

# 控制与决策

Control and Decision

## 结束时间不确定的投资组合选择问题建模与模型求解方法

霍艳丽, 徐春晖, 黄敏, 王大志

引用本文:

霍艳丽, 徐春晖, 黄敏, 等. 结束时间不确定的投资组合选择问题建模与模型求解方法[J]. *控制与决策*, 2020, 35(7): 1751–1757.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1303>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 多期证券投资组合问题的区间多目标规划求解方法

Interval multi-objective programming methods for solving multi-period portfolio selection problems

*控制与决策*. 2020, 35(3): 645–650 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0574>

### 基于三参照点理论的结构化产品购买行为

Purchase behavior of structured products based on tri-reference point theory

*控制与决策*. 2020, 35(3): 677–685 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0558>

### 随机利率与随机波动率环境下的DC型养老金计划

Defined-contribution pension plan with stochastic interest rate and stochastic volatility

*控制与决策*. 2019, 34(3): 581–590 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1133>

### 状态变化下的连续时间动态投资组合选择

Continuous-time optimal portfolio choice under regime-switching

*控制与决策*. 2017, 32(6): 1137–1142 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0330>

### 考虑复杂约束的鲁棒均值-CVaR投资组合模型及粒子群算法

Robust mean-CVaR portfolio selection model with complicated realistic constraints and its improved particle swarm optimization algorithm

*控制与决策*. 2016, 31(12): 2219–2224 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1142>

# 结束时间不确定的投资组合选择问题建模与模型求解方法

霍艳丽<sup>1†</sup>, 徐春晖<sup>2</sup>, 黄敏<sup>3</sup>, 王大志<sup>3</sup>

(1. 中国计量大学 经济与管理学院, 杭州 310018; 2. 千叶工业大学 社会系统科学学院, 千叶 2750016; 3. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

**摘要:** 针对结束时间具有不确定性的投资问题, 建立以区间风险值 (PVaR) 度量市场风险的收益最大化投资组合选择模型. PVaR 计算的复杂性使得模型难以运用一般优化方法求解, 因此提出并证明可以通过求解等效的混合整数规划模型来得到原模型的最优解. 利用实际股价数据进行数值实验分析, 结果表明, 求解混合整数规划模型针对小规模短期投资问题可以快速给出最优投资决策方案.

**关键词:** 投资组合优化; 终止时间不确定; 投资风险; 区间风险值; 蒙特卡罗仿真

中图分类号: F832.48; O221

文献标志码: A

## Modeling of portfolio selection problems with uncertain exit time and its solving method

HUO Yan-li<sup>1†</sup>, XU Chun-hui<sup>2</sup>, HUANG Min<sup>3</sup>, WANG Da-zhi<sup>3</sup>

(1. College of Economics and Management, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China; 2. Faculty of Social Systems Science, Chiba Institute of Technology, Chiba 2750016, Japan; 3. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract:** For the investment decision problem with uncertain exit time, this paper establishes a return maximization portfolio selection model that measures market risk with the period value at risk (PVaR). Due to the computational complexity of the PVaR, it is difficult to solve the model with conventional optimization methods. This paper proposes and proves that the optimal solution of the original model can be found by solving an equivalent mixed integer programming model. The numerical experiment analysis is carried out by using the actual stock price data. The results show that solving the mixed integer programming model can quickly find the optimal investment decision for small and mid-scale short-term investment problems.

**Keywords:** portfolio optimization; exit time uncertainty; investment risk management; period value at risk; Monte Carlo simulation

## 0 引 言

1952年, Markowitz<sup>[1]</sup>建立了均值-方差投资组合选择模型, 奠定了投资组合优化问题的理论基础. 随着不同市场风险度量方法的提出, 均值-绝对偏差<sup>[2-3]</sup>、均值-VaR<sup>[4]</sup>和均值-CVaR<sup>[5]</sup>等投资组合选择模型相继被提出. 关于投资组合优化问题的详细综述, 请参见文献[6].

现实投资问题中, 投资者可能会因为大额消费、疾病、市场环境变化等诸多不确定因素的影响而提前结束投资. 基于效用最大化准则, Merton<sup>[7]</sup>研究了终止时间服从泊松分布时的最优投资和消费问题; Blanchet-Scalliet等<sup>[8]</sup>考虑了随机终止时间服从一般

分布时的最优投资策略; Zeng等<sup>[9]</sup>考虑了转移机制市场环境下具有状态依赖效用函数的多阶段投资和消费问题. 基于均值-方差准则, Martellini等<sup>[10]</sup>考虑了终止时间与资产价格变化的关联性, 将终止时间看作是内生或外生随机变量, 建立了终止时间不确定投资组合选择问题的收益率方差最小化模型. Keykhai<sup>[11]</sup>将文献[10]的研究扩展到每种资产都具有各自不确定退出时间的情况. 基于均值-方差的多阶段投资问题, 郭文旌等<sup>[12]</sup>假定终止时间服从某个离散分布, 以资产增长倍数的期望最大方差最小为目标, 研究了不确定终止时间的离散最优投资问题; Yi等<sup>[13]</sup>将文献[12]的研究推广到带外生负债的

收稿日期: 2018-09-25; 修回日期: 2019-04-02.

基金项目: 浙江省钱江人才计划项目(QJC1502008); 浙江省自然科学基金青年项目(LQ18G010004).

责任编辑: 刘宝碇.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: huoyanli2014@163.com.

情况; Wu等<sup>[14]</sup>将文献[12]的研究进一步推广到了马尔科夫转移机制的市场环境; 李仲飞等<sup>[15]</sup>在文献[14]的基础上, 研究了不确定退出时间和马尔可夫状态转移市场环境下多风险资产的动态投资组合选择问题, 资产收益率分布依赖于市场状态, 且与时间有关. 关于终止时间不确定多阶段投资问题的更多研究包括: 考虑随机收入<sup>[16]</sup>, 收益率串联相关<sup>[17]</sup>, 具有随机现金流的资产负债管理<sup>[18]</sup>, 带有内生负债<sup>[19]</sup>, 受通货膨胀影响<sup>[20]</sup>, 包括破产状态的状态转移市场环境下的多阶段投资选择问题<sup>[21]</sup>等. Yi等<sup>[22]</sup>用平均场方法求解具有不确定退出时间的多阶段均值-方差投资选择模型, Cui等<sup>[23]</sup>将其扩展到具有负债的情况. 除了以均值-方差模型为基础的相关研究以外, Huang等<sup>[24]</sup>在假定投资结束时间分布的基础上给出收益率的无条件分布函数, 用CVaR度量风险, 为投资结束时间不确定问题给出鲁棒性方法.

已有文献对结束时间不确定性投资问题的风险度量绝大多数是基于方差方法, 或是直接采用效用函数来衡量投资的效果. 本文采用区间风险值(PVaR)来度量终止时间不确定的投资问题的投资风险, 从平均收益率最大化角度为投资结束时间不确定问题建立投资组合优化模型. 由于PVaR计算的复杂性, 基于PVaR的投资组合优化模型是一个复杂的非线性规划, 很难用常规的优化方法求解. 为此, 本文提出等效模型的概念, 通过求解等效模型来获得原模型的最优解, 并通过数值计算实验来验证这种方法的有效性.

## 1 终止时间不确定的投资组合选择问题

### 1.1 问题描述

投资者希望将资金合理地分配到多种金融资产上, 分配方案的优劣从收益和风险两方面进行评价, 投资结束时间可以是未来某一段时期内的任意有效交易时间, 投资结束前不考虑中途调整投资方案, 不考虑贷款投资和卖空行为.

投资终止时间的描述: 投资者事先不确定投资结束时间, 如图1所示, 投资开始于 $t_0$ 时刻, 而投资结束时间 $t_1$ 可能是在 $t_0$ 之后的某段时期内的任一有效交易时间. 记投资最早结束时间为 $t_1^a$ , 最晚结束时间为 $t_1^b$ , 投资结束时间可以是这段时期内的任何一个有效交易时间, 即 $t_1 \in [t_1^a, t_1^b]$ (此处时间的连续性并非时间概念上的连续, 而是指有效交易时间上的连续). 由于投资人对结束时间往往没有一个偏好, 本文假定在 $[t_1^a, t_1^b]$ 内任何一个交易时刻结束投资的可能性是无差别的.

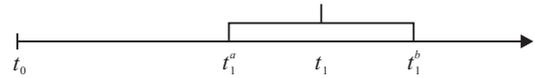


图1 投资终止时间不确定性描述

由于投资结束时间具有这样的特性, 从 $t_0$ 开始持有到 $t_1$ 结束的投资市场风险可以采用区间风险值(period value at risk, PVaR)<sup>[25]</sup>来度量. PVaR是描述一段投资期间内市场风险的测度指标, 投资组合 $x$ 在投资期间 $[t_0, t_1]$ 内的最大损失记为 $L_T(x)$ , 以概率 $\alpha$ 发生的最大损失定义为置信度 $1 - \alpha$ 的 $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$ , 用公式表示如下:

$$\text{PVaR}_{1-\alpha}(x) = \inf\{d \in R^1 | P(L_T(x) \geq d) \leq \alpha\}. \quad (1)$$

### 1.2 结束时间不确定投资组合选择问题模型

利用投资组合的期望收益率来衡量投资收益, 用PVaR来度量投资组合的市场风险, 为投资结束时间不确定的投资组合选择问题建立投资收益最大化的投资组合优化模型.

$$\begin{aligned} & \max \bar{r}x. \\ & \text{s.t. } \text{PVaR}_{1-\alpha}(x) \leq \text{risk}_0; \\ & \quad Ix = 1; \\ & \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $x = (x_1; \dots; x_N)$ 为决策变量, 表示一个包含 $N$ 种资产的投资组合, 第 $i$ 种资产的投资比例为 $x_i$ , 约束条件 $x_i \geq 0$ 表示无卖空; $\bar{r}$ 为 $N$ 种资产的平均收益率行向量;  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$ 为投资组合 $x$ 对应的区间风险值, 参数 $\text{risk}_0$ 为对投资组合的风险要求, 约束条件 $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x) \leq \text{risk}_0$ 表示投资风险不能超过 $\text{risk}_0$ ;  $I$ 为全1行向量, 约束条件 $Ix = 1$ 表示投资资金全部分散投资到 $N$ 种资产上,  $N$ 种资产的投资比例和为1. 模型(2)的可行域记为 $X$ ,  $X = \{x \in R^N | \text{PVaR}_{1-\alpha}(x) \leq \text{risk}_0, Ix = 1, x \geq 0\}$ . 为后文讨论方便, 记满足除风险约束条件之外的所有约束条件的投资组合的集合为 $X'$ ,  $X' = \{x \in R^N | Ix = 1, x \geq 0\}$ .

由 $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$ 的定义可知, 如果在投资结束时刻 $t_1$ 已知 $N$ 种资产收益率向量为 $\xi_{t_1} = (\xi_{t_1,1}, \dots, \xi_{t_1,N})$ , 则此时的损失率为 $L(x, \xi_{t_1}) = -\xi_{t_1}x$ , 投资期间 $[t_0, t_1]$ 内的最大损失率 $L_T(x) = \max\{L(x, \xi_{t_1}) : t_1 \in [t_1^a, t_1^b]\}$ . 如果知道最大损失率 $L_T(x)$ 的分布函数, 就可得到置信度 $1 - \alpha$ 下的区间风险值 $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$ . 一般情况下很难获得多种资产投资组合的最大损失率分布函数的显示表达式, 因此可以采用仿真方法计算PVaR<sup>[25]</sup>.

基于蒙特卡罗仿真方法计算PVaR的过程如下.

step 1: 将投资可能结束的期间  $[t_1^a, t_1^b]$  离散化, 取等距的  $D$  个离散时间点 (一般取  $D$  为这一时期内的市场交易天数). 如表 1 中第 1 行所示, 取区间  $[t_1^a, t_1^b]$  内等间距的  $D$  个离散点  $\{t_1^1, \dots, t_1^D\}$ , 其中  $t_1^1 = t_1^a, t_1^D = t_1^b$ . 为了方便讨论, 在不产生歧义的前提下, 将投资终止时间记号  $\{t_1^1, \dots, t_1^D\}$  简记为  $\{1, \dots, D\}$ .

step 2: 用蒙特卡罗仿真方法产生各种资产的收益率样本  $M$  个, 其中第  $k$  个样本记为  $\xi^k$ , 根据  $x$  和  $\xi^k$  计算最大损失  $L_T^k(x, \xi^k)$ .

如表 1 所示, 每个时间点  $t \in \{1, \dots, D\}$  上对应的  $N$  种资产的收益率样本记为  $\xi_t^k = (\xi_{t1}^k, \dots, \xi_{tN}^k)$ , 此时投资组合的损失为  $-\xi_t^k x$ ,  $[t_1^a, t_1^b]$  内的最大损失  $L_T^k(x, \xi^k) = \max\{-\xi_1^k x, \dots, -\xi_D^k x\}$ .

表 1 蒙特卡罗仿真方法计算PVaR

| scenario | 1            | ...      | $t$          | ...      | $D$          | maximum loss rate |
|----------|--------------|----------|--------------|----------|--------------|-------------------|
| $\xi^1$  | $-\xi_1^1 x$ | ...      | $-\xi_t^1 x$ | ...      | $-\xi_D^1 x$ | $L_T^1(x, \xi^1)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$     | $\ddots$ | $\vdots$     | $\ddots$ | $\vdots$     | $\vdots$          |
| $\xi^k$  | $-\xi_1^k x$ | ...      | $-\xi_t^k x$ | ...      | $-\xi_D^k x$ | $L_T^k(x, \xi^k)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$     | $\ddots$ | $\vdots$     | $\ddots$ | $\vdots$     | $\vdots$          |
| $\xi^M$  | $-\xi_1^M x$ | ...      | $-\xi_t^M x$ | ...      | $-\xi_D^M x$ | $L_T^M(x, \xi^M)$ |

step 3: 对  $M$  个最大损失  $L_T^k(x, \xi^k)$  进行非降序排序, 其中第  $\lceil (1 - \alpha)M \rceil + 1$  个位置对应的值即为  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$  ( $\lceil A \rceil$  表示比实数  $A$  大的最小整数).

令  $\{L_T^k(x, \xi^k), k = 1, \dots, M\}^{\lceil (1-\alpha)M \rceil + 1}$  表示  $M$  个最大损失  $L_T^k(x, \xi^k)$  从小到大排序后, 第  $\lceil (1 - \alpha)M \rceil + 1$  个最小的值. 由  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$  的定义有

$$\text{PVaR}_{1-\alpha}(x) = \{L_T^k(x, \xi^k), k = 1, \dots, M\}^{\lceil (1-\alpha)M \rceil + 1}.$$

同时, 各种资产的平均收益率可以通过计算

$$\bar{r} = \frac{1}{MD} \sum_{k=1}^M \sum_{t=1}^D \xi_t^k$$

得到.

采用上述蒙特卡罗仿真方法计算PVaR时, 模型(2)表示如下:

$$\begin{aligned} & \max \bar{r}x. \\ & \text{s.t. } L_T^k(x, \xi^k) = \max\{-\xi_1^k x, \dots, -\xi_D^k x\}, \\ & \quad k = 1, \dots, M; \\ & \quad \{L_T^k(x, \xi^k), k = 1, \dots, M\}^{\lceil (1-\alpha)M \rceil + 1} \leq \text{risk}_0; \\ & \quad x \in X'. \end{aligned} \tag{3}$$

模型(3)的约束条件中包含一个求最大值函数, 一个排序函数, 直接求解模型(3)是非常困难的. 求解问题将在下一节进行讨论.

## 2 模型求解

为了将模型(3)中约束条件的max函数和排序函数变换为容易处理的形式, 引入中间变量  $z$ ,  $Z^k$  和  $y_k$ , 具体变化过程如下.

令  $z = \{L_T^k(x, \xi^k), k = 1, \dots, M\}^{\lceil (1-\alpha)M \rceil + 1}$ , 即  $z$  表示投资组合的区间风险值  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$ , 模型(3)中的约束条件  $\{L_T^k(x, \xi^k), k = 1, \dots, M\}^{\lceil (1-\alpha)M \rceil + 1} \leq \text{risk}_0$  可变化为  $z \leq \text{risk}_0$ .  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$  是  $M$  个最大损失率  $L_T^k(x, \xi^k)$  从小到大排序中的第  $\lceil (1 - \alpha)M \rceil + 1$  位, 大于  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$  的值共有  $\lfloor \alpha M \rfloor - 1$  个 ( $\lfloor A \rfloor$  表示取比实数  $A$  小的最大整数). 引入计数中间变量  $y_k$ , 当最大损失率大于  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$  时, 令  $y_k$  为 1, 否则  $y_k$  为 0. 对  $y_k$  求和, 则  $\sum_{k=1}^M y_k$  表示  $M$  个最大损失率中大于  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$  的个数. 因此, 有  $\sum_{k=1}^M y_k = \lfloor \alpha M \rfloor - 1$ .

利用中间变量  $Z^k$  变化模型(3)约束条件中的max函数表达形式, 令  $Z^k \geq -\xi_t^k x, t = 1, \dots, D, \forall k$ , 此时对于任意的  $k$  都有  $Z^k \geq L_T^k(x, \xi^k)$  成立. 显然有  $\{Z^k, k = 1, \dots, M\}^{\lceil (1-\alpha)M \rceil + 1} \geq \{L_T^k(x, \xi^k), k = 1, \dots, M\}^{\lceil (1-\alpha)M \rceil + 1}$ , 因此令  $Z^k > z$  时  $y_k$  为 1, 否则  $y_k$  为 0, 即引入中间变量  $Z^k$  后, 取  $z = \{Z^k, k = 1, \dots, M\}^{\lceil (1-\alpha)M \rceil + 1}$ . 虽然  $z$  的取值有可能大于  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x)$ ,  $z$  不超过  $\text{risk}_0$ , 依然保证了  $\text{PVaR}_{1-\alpha}(x) \leq \text{risk}_0$  的约束条件成立. 因此, 将max函数表达形式变为  $Z^k \geq -\xi_t^k x, t = 1, \dots, D, \forall k$ , 不影响模型(3)的最优性.

引入中间变量后得到如下模型:

$$\begin{aligned} & \max \bar{r}x. \\ & \text{s.t. } Z^k \geq -\xi_t^k x, t = 1, \dots, D, k = 1, \dots, M; \\ & \quad y_k = \begin{cases} 0, & z \geq Z^k, \\ 1, & z < Z^k, \end{cases} \\ & \quad k = 1, \dots, M; \\ & \quad \sum_{k=1}^M y_k = \lfloor \alpha M \rfloor - 1; \\ & \quad z \leq \text{risk}_0; \\ & \quad x \in X'. \end{aligned} \tag{4}$$

其中: 中间变量  $Z^k$  表示  $[0, T]$  期间第  $k$  个样本的最大损失, 中间变量  $y_k$  用来计最大损失超过  $z$  的个数.

模型(4)中的  $y_k$  是一个条件取值的变量, 一般优化算法对这类变量不好处理, 引入一个约束条件, 将  $y_k$  变成一个无取值条件的变量. 令  $Q$  为一个正的常

数(一般取1或最大收益率的2倍),将模型(4)中的取值约束条件用  $Qy_k + z \geq Z^k$  替换,将  $y_k$  变成一般的变量,得到模型如下:

$$\begin{aligned} & \max \bar{r}x. \\ & \text{s.t. } Z^k \geq -\xi_t^k x, \quad t = 1, \dots, D, \quad k = 1, \dots, M; \\ & \quad Qy_k + z \geq Z^k, \quad k = 1, \dots, M; \\ & \quad \sum_{k=1}^M y_k = \lfloor \alpha M \rfloor - 1; \\ & \quad z \leq \text{risk}_0; \\ & \quad y_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, M; \\ & \quad x \in X'. \end{aligned} \quad (5)$$

由模型(5)中的约束条件  $Qy_k + z \geq Z^k$  可知:当  $z$  小于  $Z^k$  时,  $y_k$  取值为1;当  $z$  大于等于  $Z^k$  时,  $y_k$  值可为0亦可为1.

为了说明可以通过求解模型(5)获得模型(4)的最优投资组合,先作如下定义.

**定义1** 给定一组参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$ , 如果模型(4)与模型(5)有可行解,则称参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  为可行参数.

**定义2** 对于给定的可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$ , 如果投资组合  $x_A$  属于可行域  $X$ , 则称投资组合  $x_A$  为参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  下的可行投资组合. 所有可行投资组合  $x_A$  构成的集合称为可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  的可行投资组合集,记为  $X_A$ .

**定义3** 如果可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  下任意两个可行投资组合  $x_A$  和  $x_B$  有相同的投资收益和投资风险,则称  $x_A$  和  $x_B$  为可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  下的等效投资组合.

**定义4** 如果模型(4)与模型(5)对于给定的任意一组可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  给出的最优投资组合  $x_{(4)}^*$  和  $x_{(5)}^*$  对应的目标函数值相等,则称模型(4)与模型(5)互为等效模型.

**定理1** 对于任意一组可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$ , 模型(5)和模型(4)有相同的可行投资组合集,且模型(5)是模型(4)的等效模型.

**证明** 令  $(x_{(4)}^*, y_{(4)}^*, z_{(4)}^*)$  和  $\bar{r}x_{(4)}^*$  表示模型(4)在任意可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  下的最优解和最优值;  $(x_{(5)}^*, y_{(5)}^*, z_{(5)}^*)$  和  $\bar{r}x_{(5)}^*$  表示模型(5)在相同参数下的最优解和最优值;  $X_A^{(4)}$  和  $X_A^{(5)}$  分别是在可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  下,模型(4)和模型(5)的可行投资组合集.

欲证两模型有相同的可行投资组合集,只需证明  $X_A^{(4)} \subseteq X_A^{(5)}$  与  $X_A^{(5)} \subseteq X_A^{(4)}$  同时成立. 即,对于模型(4)和模型(5)的任意可行投资组合  $x_{(4)}$  和  $x_{(5)}$ , 有  $x_{(4)} \in X_A^{(5)}$  与  $x_{(5)} \in X_A^{(4)}$  同时成立.

显而易见,相同可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  下模型(4)的

可行解均是模型(5)的可行解,所以模型(4)的任意可行投资组合都是模型(5)的可行投资组合,即  $x_{(4)} \in X_A^{(5)}$  成立. 因此,只需证明模型(5)的任意可行投资组合是模型(4)的可行投资组合.

对于  $x_{(5)}$  在模型(5)中对应的  $y_k$ , 由约束条件  $Qy_k + z \geq Z^k$  可知,当  $z$  小于  $Z^k$  时,  $y_k$  取值为1,  $z$  大于等于  $Z^k$  时,  $y_k$  取值可为0亦可为1. 由约束条件  $\sum_{k=1}^M y_k = \lfloor \alpha M \rfloor - 1$  可知,只能有  $\lfloor \alpha M \rfloor - 1$  个  $y_k$  取值为1,且要满足约束条件  $z \leq \text{risk}_0$ .  $x_{(5)}$  对应的  $M$  个最大损失率中大于  $\text{risk}_0$  的个数为  $|J|$ ,  $J = \{k | Z^k > \text{risk}_0\}$ , 如果  $|J|$  小于  $\lfloor \alpha M \rfloor - 1$ , 令  $z$  等于  $\text{risk}_0$ , 则有  $z$  大于等于  $Z^k$  时有  $\lfloor \alpha M \rfloor - 1$  减去  $|J|$  个  $y_k$  取1. 此时的  $y_k$  显然不满足模型(4)的约束条件,但是存在满足模型(4)约束条件的  $y^1$ . 令  $z^1$  等于  $Z^k$  中第  $\lceil (1-\alpha)M \rceil + 1$  大的数,则有  $z^1 < Z^k$  时  $y_k^1 = 1$ , 否则  $y_k^1 = 0$ , 且  $\sum_{k=1}^M y_k^1 = \lfloor \alpha M \rfloor - 1$  和  $z^1 \leq z \leq \text{risk}_0$  同时成立. 因此,  $(x_{(5)}, y^1, z^1)$  是模型(4)的可行解,即  $x_{(5)}$  是模型(4)的可行投资组合,  $x_{(5)} \in X_A^{(4)}$  成立.

因为相同可行参数下模型(4)和模型(5)的任意可行投资组合互为可行投资组合,所以有两模型可行投资组合集相同,即  $X_A^{(5)} = X_A^{(4)}$ .

因为模型(5)的最优解  $y_{(5)}^*$  不一定满足模型(4)的约束条件,所以  $(x_{(5)}^*, y_{(5)}^*, z_{(5)}^*)$  不一定是模型(4)的可行解. 但是  $x_{(5)}^*$  是模型(4)的可行投资组合,如果不是最优投资组合,意味着  $\bar{r}x_{(5)}^* < \bar{r}x_{(4)}^*$ , 且  $(x_{(4)}^*, y_{(4)}^*, z_{(4)}^*)$  是模型(5)的可行解,则有对于模型(5)存在一个收益更好的可行投资组合  $x_{(4)}^*$ , 这与  $(x_{(5)}^*, y_{(5)}^*, z_{(5)}^*)$  是模型(5)的最优解矛盾. 因此最优投资组合  $x_{(4)}^*$  和  $x_{(5)}^*$  有相同的目标函数值,即  $\bar{r}x_{(4)}^* = \bar{r}x_{(5)}^*$ , 模型(5)是模型(4)的等效模型.  $\square$

**定理2** 当模型(5)中的风险约束条件是紧约束,且  $\text{PVaR}_{(1-\alpha)}(x)$  是置信度  $1 - \alpha$  的严格递增函数时,模型(5)的最优解是模型(4)的最优解.

**证明** 令  $(x_{(4)}^*, y_{(4)}^*, z_{(4)}^*)$  和  $\bar{r}x_{(4)}^*$  表示模型(4)在任意可行参数  $(\text{risk}_0, \alpha)$  下的最优解和最优值;  $(x_{(5)}^*, y_{(5)}^*, z_{(5)}^*)$  和  $\bar{r}x_{(5)}^*$  表示模型(5)在相同参数下的最优解和最优值.

在模型(5)中,如果有  $z_{(5)}^* \geq Z^k$  时,  $y_{(5)k}^* = 1$ , 则表明  $\text{PVaR}_{(1-\alpha)}(x_{(5)}^*) < \text{risk}_0$ , 与模型(5)的风险约束条件是紧约束相矛盾. 因此,在模型(5)中,当  $z_{(5)}^* \geq Z^k$  时,  $y_{(5)k}^* = 0$ , 即  $(x_{(5)}^*, y_{(5)}^*, z_{(5)}^*)$  满足模型(4)的约束条件,是模型(4)的可行解. 当风险约束条件为紧约束时,模型(5)中的最优解给出的中间变量  $y$  的取值

唯一, 满足模型(4)的约束条件. 由定理1可知, 此时模型(5)的最优解也是模型(4)的最优解.

由定理1可知,  $\bar{r}x_{(4)}^* = \bar{r}x_{(5)}^*$ , 由风险约束条件为紧约束得知,  $PVaR_{1-\alpha}(x_{(4)}^*)$  等于  $PVaR_{1-\alpha}(x_{(5)}^*)$ . 因此,  $x_{(4)}^*$  和  $x_{(5)}^*$  互为等效投资组合.  $\square$

定理1说明, 模型(5)与模型(4)在相同的可行参数下有相同的可行投资组合集, 且两模型目标函数相同, 因此, 模型(5)的最优解给出的投资组合是模型(4)的最优投资组合, 两者有相同的投资收益. 定理2说明, 当模型(5)中的风险约束条件为紧约束时, 模型(5)的最优解也是模型(4)的最优解, 且两者有相同的收益和风险, 互为等效投资组合, 因此, 可以通过求解模型(5)获得满足模型(4)所有约束条件的最优投资组合. 由于模型(5)是一个混合整数规划(MILP), 可使用一些成熟的软件进行求解, 如CPLEX.

### 3 数值实验

为验证上一节给出的求解投资结束时间不确定的收益最大化投资组合选择模型方案的可行性, 本节将基于股价的实际数据, 建立投资结束时间不确定情形下的投资组合选择模型, 采用蒙特卡罗仿真产生投资组合中各资产的收益率样本, 使用CPLEX软件求解模型(5).

投资的风险和收益与投资对象的未来价格有关, 假定股价变化服从几何布朗运动<sup>[26]</sup>. 在此假设下根据当前股价  $S_i(0), i = 1, \dots, N$ , 可以通过下式预测未来的股价:

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left[ \left( \mu_i - \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_{ij}^2}{2} \right) t + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} B_j(t) \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

式(6)中的参数  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$  和  $\sigma = [\sigma_{ij}]_{N \times N}$  可以利用投资对象的历史股价数据进行估计, 具体估计方法详见文献[27]. 利用式(6)仿真得到股价在未来持有期内的数据, 再根据股价获得各资产在  $t = 1, \dots, D$  时的收益率  $\xi_t^k$ , 从而按照第2节的蒙特卡罗仿真方法计算PVaR实现对投资风险的程度量, 同时完成对投资收益的程度量.

**实验1** 从上证50指数的50家公司中选取近5年年收益率均值在15%~40%之间的15家进行投资, 具体构成见表2(数据来源于Wind资讯).

表2 投资组合的构成

| 名称   | 代码     | 名称   | 代码     |
|------|--------|------|--------|
| 中信证券 | 600030 | 万华化学 | 600309 |
| 中国太保 | 601601 | 上汽集团 | 600104 |
| 中国人寿 | 601628 | 青岛海尔 | 600690 |
| 中国平安 | 601318 | 绿地控股 | 600606 |
| 中国联通 | 600050 | 恒瑞医药 | 600276 |
| 招商证券 | 600999 | 海螺水泥 | 600585 |
| 招商银行 | 600036 | 宝钢股份 | 600019 |
| 新华保险 | 601336 |      |        |

假设投资开始时间为2018年8月1日, 投资开始后的1个月内投资者可能在任意的交易日结束投资, 即投资结束时间可能是8月2日到9月1日之间的任何一个交易日. 投资结束前不会对投资比例进行修改, 不存在卖空, 无借款. 投资者希望投资风险保持在一定水平下, 获得的收益越高越好.

1) 根据历史数据估计参数  $\mu, \sigma$ . 通过Wind资讯获得2017年1月1日至2017年12月30日以上15只股票的收盘价, 求得参数  $\mu, \sigma$  的估计值.  $\hat{\sigma}$  见表3,

$$\hat{\mu} = (0.1353, 0.4420, 0.2282, 0.7336, -0.1162, 0.0641, 0.5307, 0.5150, 0.6128, 0.3348, 0.7050, -0.1619, 0.4656, 0.5829, 0.3643).$$

表3  $\hat{\sigma}$  值

| 中信证券    | 中国太保    | 中国人寿    | 中国平安    | 中国联通    | 招商证券    | 招商银行    | 新华保险    | 万华化学    | 上汽集团    | 青岛海尔   | 绿地控股    | 恒瑞医药   | 海螺水泥   | 宝钢股份   |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|--------|--------|--------|
| 0.1983  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0637  | 0.2631  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0599  | 0.1755  | 0.1832  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0699  | 0.1862  | 0.0495  | 0.1676  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0292  | 0.0372  | -0.004  | 0.0296  | 0.3154  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.1712  | 0.0073  | -0.0082 | -0.0068 | 0.0005  | 0.1322  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0751  | 0.1277  | 0.0207  | 0.0592  | -0.0103 | 0.0167  | 0.1997  | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0668  | 0.2274  | 0.0949  | 0.053   | -0.009  | -0.0147 | 0.0102  | 0.1996  | 0       | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0702  | -0.0112 | -0.0453 | 0.0403  | 0.0153  | 0.0147  | 0.0053  | -0.0336 | 0.4032  | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0468  | 0.0729  | 0.0099  | 0.0244  | -0.0084 | -0.0012 | 0.0252  | 0.0235  | -0.0011 | 0.2268  | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0687  | 0.0775  | 0.0131  | 0.0575  | 0.0138  | 0.0036  | -0.0155 | -0.0187 | 0.02    | 0.1037  | 0.24   | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0.0816  | -0.0127 | 0.0085  | 0.0367  | 0.0125  | -0.0053 | 0.0048  | -0.0069 | 0.0187  | 0.0009  | 0.0237 | 0.2061  | 0      | 0      | 0      |
| -0.0192 | 0.0373  | 0.0148  | 0.0367  | 0.0213  | -0.0248 | -0.0059 | -0.0395 | 0.0191  | 0.0206  | 0.081  | -0.0485 | 0.2742 | 0      | 0      |
| 0.0549  | 0.0348  | -0.0233 | 0.0273  | 0.0065  | -0.0016 | 0.0315  | 0.0036  | 0.0363  | 0.015   | 0.0063 | 0.0248  | 0.0031 | 0.2699 | 0      |
| 0.0776  | 0.0106  | -0.0331 | 0.047   | 0.0032  | -0.008  | 0.0145  | -0.0348 | 0.0492  | -0.0024 | 0.0079 | -0.0017 | 0.0247 | 0.0555 | 0.2700 |

2) 产生收益率样本. 通过蒙特卡罗模拟仿真最大持有期1个月内各投资对象的股价, 计算各自收益率的1000个样本.

3) 利用 CPLEX 软件求解模型 (5). 令模型 (5) 中  $risk_0 = 5\%$ ,  $\alpha = 0.05$ , 用 CPLEX 求得最优投资组合

$$x^* = (0, 0, 0, 0.5989, 0, 0, 0, 0.0153, 0.1441, 0, 0.2056, 0, 0, 0.0361, 0),$$

最优投资收益  $\bar{r}x^* = 0.0325$ , 计算时间为 5957.49 s.

求解模型 (5) 所用的计算机配置: CPU-intel(R) Core(TM) i5-2540 M 2.60 GHz、RAM-4.00 GB、OS-Windows 7. 数值实验分析表明, 上一节提出的等效模型可以用 CPLEX 在可接受的时间内求解, 对于中小规模的结束时间不确定投资问题能够给出最优投资组合.

为了验证模型 (5) 的风险约束条件是紧约束, 进行第 2 个数值实验.

**实验 2** 投资对象选自道琼斯指数构成中的 5 家公司, 分别为波音公司 (BA)、卡特彼勒公司 (CAT)、苹果公司 (AAPL)、麦当劳 (MCD) 和沃尔玛 (WMT). 投

资开始时间为 2018 年 7 月 2 日, 投资开始之后的 3 个月内投资者可能在任意的交易日结束投资.

1) 根据历史数据估计参数  $\mu, \sigma$ . 利用 2017 年 1 月 1 日至 2017 年 12 月 30 日, 5 只股票的每日收盘调整后价格 (数据来源于 <https://finance.yahoo.com>) 计算出  $\mu, \sigma$  的估计值如下:

$$\hat{\mu} = (0.6783, 0.5712, 0.4109, 0.4007, 0.4081),$$

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0.1729 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0499 & 0.1959 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0258 & 0.0251 & 0.1719 & 0 & 0 \\ 0.0075 & 0.0450 & 0.0177 & 0.1194 & 0 \\ -0.0025 & 0.0081 & 0.0165 & 0.0092 & 0.1778 \end{bmatrix}.$$

2) 产生收益率样本. 通过蒙特卡罗模拟仿真产生最大持有期 3 个月内各投资对象的股价, 并计算给出年收益率的 100 个样本.

3) 利用 CPLEX 软件求解模型 (5). 令模型 (5) 中的  $\alpha = 0.05$ , 对不同的  $risk_0$ , 用 CPLEX 求解模型 (5). 最优解给出的目标函数值  $\bar{r}x^*$  和  $z^*$ , 以及根据最优解给出的投资组合  $x^*$  计算出的  $PVaR_{0.95}(x^*)$  值见表 4.

表 4 最优投资组合的收益和风险及  $z$  值

|                    | $risk_0$ |        |        |        |       |        |        |        |        |        |        |        |        |       |
|--------------------|----------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
|                    | 0.015    | 0.020  | 0.025  | 0.030  | 0.035 | 0.040  | 0.045  | 0.050  | 0.055  | 0.060  | 0.065  | 0.070  | 0.075  | 0.080 |
| $\bar{r}x^*$       | 0.0767   | 0.0811 | 0.0846 | 0.0868 | 0.089 | 0.0897 | 0.0903 | 0.0911 | 0.0918 | 0.0925 | 0.0929 | 0.0933 | 0.0936 | 0.094 |
| $z^*$              | 0.150    | 0.020  | 0.025  | 0.030  | 0.035 | 0.040  | 0.045  | 0.050  | 0.055  | 0.060  | 0.065  | 0.070  | 0.075  | 0.080 |
| $PVaR_{0.95}(x^*)$ | 0.150    | 0.020  | 0.025  | 0.030  | 0.035 | 0.040  | 0.045  | 0.050  | 0.055  | 0.060  | 0.065  | 0.070  | 0.075  | 0.080 |

由表 4 可见, 数值实验 2 的结果显示在不同的风险要求  $risk_0$  下, 随着风险的增加, 投资收益也在增加, 与高风险高收益相符. 模型 (5) 给出的最优解始终满足  $z^* = risk_0$ , 即风险约束条件  $z \leq risk_0$  是紧约束. 在上一节引入中间变量  $Z^k$  改变约束条件中  $\max$  函数表达形式时, 有

$$\{Z^k; k = 1, \dots, M\}^{[(1-\alpha)M]+1} \geq \{L_T^k(x, \xi^k); k = 1, \dots, M\}^{[(1-\alpha)M]+1},$$

即

$$z \geq PVaR_{1-\alpha}(x).$$

通过检验发现,  $z^* = PVaR_{1-\alpha}(x^*)$ . 由上一节的分析可知,  $z^* = PVaR_{1-\alpha}(x^*)$  时  $y^*$  的取值唯一且满足模型 (4) 的约束条件. 因此, 通过数值实验再次验证了通过模型 (5) 求得的最优解是模型 (4) 的最优解.

## 4 结论

本文针对金融投资中结束时间具有不确定性、投资人对结束时间无偏好的投资问题, 采用 PVaR 度

量投资期间的市场风险, 建立投资收益最大化投资组合优化模型. 在模型的求解上, 由于 PVaR 的非线性使得优化模型中包含  $\max$  函数和排序函数, 无法直接采用传统优化方法求解. 因此定义了等效模型的概念, 并证明了通过求解与原模型等效的混合整数规划模型可以获得原模型的最优解. 利用金融市场的真实数据检验了本文所提方法的可行性. 数值实验计算结果表明, 对于中小规模的金融资产组合优化模型, 本文所提的等效模型可以在有效时间内给出最优投资决策方案. 但是, 由于混合整数规划的求解复杂度, 该方法只适用于少数资产、短期投资. 对于资产数目较多、投资持有期较长的情况如何求解, 将在今后的研究工作中尝试智能算法.

## 参考文献 (References)

[1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.  
 [2] Konno H, Yamazaki H. Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock

- market[J]. *Management Science*, 1991, 37: 517-531.
- [3] Konno H, Shirakawa H, Yamazaki H. A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model[J]. *Annals of Operations Research*, 1993, 45: 205-220.
- [4] Campbell R, Huisman R, Koedijk K. Optimal portfolio selection in a value-at-risk framework[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2001, 25(9): 1789-1804.
- [5] Rockafellar R T, Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk[J]. *Journal of Risk*, 2000, 2(3): 21-41.
- [6] Kolm P N, Tütüncü R, Fabozzi F J. 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends[J]. *European Journal of Operational Research*, 2014, 234(2): 356-371.
- [7] Merton R C. Optimum consumption and Portfolio rules in a continuous-time model[J]. *Journal of Economic Theory*, 1971, 3(4): 373-413.
- [8] Blanchet-Scalliet C, Karoui N E, Jeanblanc M, et al. Optimal investment decisions when time-horizon is uncertain[J]. *Journal of Mathematical Economics*, 2008, 44(11): 1100-1113.
- [9] Zeng Y, Wu H L, Lai Y Z. Optimal investment and consumption strategies with state-dependent utility functions and uncertain time-horizon[J]. *Economic Modelling*, 2013, 33(2): 462-470.
- [10] Martellini L, Urošević B. Static mean-variance analysis with uncertain time horizon[J]. *Management Science*, 2006, 52(6): 955-964.
- [11] Keykhai R. Mean-variance portfolio optimization when each asset has individual uncertain exit-time[J]. *Pakistan Journal of Statistics & Operation Research*, 2016, 12(4): 765-773.
- [12] 郭文旌, 胡奇英. 不确定终止时间的多阶段最优投资组合[J]. *管理科学学报*, 2005, 8(2): 13-19.  
(Guo W J, Hu Q Y. Multi-period optimization when exit time is uncertain[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 8(2): 13-19.)
- [13] Yi L, Li Z F, Li D. Multi-period portfolio selection for asset-liability management with uncertain investment horizon[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2008, 4(3): 535-552.
- [14] Wu H L, Li Z F. Multi-period mean-variance portfolio selection with Markov regime switching and uncertain time-horizon[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2011, 24(1): 140-155.
- [15] 李仲飞, 姚海祥. 不确定退出时间和随机市场环境下风险资产的动态投资组合选择[J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(11): 2737-2747.  
(Li Z F, Yao H X. Dynamic portfolio selection of risky assets under uncertain exit time and stochastic market environment[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2014, 34(11): 2737-2747.)
- [16] Li Z F, Xie S X. Mean-variance portfolio optimization under stochastic income and uncertain exit time[J]. *Dynamics of Continuous Discrete & Impulsive Systems*, 2010, 1(1): 131-147.
- [17] Zhang L, Li Z F. Multi-period mean variance portfolio selection with uncertain time horizon when returns are serially correlated[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, DOI: 10.1155/2012/216891.
- [18] Yao H X, Zeng Y, Chen S M. Multi-period mean-variance asset-liability management with uncontrolled cash flow and uncertain time-horizon[J]. *Economic Modelling*, 2013, 30(1): 492-500.
- [19] Yao H X, Lai Y Z, Hao Z F. Uncertain exit time multi-period mean-variance portfolio selection with endogenous liabilities and Markov jumps[J]. *Automatica*, 2013, 49(11): 3258-3269.
- [20] 姚海祥, 伍慧玲, 曾燕. 不确定终止时间和通货膨胀影响下风险资产的最优投资策略[J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(5): 1089-1099.  
(Yao H X, Wu H L, Zeng Y. Optimal investment strategy for risky assets under uncertain time-horizon and inflation[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2014, 34(5): 1089-1099.)
- [21] Keykhai R. Portfolio selection in a regime switching market with a bankruptcy state and an uncertain exit-time: multi-period mean-variance formulation[J]. *Operational Research*, 2018(3): 1-24.
- [22] Yi L, Wu X P, Li X, et al. A mean-field formulation for optimal multi-period mean-variance portfolio selection with an uncertain exit time[J]. *Operations Research Letters*, 2014, 42(8): 489-494.
- [23] Cui X Y, Li X, Wu X P, et al. A mean-field formulation for multi-period asset-liability mean-variance portfolio selection with an uncertain exit time[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2018, 69(4): 487-499.
- [24] Huang D, Zhu S S, Fabozzi F J, et al. Portfolio selection with uncertain exit time: A robust CVaR approach[J]. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 2008, 32(2): 594-623.
- [25] Huo Y L, Xu C H, Osaka K, et al. Period value at risk and its estimation by simulation[J]. *Information*, 2014, 17(6): 2605-2617.
- [26] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case[J]. *Review of Economics & Statistics*, 1969, 51(3): 247-257.
- [27] Shinji N. Stochastic process and numerical analysis in finance(in Japanese)[M]. Tokyo: Sigmabase Capital limited, 2005: 474-485.

## 作者简介

霍艳丽(1985—), 女, 讲师, 博士, 从事投资风险管理的  
研究, E-mail: huoyanli2014@163.com;

徐春晖(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事风险管理  
等研究, E-mail: xchunhui@yahoo.co.jp;

黄敏(1968—), 女, 教授, 博士生导师, 从事风险管理、物  
流供应链管理研究, E-mail: mhuang@ise.neu.edu.cn;

王大志(1978—), 男, 讲师, 博士, 从事系统建模与优化、  
风险管理的研究, E-mail: wangdazhil@ise.neu.edu.cn.

(责任编辑: 齐 霖)