(3): 329-332. (Yao Q H, Song L Z, Wen H. Proportional-constant-variable rate control for discrete-time variable structure systems[J]. Control and Decision, 2000, 15(3): 329-332.)
- [8] 李文林. 离散时间变结构控制系统中的趋近律问题[J]. 控制与决策, 2004, 19(11): 1267-1270. (Li W L. Reaching law of discrete-time variable structure control systems[J]. Control and Decision, 2004, 19(11): 1267-1270.)
- [9] Golo G, Milosavjevic C. Robust discrete-time chattering free sliding mode control[J]. Systems Control & Letters, 2000, 41(1): 19-28.
- [10] Du H, Yu X, Chen M Z, et al. Chattering-free discrete-time sliding mode control[J]. Automatica, 2016, 68: 87-91.
- [11] Sun M X, Wang Y Y, Wang D W. Variable structure repetitive control: A discrete-time strategy[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2005, 52(2): 610-616.
- [12] Qu S C, Xia X H, Zhang J F. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(7): 3502-3510.
- [13] Chakrabarty S, Bandyopadhyay B. A generalized reaching law with different convergence rates[J]. Automatica, 2016, 63(1): 34-37.
- [14] Nguyen M L, Chen X K, Yang F. Discrete-time quasi-sliding-mode control with prescribed performance function and its application to piezo-actuated positioning systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2018, 65(1): 942-950.
- [15] Sun M X, Wu L W, Hu Y, et al. Digital control strategies with attractiveness and invariance specifications[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2018, 26(4): 1272-1284.
- [16] 郭玲伟, 孙明轩. 一种自适应吸引律离散时间控制方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(9): 1546-1552. (Wu L W, Sun M X. A discrete-time control method based on adaptive attracting law[J]. Control and Decision, 2016, 31(9): 1546-1552.)
- [17] 洪奕光, 程代展. 非线性系统的分析与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 225-248. (Hong Y G, Cheng D Z. Analysis and control of nonlinear systems[M]. Beijing: Science Press, 2005: 225-248.)
- [18] 李世华, 丁世宏. 非光滑控制理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013. (Li S H, Ding S H. Theory and application of nonsmooth control[M]. Beijing: Science Press, 2013.)

### 作者简介

孙明轩(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事迭代学习控制系统分析与设计方向等研究, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn;

胡志云(1993—), 男, 博士生, 从事离散滑模控制的研究, E-mail: 1921377963@qq.com;

李威(1995—), 男, 博士生, 从事学习控制的研究, E-mail: 250972655@qq.com;

李鹤(1993—), 女, 博士生, 从事学习控制的研究, E-mail: 285548171@qq.com.

(责任编辑: 齐 霖)