控制与决策
Control and Decision

犹豫模糊信息相似性测度与群一致性测度及群决策应用

吕金辉，郭嗣琮，郭芳芳

文章编号: 1001-0920(2020)08-1987-10　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1511

犹豫模糊信息相似性测度与群一致性测度及群决策应用

吕金辉[1], 郭嗣琮[1†], 郭芳芳[2]

(1. 辽宁工程技术大学 智能工程与数学研究院，辽宁 阜新 123000；
2. 淮南师范学院 经管学院，安徽 淮南 232038)

摘　要: 针对目前关于犹豫模糊运算与测度的研究中存在的不足,首先给出犹豫模糊熵函数的定义,并将其作为犹豫模糊信息不确定性测度,进而提出犹豫模糊信息特征向量概念,以信息特征向量为出发点对犹豫模糊距离测度和相似性测度展开研究;为优化群决策过程,提出基于完全优先关系的群一致性测度概念并研究其性质;最后,提出基于相似性测度和群一致性测度的群决策方法并结合算例验证所提出方法的有效性.

关键词: 犹豫模糊熵函数；信息特征向量；相似性测度；群一致性测度；排序妥协解

中图分类号: C934　　**文献标志码:** A

Similarity measure of hesitant fuzzy sets and group consensus measure and its application in group decision-making

LYU Jin-hui[1], *GUO Si-cong*[1†], *GUO Fang-fang*[2]

(1. Institute of Intelligence Engineering and Mathematics, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China; 2. School of Economics and Management, Huainan Normal University, Huainan 232038, China)

Abstract: In view of the shortcomings in the current research on hesitant fuzzy operations and measures, the hesitant fuzzy entropy function is defined firstly, which is a measure of the degree of uncertainty of hesitant fuzzy information. Then, the concept of hesitant fuzzy information characteristic vector is proposed. The hesitant fuzzy distance measure and similarity measure are studied based on the information characteristic vector. In order to optimize the group decision process, the concept of group consensus measure based on complete priority relation is proposed and its properties are studied. Finally, the hesitant fuzzy group decision-making method based on similarity measure and group consensus measure is given, and the effectiveness of the proposed method is verified by a numerical example.

Keywords: hesitant fuzzy entropy function; information characteristic vector; similarity measure; group consensus measure; sorting compromise solution

0　引　言

作为模糊集[1]的一类扩展形式,犹豫模糊集[2-3]允许集合中元素的隶属度有几个可能的值,因此,犹豫模糊集能够更好地模拟决策者的犹豫偏好. 犹豫模糊集自提出以来便受到国内外学者的广泛关注,主要研究工作集中在以下几个方面: 1) 犹豫模糊环境下各种测度方法的研究[4-9]; 2) 犹豫模糊信息集成算子的研究[10-13]; 3) 犹豫模糊集理论的拓展[14-16].

需要指出的是,关于犹豫模糊集的运算、排序及各种测度的研究往往要求犹豫模糊元具有相同的长度,而在实际应用中,犹豫模糊元多表现为长度不等. 针对这种情况,经常采用的方法是:添加一些元素到长度较短的犹豫模糊元中,使其与另一犹豫模糊元等长. 显而易见,这种方法必然会破坏原始数据结构,改变数据信息. 如何克服该方法的不足,成为犹豫模糊集发展过程中亟待解决的问题. 一些学者针对此问题展开了相应的研究,文献 [17] 提出了犹豫度概念,并依此提出新的犹豫模糊距离测度和相似性测度公式;文献 [18-19] 在文献 [17] 的基础上,对区间值犹豫模糊集和双重犹豫模糊集的测度进行了研究. 需要指出的是,文献 [17] 提出的犹豫度存在待完善之处:犹豫度除了考虑犹豫模糊元中元素个数,还应考虑元素间的差异程度.

犹豫模糊集作为一种崭新的不确定性决策信息描述工具,在群决策问题中有着广泛的应用前景. 犹豫模糊群决策的研究主要集中在: 1) 基于信息集

收稿日期: 2018-11-05；**修回日期:** 2019-03-28.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (61350003)；中国科学院重点咨询项目 (2017-ZZ-23).
责任编委: 刘宝碇.

†通讯作者. E-mail: guosizong@163.com.

成与测度研究的群决策方法[20-23]; 2) 基于犹豫模糊集与TOPSIS或VIKOR等决策方法结合的群决策方法[24-27]; 3) 基于犹豫模糊行为的群决策方法[28-31]; 4) 决策信息为犹豫模糊偏好关系的群决策方法[32-34].

群共识性[35-39]研究已成为群决策中一个重要研究方向. 目前,关于群共识性的研究主要存在两方面待完善之处: 1) 相关问题研究主要面向基数决策信息,通过适当地测度度量个体决策意见之间的偏差或个体意见与群体意见之间的偏差,进而确定群共识水平,而对于序数决策信息的群决策问题(即已知专家个体对方案集的排序结果),研究成果匮乏; 2) 群共识性阈值由决策者设定,具有较强主观性,缺少原则性根据.

基于上述分析,首先,本文提出犹豫模糊熵函数与犹豫模糊信息特征向量的概念,旨在解决犹豫模糊集的运算、排序及各种测度的研究中需要等长度处理数据的问题,并对犹豫模糊不确定测度、距离测度、相似性测度展开研究;然后,定义群一致性测度,旨在分析专家个体意见的共识性程度,达到优化决策过程的目的;最后,基于相似性测度和群一致性测度,构建一种犹豫模糊群决策方法,并通过算例验证所提出方法的可行性和有效性.

1 预备知识

定义1[2-3] 设$X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$为一个给定的非空集合,定义在集合X上的犹豫模糊集H是从X到区间$[0,1]$上的一个子集的映射函数,记作

$$H=\{\langle x,h_H(x)\rangle|x\in X\}.$$

其中: $h_H(x)$为区间$[0,1]$中几个不同的实数值的集合,表达的是元素x属于集合H的几种可能的程度,并称$h_H(x)$为犹豫模糊数或犹豫模糊元,在不引起混淆的情况下可简记为$h=h_H(x)$. 犹豫模糊数可更详细地表示为$h=H\{\gamma^1,\gamma^2,\dots,\gamma^l\}$,其中$l$表示犹豫模糊数$h$中元素的个数. 显然当$l=1$时,犹豫模糊集$H$退化为传统模糊集.

定义2[2-3] 设$X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$为一个给定的非空集合,则称$H^c=\{\langle x,h_H^c(x)\rangle|x\in X\}$为犹豫模糊集$H$的补集,其中

$$h_H^c(x)=\bigcup_{\gamma\in h_H(x)}\{1-\gamma\}.$$

距离测度和相似性测度是模糊集理论中的重要研究内容,具有广泛的应用背景,文献[4]给出了犹豫模糊集的距离测度和相似性测度的公理化定义.

定义3[4] 设A、B为定义在$X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$上的两个犹豫模糊集,则A、B间的距离测度满足如下条件:

1) $0\leqslant d(A,B)\leqslant 1$;

2) $d(A,B)=0$,当且仅当$h_A(x)=h_B(x),\forall x\in X$;

3) $d(A,B)=d(B,A)$.

定义4[4] 设A、B为定义在$X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$上的两个犹豫模糊集,则A、B间的相似性测度满足如下条件:

1) $0\leqslant S(A,B)\leqslant 1$;

2) $S(A,B)=1$,当且仅当$h_A(x)=h_B(x),\forall x\in X$;

3) $S(A,B)=S(B,A)$.

定义3中的1)是为方便利用距离测度定义相似性测度而提出的,在实际中距离只要满足$d(A,B)\geqslant 0$即可.

2 一类新的犹豫模糊熵

熵是信息不确定性程度的测度,一直以来都是不确定性决策分析中的重要研究对象,针对现有犹豫模糊熵测度存在的不足,给出犹豫模糊熵函数定义.

定义5 设犹豫模糊元$h=\bigcup_{\gamma\in h}\{\gamma\}=\{\gamma_j\}_{j=1}^l$, l为犹豫模糊元中元素个数,记

$$x=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}(1-2|\gamma_j-0.5|).$$

$$y=\begin{cases}\dfrac{2}{l(l-1)}\displaystyle\sum_{i、j=1,i<j}^{l}|\gamma_i-\gamma_j|,\ l>1;\\ 0,\ l=1.\end{cases}$$

其中: x为犹豫模糊元h的模糊度, y为犹豫模糊元h的犹豫度. 则作用在犹豫模糊元h上的实值函数$E:H\to[0,1]$可由二元函数$E(x,y)$表示,若$E(x,y)$满足下列条件,则称$E(x,y)$为犹豫模糊熵函数:

1) $E(x,y)=0$当且仅当$x=0$且$y=0$;

2) $E(x,y)=1$当且仅当$(x,y)=(1,0)$或$(x,y)=(0,1)$;

3) $\dfrac{\partial E}{\partial x}>0$且$\dfrac{\partial E}{\partial y}>0$, $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2}>0$且$\dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2}>0$;

4) $E(x,y)=E(y,x)$.

解释分析:

1) $y=0\leftrightarrow l=1,x=0\leftrightarrow h=\{0\}\bigvee h=\{1\}\bigvee h=\{0,1\}$,则$x=0\bigwedge y=0\leftrightarrow h=\{0\}\bigvee h=\{1\}$. $h=\{0\}$或$h=\{1\}$,说明h为清晰集,则熵$E(h)=E(x,y)=0$.

2) 当$l>1$时,有

$$x=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}(1-2|\gamma_j-0.5|)=\frac{1}{l(l-1)}\sum_{i、j=1,i<j}^{l}\leqslant$$

$$[(1-2|\gamma_i-0.5|)+(1-2|\gamma_j-0.5|)],$$

$$y=\frac{2}{l(l-1)}\sum_{i、j=1,i<j}^{l}|\gamma_i-\gamma_j|=$$
$$\frac{2}{l(l-1)}\sum_{i、j=1,i<j}^{l}|(\gamma_i-0.5)+(0.5-\gamma_j)|\leqslant$$
$$q\frac{2}{l(l-1)}\sum_{i、j=1,i<j}^{l}|(\gamma_i-0.5)|+|0.5-\gamma_j|,$$

可得$x+y\leqslant 1$,由此可得熵函数$E(x,y)$的定义域为$\{(x,y)|x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1\}$;又因为熵函数$E(x,y)$关于$x,y$凹增,所以$(x,y)=(1,0)\bigvee(x,y)=(0,1)\rightarrow E(x,y)=1$,而$(x,y)=(1,0)\leftrightarrow h=\{0.5\}$,$(x,y)=(0,1)\leftrightarrow h=\{0,1\}$,又因为$l>1$,所以当$h=\{0,1\}$时,不确定性达到最大.

当$l=1$时,有$y=0$,则$(x,y)=(1,0)\rightarrow E(x,y)=1$,即$h=\{0.5\}$时,不确定性最大.

$h=\{0,1\}$是完全矛盾的信息,$h=\{0.5\}$是完全模糊信息,两种情况下不确定性均达到最大.

3) 保证了熵函数关于模糊度和犹豫度凹增,符合人的认知特点,并且提高了区分度.

4) 模糊性和犹豫性对于熵的影响一样大.

基于上述分析,函数$E(x,y)=x^2+y^2$显然满足上述条件,因此可作为一个熵函数

性质1 设犹豫模糊元$h=\bigcup_{\gamma\in h}\{\gamma\}=\{\gamma_j\}_{j=1}^{l}$,当$l=1$时,犹豫模糊元$h$退化为模糊数,则模糊数$h$的熵$E(h)=E(x,y)$. 其中$E(x,y)$为犹豫模糊熵函数.

证明

1) $E(h)=E(x,y)=0\leftrightarrow x=0\bigwedge y=0\leftrightarrow h=\{0\}\bigvee h=\{1\}$,即$h=\{0\}$或$h=\{1\}$,$h$为清晰集.

2) 根据条件2)可得$E(h)=E(x,y)=1\leftrightarrow(x,y)=(0,1)\bigvee(x,y)=(1,0)\leftrightarrow h=\{0,1\}\bigvee h=\{0.5\}$;又因为$l=1$,所以$E(h)=E(x,y)=1\leftrightarrow h=\{0.5\}$,即$h=\{0.5\}$时,不确定性最大.

3) 根据条件3)可知,$E(x,y)$关于x单调递增,所以γ_j越接近0.5,$x=\dfrac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}(1-2|\gamma_j-0.5|)$越大,模糊值$h$的熵$E(h)=E(x,y)$越大. □

性质1表明模糊熵是犹豫模糊熵函数的特例,犹豫模糊熵函数同样可以适用于模糊集.

为了说明本文提出的熵函数在度量不确定性上的优势,下面将与现有熵公式进行比较分析:目前犹豫模糊熵常用公式有Xu和Xia[4]提出的熵公式以及Farhadinia[40]提出的熵公式,其中

$$E_{\rm Xu}(h)=-\frac{1}{l\ln 2}\sum_{i=1}^{l}\Big(\frac{\gamma^i+\gamma^{l-i+1}}{2}\ln\frac{\gamma^i+\gamma^{l-i+1}}{2}+\frac{2-\gamma^i-\gamma^{l-i+1}}{2}\ln\frac{2-\gamma^i-\lambda^{l-i+1}}{2}\Big).$$

这里l为犹豫模糊数h中所含元素个数,γ^i为犹豫模糊数h中第i大的元素.

$$E_{\rm Pa}(h)=\frac{Z(2d(h,\{0.5\}))-Z(1)}{Z(0)-Z(1)}.$$

其中:$Z:[0,1]\rightarrow[0,1]$为严格单调递减函数,可取$Z(t)=1-t$,$Z(t)=\dfrac{1-t}{1+t}$,$Z(t)=1-t^2$,$Z(t)=1-te^{t-1}$;$d(h,\{0.5\})=\dfrac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}|\gamma^i-0.5|$,$\gamma^i\in h$,$l$为犹豫模糊数$h$中所含元素个数.

设犹豫模糊数$h_1=H\{0.2,0.4\}$,$h_2=H\{0.3,0.5\}$,$h_3=H\{0.1,0.2,0.3\}$,$h_4=H\{0.4,0.5,0.6\}$,$h_5=H\{0.3,0.6\}$,$h_6=H\{0.4,0.5\}$,$h_7=H\{0.3,0.5,0.6\}$,$h_8=H\{0.2,0.5,0.7\}$. 将Xu和Xia[4]提出的熵公式以及Farhadinia[40]提出的熵公式与本文提出的熵函数进行比较,结果见表1.

表1 犹豫模糊熵值比较

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
$E_{\rm Xu}(h)$	0.881	0.971	0.640	1	0.993	0.993	0.995	0.995
$E_{\rm Pa}(h)$	0.6	0.8	0.4	0.867	0.7	0.9	0.8	0.6
$E_{\rm L}(h)$	0.4	0.68	0.177	0.774	0.58	0.82	0.68	0.556

由于Farhadinia提出的熵公式中仅考虑模糊度,而忽略了犹豫度的影响,结果与本文提出的方法及Xu提出方法的结果相差较大,通过表1不难发现,本文提出的方法区分度明显高于Xu提出的方法,并且比较结果与其接近,个别结果不一致,例如$E_{\rm Xu}(h_4)>E_{\rm Xu}(h_6)$,而本文方法的比较结果为$E_{\rm Lv}(h_4)<E_{\rm Lv}(h_6)$,这是由于出发点不一致,Xu对于两个犹豫模糊数的比较前提是要求二者所含元素个数相等,对于所含元素个数不等的情况需要人为添加元素,因此其提出的方法对于所含元素个数不一样的两个犹豫模糊数熵的比较结果必然与直觉判断有一定偏差. 本文提出的熵测度函数不仅考虑模糊度对熵值的影响,而且还考虑犹豫度对熵值的影响,能够更加合理地刻画犹豫模糊数的不确定程度,因此其结果也更符合直觉.

3 犹豫模糊距离测度与相似性测度

对于一个犹豫模糊元$h=\bigcup_{\gamma\in h}\{\gamma\}=\{\gamma_j\}_{j=1}^{l}$,它包含的最主要的信息是$\gamma$值的大小与不确定性程度,这也是在具体应用中人们普遍关心的问题. 基于此,引入犹豫模糊信息特征向量定义.

定义6 设犹豫模糊元$h=\bigcup_{\gamma\in h}\{\gamma\}=\{\gamma_j\}_{j=1}^{l}$,则称二维向量$(s(h),E(h))$为犹豫模糊元$h$的信息特

征向量,记作

$$h=(s(h),E(h)). \tag{1}$$

其中: $s(h)=\dfrac{1}{l}\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_j$ 为犹豫模糊元 h 的大小; $E(h)$ 为犹豫模糊元 h 的熵,代表其不确定性程度,可由定义6计算得到

定义7 设 $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ 为非空论域, $A_j=\{\langle x_i,h_{A_j}(x_i)\rangle|x_i\in X\}\,(j=1,2)$ 为定义在 X 上的2个犹豫模糊集,其信息特征向量分别为 $A_j=\{(s_{A_j}(x_i),E_{A_j}(x_i))|x_i\in X\}$, $j=1,2$. 为方便行文,记 $(s_{A_j}(x_i),\,E_{A_j}(x_i))=(s_{ij},\,E_{ij})=A_j(x_i)$,则称

$$d(A_1,A_2)=R(A_1,A_2)+R(A_2,A_1) \tag{2}$$

为 A_1、A_2 的距离测度,其中

$$R(A_1,A_2)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{\varDelta=s,E}\Big[\varDelta_{i1}\cdot\log\frac{\varDelta_{i1}}{\varDelta_{i2}}+(1-\varDelta_{i1})\cdot\log\frac{1-\varDelta_{i1}}{1-\varDelta_{i2}}\Big]\Big),$$

$$R(A_2,A_1)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{\varDelta=s,E}\Big[\varDelta_{i2}\cdot\log\frac{\varDelta_{i2}}{\varDelta_{i1}}+(1-\varDelta_{i2})\cdot\log\frac{1-\varDelta_{i2}}{1-\varDelta_{i1}}\Big]\Big),$$

这里 $\varDelta\in\{s,E\}$ 为符号变量.

基于信息特征向量的距离测度是基于相对熵思想提出的,容易验证其满足以下性质.

性质2 设 $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ 为非空论域, $A_j=\{\langle x_i,h_{A_j}(x_i)\rangle|x_i\in X\}\,(j=1,2)$ 为定义在 X 上的2个犹豫模糊集,其距离测度为 $d(A_1,A_2)$,则有

1) $d(A_1,A_2)\geqslant 0$;

2) $d(A_1,A_2)=0$,当且仅当 $A_1(x_i)=A_2(x_i)$, $i=1,2,\dots,m$;

3) $d(A_1,A_2)=d(A_2,A_1)$.

证明 令 $f(t)=-\log t$,由 $f''(t)=1/t^2>0$ 可知, $f(t)$ 为定义域内的凹函数,即 $f(\lambda_1t_1+\lambda_2t_2)\leqslant\lambda_1f(t_1)+\lambda_2f(t_2)$,其中 λ_1、$\lambda_2\in(0,1)$, $\lambda_1+\lambda_2=1$. 当且仅当 $t_1=t_2$ 时,等号成立. 假设 $t_1=\dfrac{\varDelta_{i2}}{\varDelta_{i1}}$, $t_2=\dfrac{1-\varDelta_{i2}}{1-\varDelta_{i1}}$, $\lambda_1=\varDelta_{i1}$, $\lambda_2=1-\varDelta_{i1}$,代入 $f(\lambda_1t_1+\lambda_2t_2)\leqslant\lambda_1f(t_1)+\lambda_2f(t_2)$ 可得

$$0\leqslant\varDelta_{i1}\cdot\log\frac{\varDelta_{i1}}{\varDelta_{i2}}+(1-\varDelta_{i1})\cdot\log\frac{1-\varDelta_{i1}}{1-\varDelta_{i2}}.$$

当且仅当 $t_1=\dfrac{\varDelta_{i2}}{\varDelta_{i1}}=\dfrac{1-\varDelta_{i2}}{1-\varDelta_{i1}}=t_2$ 时

$$\varDelta_{i1}\cdot\log\frac{\varDelta_{i1}}{\varDelta_{i2}}+(1-\varDelta_{i1})\cdot\log\frac{1-\varDelta_{i1}}{1-\varDelta_{i2}}=0,$$

此时 $\varDelta_{i1}=\varDelta_{i2}$. 则有

$$R(A_1,A_2)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{\varDelta=s,E}\Big[\varDelta_{i1}\cdot\log\frac{\varDelta_{i1}}{\varDelta_{i2}}+(1-\varDelta_{i1})\cdot\log\frac{1-\varDelta_{i1}}{1-\varDelta_{i2}}\Big]\Big)\geqslant 0.$$

当且仅当 $\varDelta_{i1}=\varDelta_{i2}(\varDelta=s,E;i=1,2,\dots,m)$ 时, $R(A_1,A_2)=0$.

同理可得 $R(A_2,A_1)\geqslant 0$,当且仅当 $\varDelta_{i1}=\varDelta_{i2}(\varDelta=s,\,E;i=1,2,\dots,m)$ 时, $R(A_2,A_1)=0$. 综上可得1)、2)成立.

根据表达式本身可判断3)显然成立. □

注意: 性质2的2)中 $A_1(x_i)=A_2(x_i)$, $i=1,2,\dots,m$,并不等价于 $A_1=A_2$,例如取 $A_1=\{\langle x,\{0.5\}\rangle\}$, $A_2=\{\langle x,\{0,1\}\rangle\}$,显然 $A_1\neq A_2$. 信息特征向量表示分别为 $A_1=\{\langle x,(0.5,1)\rangle\}$, $A_2=\{\langle x,\{0.5,1\}\rangle\}$,根据性质2中的2)有 $d(A_1,A_2)=0$. 此时结果与人的直觉相符,因为完全模棱两可的信息与完全矛盾的信息能够传达的信息量是一样的,这也是本文提出的距离测度与其他犹豫模糊距离测度的主要不同之处.

受TOPSIS思想启发,下面给出基于犹豫模糊距离测度的犹豫模糊相似性测度公式.

定义8 设 $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ 为非空论域, $A_j=\{\langle x_i,h_{A_j}(x_i)\rangle|x_i\in X\}\,(j=1,2)$ 为定义在 X 上的2个犹豫模糊集,则称

$$S(A_1,A_2)=\frac{d(A_1,A_2^c)}{d(A_1,A_2)+d(A_1,A_2^c)} \tag{3}$$

为 A_1、A_2 的相似性测度.

性质3 设 $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ 为非空论域, $A_j=\{\langle x_i,h_{A_j}(x_i)\rangle|x_i\in X\}\,(j=1,2)$ 为定义在 X 上的2个犹豫模糊集, A_1、A_2 的相似性测度为 $S(A_1,A_2)$,则有

1) $0\leqslant S(A_1,A_2)\leqslant 1$;

2) $S(A_1,A_2)=S(A_2,A_1)$;

3) $S(A_1,A_2)=0$,当且仅当 $A_1(x_i)=A_2^c(x_i)$, $i=1,2,\dots,m$;

4) $S(A_1,A_2)=1$,当且仅当 $A_1(x_i)=A_2(x_i)$, $i=1,2,\dots,m$;

5) 当且仅当 $d(A_1,A_2)=d(A_1,A_2^c)$ 时, $S(A_1,A_2)=1/2$.

性质3由式(3)本身即可判定,证明过程略.

实际应用中,论域 X 中的不同元素具有不同的地位,应赋予不同权重. 下面给出考虑权重的相似性测度公式

$$S_w(A_1,A_2)=\frac{d_w(A_1,A_2^c)}{d_w(A_1,A_2)+d_w(A_1,A_2^c)}. \tag{4}$$

其中

$$d_w(A_1,A_2)=R_w(A_1,A_2)+R_w(A_2,A_1)=$$

$\sum_{i=1}^{m}\Big(w_i\sum_{\Delta=s,E}\Big[\Delta_{i1}\cdot\log\dfrac{\Delta_{i1}}{\Delta_{i2}}+(1-\Delta_{i1})\cdot\log\dfrac{1-\Delta_{i1}}{1-\Delta_{i2}}\Big]\Big)+\sum_{i=1}^{m}\Big(w_i\sum_{\Delta=s,E}\Big[\Delta_{i2}\cdot\log\dfrac{\Delta_{i2}}{\Delta_{i1}}+(1-\Delta_{i2})\cdot\log\dfrac{1-\Delta_{i2}}{1-\Delta_{i1}}\Big]\Big).$

这里w_i为元素$x_i(i=1,2,\dots,m)$的权重,且满足$\sum_{i=1}^{m}w_i=1,w_i\in[0,1]$. 显然,当$w_i=\dfrac{1}{m}(i=1,2,\dots,m)$时,$d_w(A_1,A_2)=d(A_1,A_2),S_w(A_1,A_2)=S(A_1,A_2)$.

4　群一致性测度与排序妥协解

定义9　设专家集$E=\{e_1,e_2,\dots,e_K\}$、方案集$X=\{x_1,x_2,\dots,x_M\}$,已知专家$e_k(k=1,2,\dots,K)$评价下方案间的完全优先关系排序为$S_k:S_k(x^{(1)})\to S_k(x^{(2)})\to\dots\to S_k(x^{(M)})$. 其中:"$\to$"表示优先关系,即当$i<j$时,有$S_k(x^{(i)})\succ S_k(x^{(j)})\bigvee S_k(x^{(i)})=S_k(x^{(j)})$. 根据专家对方案集的排序建立基于序数等级的划分$A=\{A_1,A_2,\dots,A_M\}$,其中$A_r\subseteq X(r=1,2,\dots,M)$为序数为$r$的方案构成的方案子集,则$A_r$关于划分$A$的相对一致性测度为

$$P_A(A_r)=\frac{\mathrm{cnt}(A_r)}{\sum_{r=1}^{O}\mathrm{cnt}(A_r)},$$

其中cnt(·)为计数函数. 方案$x_{mr}\in A_r$关于A_r的相对一致性测度为

$$P_{A_r}(x_{mr})=\frac{\varphi(x_{mr})}{\sum_{m=1}^{M}\varphi(x_{mr})}.$$

其中:$\varphi(x_{mr})$表示认定方案x_m的序数为r的专家个数,$P_{A_r}(x_{mr})$的本质是序数为r的方案集的可能性分布. 则定义专家集E对方案集X排序结果的一致性测度为

$$\mathrm{GCD}(E,X)=\sum_{r=1}^{O}\sum_{m=1}^{M}P_{A_r}^2(x_{mr})\cdot P_A(A_r).\tag{5}$$

例如: 3位专家对3个方案进行排序: 1) 若排序结果分别为$e_1:x_1\succ x_2\succ x_3,e_2:x_2\succ x_3\succ x_1,e_3:x_3\succ x_1\succ x_2$,则$A=\{A_1,A_2,A_3\}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\},P_A(A_1)=P_A(A_2)=P_A(A_3)=1/3,P_{A_1}(x_1)=P_{A_1}(x_2)=P_{A_1}(x_3)=1/3,P_{A_2}(x_1)=P_{A_2}(x_2)=P_{A_2}(x_3)=1/3,P_{A_3}(x_1)=P_{A_3}(x_2)=P_{A_3}(x_3)=1/3$,根据式(5)可得专家对于方案的排序的一致性测度为1/3. 2) 若排序结果为$e_1:x_1\succ x_2\succ x_3,e_1:x_1\succ x_2\succ x_3,e_1:x_1\succ x_2\succ x_3$,则$A=\{A_1,A_2,A_3\}=\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\}\},P_A(A_1)=P_A(A_2)=P_A(A_3)=1/3,P_{A_1}(x_1)=1,P_{A_1}(x_2)=P_{A_1}(x_3)=0,P_{A_2}(x_2)=1,P_{A_2}(x_1)=P_{A_2}(x_3)=0,P_{A_3}(x_3)=1,P_{A_3}(x_1)=P_{A_3}(x_2)=0$,根据式(5)计算可得专家对于方案的排序结果的一致性测度为1. 3) 若排序结果为$e_1:x_1\succ x_2\succ x_3,e_1:x_1\succ x_2\succ x_3,e_1:x_3\succ x_1\succ x_2$,则$A=\{A_1,A_2,A_3\}=\{\{x_1,x_3\},\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\}\},P_A(A_1)=P_A(A_2)=P_A(A_3)=1/3,P_{A_1}(x_1)=2/3,P_{A_1}(x_3)=1/3,P_{A_2}(x_1)=1/3,P_{A_2}(x_2)=2/3,P_{A_3}(x_2)=1/3,P_{A_3}(x_3)=2/3$,根据式(5)计算可得专家对于方案的排序结果的一致性测度为5/9. 直觉易判定专家对于方案的排序结果的一致性测度的关系应该满足2) > 3) > 1),与式(5)计算结果相符.

定理1　设专家集$E=\{e_1,e_2,\dots,e_K\}$、方案集$X=\{x_1,x_2,\dots,x_M\}$,专家集E对方案集X排序结果的一致性测度为GCD(E,X),则有

1) $0<\mathrm{GCD}(E,X)\leqslant 1$;

2) 当$\mathrm{cnt}(A_r)=1(r=1,2,\dots,M)$时,$\mathrm{GCD}(E,X)=1$;

3) 当$\mathrm{cnt}(A_r)=M,\varphi(x_{mr})=1$且$M=K\to+\infty$时,$\mathrm{GCD}(E,X)\to 0$.

证明

1) 由于$\sum_{r=1}^{M}P_A(A_r)=1,\ \sum_{m=1}^{M}P_{A_r}(x_{mr})=1$,显然有$0<\mathrm{GCD}(E,X)\leqslant 1$.

2) 由$\mathrm{cnt}(A_r)=1$可得$P_{A_r}(x_{sr})=1,\ s\in\{1,2,\dots,M\},P_{A_r}(x_{tr})=0,\ t\in\{1,2,\dots,M\}\bigwedge t\neq s$,所以$\sum_{m=1}^{M}P_{A_r}^2(x_{mr})=1$,即

$$\mathrm{GCD}(E,X)=\sum_{r=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}P_{A_r}^2(x_{mr})\cdot P_A(A_r)=\sum_{r=1}^{M}P_A(A_r)=1.$$

3) 由$\mathrm{cnt}(A_r)=M$可得

$$P_A(A_r)=\frac{\mathrm{cnt}(A_r)}{\sum_{r=1}^{M}\mathrm{cnt}(A_r)}=\frac{M}{M\cdot M}=\frac{1}{M}.$$

由$M=K,\varphi(x_{mr})=1$可得

$$P_{A_r}(x_{mr})=\frac{\varphi(x_{mr})}{\sum_{m=1}^{M}\varphi(x_{mr})}=\frac{1}{M},$$

则有

$$\mathrm{GCD}(E,X)=\sum_{r=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}P_{A_r}^2(x_{mr})\cdot P_A(A_r)=$$

$$\sum_{r=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{M^2}\cdot\frac{1}{M}=\frac{1}{M}.$$

当$M=K\to+\infty$时,$\mathrm{GCD}(E,X)\to 0$. □

解释与分析: 2) $\mathrm{cnt}(A_r)=1$, $r=1,2,\ldots,M$, 表明每个序数位置只有一个方案,是一种确定性排序,说明专家对于该排序结果没有争议,显然应该有$\mathrm{GCD}(E,X)=1$. 3) $\mathrm{cnt}(A_r)=M$表明每位专家给出方案集的排序结果中,不存在两个方案的序数相等的情况; $M=K,\varphi(x_{mr})=1$表明在任一序数位置上,专家给出的方案各不相同,说明任意两位专家的意见均不一致. 显然,随着方案个数的增加一致性会减小,因此$M\to+\infty$时,$\mathrm{GCD}(E,X)\to 0$.

定义10 设专家集$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_K\}$、方案集$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_M\}$,已知专家$e_k(k=1,2,\ldots,K)$评价下方案间的完全优先关系排序为S_k : $S_k(x^{(1)})\to S_k(x^{(2)})\to\ldots\to S_k(x^{(M)})$. 其中"$\to$"表示优先关系. 则使$\sum\limits_{k=1}^{K}d(S_k,S)$取得最小值的解$S$: $S(x^{(1)})\to S(x^{(2)})\to\ldots\to S(x^{(M)})$称为方案集的排序妥协解,其中$d(S_k,S)$为优先排序关系$S_k$与$S$之间的距离.

在完全优先关系排序下,每一对方案存在且仅存在3种优先关系之一: x_pPx_q、x_qPx_p和x_pIx_q. 其中$x_pPx_q\leftrightarrow P_{pq}\leftrightarrow x_p\succ x_q, x_pIx_q\leftrightarrow I_{pq}\leftrightarrow x_p=x_q$. 假设$S_{pq}^k$与$S_{pq}$分别表示在专家$e_k$评价下和妥协解中方案$x_p$与$x_q$间的优先关系,根据文献[41]可知,$S_{pq}^k$与$S_{pq}$间的距离$d(S_{pq}^k,S_{pq})$定义如表2所示.

表2 不同优先关系间距离

	x_pPx_q	x_qPx_p	x_pIx_q
x_pPx_q	0	4	2
x_qPx_p	4	0	2
x_pIx_q	2	2	0

根据表2及专家个体评价下的完全优先关系排序建立如下0-1规划模型以获取排序妥协解:

$$\min\sum_{k=1}^{K}d(S_k,S)=$$

$$\min\sum_{p、q:p<q}\sum_{k=1}^{K}[\alpha_{pq}\cdot d(S_{pq}^k,P_{pq})+\alpha_{qp}\cdot d(S_{pq}^k,P_{qp})+\beta_{pq}\cdot[d(S_{pq}^k,I_{pq})-d(S_{pq}^k,P_{pq})-d(S_{pq}^k,P_{qp})]].$$

$$\text{s.t. }\alpha_{pq}+\alpha_{qp}\geqslant 1;$$
$$\alpha_{pq}\geqslant\alpha_{pr}+\alpha_{rq}-1.5;$$
$$\beta_{pq}=\alpha_{pq}+\alpha_{qp}-1;$$
$$\alpha_{pq},\beta_{pq}\in\{0,1\};$$
$$p、q、r=1,2,\ldots,M\bigwedge p\neq q\neq r.$$

其中: $\alpha_{pq}=1\leftrightarrow P_{pq},\alpha_{pq}=0\leftrightarrow P_{qp},\beta_{pq}=1\leftrightarrow\alpha_{pq}=1\bigwedge\alpha_{qp}=1$.

在群一致性测度小于阈值的情况下,如果采用基于权重的信息集结算法(本质上具有决策补偿性,即一个指标下的高评价值能够弥补另一个指标下的低评价值)获取群决策结果,则多数情况下会与专家个体结果分歧较大,排序妥协解的提出就是为了解决此类问题.

5 基于犹豫模糊信息相似性测度和群一致性测度的多因素群决策方法

5.1 问题描述

设$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_M\}$为方案集,$F=\{f_1,f_2,\ldots,f_N\}$为N个相互独立的评价因素构成的因素集,K个领域专家构成专家集$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_K\}$;由于专家来自不同领域,不同专家从不同角度分析决策问题,假设专家e_k通过因素集$F_k=\{f_1^{(k)},f_2^{(k)},\ldots,f_{l(F_k)}^{(k)}\}$评估方案,其中$F_k\subseteq F$, $\bigcup\limits_{k=1}^{K}F_k=F$, $l(F_k)$为F_k中因素的个数. 因素集$F_k=\{f_1^{(k)},f_2^{(k)},\ldots,f_{l(F_k)}^{(k)}\}$的权重向量$W^{(k)}=(w_1^{(k)},w_2^{(k)},\ldots,w_{l(F_k)}^{(k)})^{\mathrm{T}}$ $(k=1,2,\ldots,K)$已知. 决策者$e_k(k=1,2,\ldots,K)$根据经验给出方案$x_m(m=1,2,\ldots,M)$在因素$f_n(n=1,2,\ldots,l(F_k))$上的判断值$h_{mn}^{(k)}$,则构成K个决策矩阵$\mathrm{DM}_k=(h_{mn}^{(k)})_{M\times l(F_k)}(k=1,2,\ldots,K)$. 其中: $h_{mn}^{(k)}$为犹豫模糊数,表示专家e_k认为方案x_m在评价因素f_n下的表现满足决策要求的程度.

5.2 决策步骤

step 1: 利用式(1)将决策矩阵DM_k转化为信息特征向量决策矩阵

$$\mathrm{CVDM}_k=(s(h_{mn}^{(k)}),E(h_{mn}^{(k)}))_{M\times l(F_k)}.$$

step 2: 确定CVDM_k的正理想方案$x^{(k)+}$和负理想方案$x^{(k)^-}$,其中

$$x^{(k)+}=(x_1^+,x_2^+,\ldots,x_{l(F_k)+})=(\max_m(s(h_{m1}^{(k)})),\min_m(E(h_{m1}^{(k)})),\ldots,\max_m(s(h_{m\cdot l(F_k)}^{(k)})),\min_m(E(h_{m\cdot l(F_k)}^{(k)}))),$$

$$x^{(k)-}=(x_1^-,x_2^-,\ldots,x_{l(F_k)-})=(\min_m(s(h_{m1}^{(k)})),\max_m(E(h_{m1}^{(k)})),\ldots,\min_m(s(h_{m\cdot l(F_k)}^{(k)})),\max_m(E(h_{m\cdot l(F_k)}^{(k)}))).$$

step 3: 根据式(4)计算方案x_m与正理想方案$x^{(k)+}$的加权相似度$S_{W^{(k)}}(x_m,x^{(k)+})$,方案$x_m$与负

理想方案$x^{(k)-}$的加权相似度$S_{W^{(k)}}(x_m, x^{(k)-})$.

step 4: 根据$\zeta^{(k)}(x_m)$得到专家e_k对于方案集的排序结果,其中

$$\zeta^{(k)}(x_m) = \frac{S_{W^{(k)}}(x_m, x^{(k)+})}{S_{W^{(k)}}(x_m, x^{(k)+}) + S_{W^{(k)}}(x_m, x^{(k)-})}. \tag{6}$$

显然,$\zeta^{(k)}(x_m) \in [0,1]$, $m = 1,2,\ldots,M$,且$\zeta^{(k)}(x_m)$值越大,表明专家e_k认为方案x_m越优.

step 5: 根据式(5)求得专家集对方案集进行排序结果的一致性测度GCD(E,X),若GCD$(E,X) > 0.5$,则转至step 6,否则根据优化模型(6)计算专家个体排序结果的妥协解.

step 6: 由于本文提出的决策方法要求每位专家根据自己经验和专长选择决策因素并提供决策信息,则有理由认为各个专家在决策过程中具有同等重要的地位. 因此可将K个决策矩阵DM$_k$ = $(h_{mn}^{(k)})_{M\times l(F_k)}(k = 1,2,\ldots,K)$综合为群决策矩阵DM $= (h_{mn})_{M\times N}$,其中$h_{mn} = \bigcup\limits_{f_n\in F_k} h_{mn}^{(k)}$.

step 7: 根据式(1)将决策矩阵DM转化为信息特征向量决策矩阵CVDM,即

$$\mathrm{CVDM} = (s(h_{mn}), E(h_{mn}))_{M\times N}.$$

step 8: 确定CVDM的正理想方案x^+和负理想方案x^-,其中

$$\begin{aligned} x^+ = {} & (x_1^+, x_2^+, \ldots, x_N^+) = \\ & (\max_m(s(h_{m1})), \min_m(E(h_{m1})), \ldots, \\ & \max_m(s(h_{m\cdot N})), \min_m(E(h_{m\cdot N}))), \\ x^- = {} & (x_1^-, x_2^-, \ldots, x_N^-) = \\ & (\min_m(s(h_{m1})), \max_m(E(h_{m1})), \ldots, \\ & \min(s(h_{m\cdot N})), \max(E(h_{m\cdot N}))). \end{aligned}$$

step 9: 根据式(4)计算方案x_m与正理想方案x^+的加权相似度$S_W(x_m, x^+)$,方案x_m与负理想方案x^-的加权相似度$S_W(x_m, x^-)$. 其中: $W = (w_1, w_2, \ldots, w_N)$, $w_n = \dfrac{w_n'}{\sum\limits_{n=1}^{N} w_n'}$, $w_n' = \dfrac{1}{\mathrm{cnt}(k)} \sum\limits_{k, f_n\in F_k} w_n^{(k)}$, cnt$(k)$表示满足$f_n \in F_k$的$F_k$的个数.

step 10: 根据$\zeta(x_m)$得到专家集对于方案集的排序结果,其中

$$\zeta(x_m) = \frac{S_W(x_m, x^+)}{S_W(x_m, x^+) + S_W(x_m, x^-)}. \tag{7}$$

显然,$\zeta(x_m) \in [0,1]$, $m = 1,2,\ldots,M$,并且$\zeta(x_m)$值越大,表明方案x_m越优.

6 算例分析

为方便比较分析,本文引用文献[41]中算例. 3位意向购房者构成专家集$E = \{e_1, e_2, e_3\}$,分别从f_1 = "价格"、f_2 = "内部格局"、f_3 = "交通"、f_4 = "环境"和f_5 = "使用面积" 5个方面因素对6套房子$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$进行评价. 假设3位购房者根据自身情况及偏好主要考虑的因素分别为$F_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$, $F_2 = \{f_2, f_3, f_4\}$和$F_3 = \{f_3, f_4, f_5\}$,并且$F_k(k = 1,2,3)$的权重向量分别为$W^{(1)} = (0.4, 0.3, 0.3)^{\mathrm{T}}$, $W^{(2)} = (0.2, 0.4, 0.4)^{\mathrm{T}}$, $W^{(3)} = (0.4, 0.4, 0.2)^{\mathrm{T}}$. 评价信息以犹豫模糊数的形式给出,决策矩阵如下:

$$\mathrm{DM}_1 = \begin{bmatrix} \{0.2,0.5,0.8\} & \{0.1,0.2,0.3\} & \{0.4,0.5,0.6\} \\ \{0.3,0.5,0.6\} & \{0.2,0.4,0.6\} & \{0.5,0.6,0.7\} \\ \{0.5,0.6\} & \{0.2,0.3\} & \{0.7,0.8\} \\ \{0.2,0.4\} & \{0.3,0.4\} & \{0.2,0.3,0.4\} \\ \{0.3,0.8\} & \{0.5,0.6,0.7\} & \{0.5,0.7,0.9\} \\ \{0.3,0.6,0.7\} & \{0.1,0.5\} & \{0.3,0.5\} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{DM}_2 = \begin{bmatrix} \{0.5,0.7\} & \{0.3,0.7\} & \{0.2,0.5,0.9\} \\ \{0.6,0.8\} & \{0.1,0.3\} & \{0.1,0.6\} \\ \{0.3,0.4\} & \{0.3,0.6\} & \{0.7,0.8\} \\ \{0.2,0.4,0.6\} & \{0.2,0.3\} & \{0.4,0.5\} \\ \{0.2,0.5\} & \{0.6,0.8\} & \{0.1,0.3\} \\ \{0.3,0.6\} & \{0.1,0.2,0.5\} & \{0.3,0.7\} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{DM}_3 = \begin{bmatrix} \{0.5,0.6\} & \{0.5,0.6\} & \{0.3,0.6\} \\ \{0.5,0.8\} & \{0.4,0.7\} & \{0.2,0.7\} \\ \{0.4,0.7\} & \{0.1,0.6,0.7\} & \{0.2,0.5\} \\ \{0.3,0.5\} & \{0.3,0.6\} & \{0.1,0.3\} \\ \{0.1,0.4,0.6\} & \{0.2,0.8\} & \{0.7,0.9\} \\ \{0.4,0.5\} & \{0.4,0.5,0.7\} & \{0.3,0.5,0.7\} \end{bmatrix}.$$

对6套房子进行排序择优.

step 1: 利用式(1)将决策矩阵DM$_k(k = 1,2,3)$转化为信息特征向量决策矩阵CVDM$_k(k = 1,2,3)$,有

$$\mathrm{CVDM}_1 = \begin{bmatrix} (0.5,0.52) & (0.2,0.18) & (0.5,0.77) \\ (0.47,0.68) & (0.4,0.52) & (0.6,0.66) \\ (0.55,0.82) & (0.25,0.26) & (0.75,0.26) \\ (0.3,0.4) & (0.35,0.5) & (0.3,0.38) \\ (0.55,0.5) & (0.6,0.66) & (0.7,0.43) \\ (0.53,0.52) & (0.3,0.52) & (0.4,0.68) \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{CVDM}_2=\begin{bmatrix}(0.6,0.68) & (0.5,0.52) & (0.53,0.50)\\(0.7,0.4) & (0.2,0.2) & (0.35,0.5)\\(0.35,0.5) & (0.45,0.58) & (0.75,0.26)\\(0.4,0.52) & (0.25,0.26) & (0.45,0.82)\\(0.35,0.58) & (0.7,0.4) & (0.2,0.2)\\(0.45,0.58) & (0.27,0.36) & (0.5,0.52)\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{CVDM}_3=\begin{bmatrix}(0.55,0.82) & (0.55,0.82) & (0.45,0.58)\\(0.65,0.58) & (0.55,0.58) & (0.45,0.5)\\(0.55,0.58) & (0.47,0.44) & (0.35,0.58)\\(0.4,0.68) & (0.45,0.58) & (0.2,0.2)\\(0.37,0.47) & (0.5,0.52) & (0.8,0.2)\\(0.45,0.82) & (0.53,0.68) & (0.5,0.61)\end{bmatrix}.$$

step 2: 确定$\mathrm{CVDM}_k(k=1,2,3)$对应的正理想方案$x^{(k)+}$和负理想方案$x^{(k)-}$,具体结果见表3.

step 3: 根据式(4)计算方案$x_m(m=1,2,\ldots,6)$与正理想方案$x^{(k)+}(k=1,2,3)$的加权相似度$S_{W^{(k)}}(x_m,x^{(k)+})$和与负理想方案$x^{(k)-}$的加权相似度$S_{W^{(k)}}(x_m,x^{(k)-})$,结果见表4.

step 4: 根据式(6)计算$\zeta^{(k)}(x_m)(k=1,2,3,\ m=1,2,\ldots,6)$,专家$e_k(k=1,2,3)$对于方案集$X$的排序结果见表5.

step 5: 根据式(5)和表4结果计算群一致性测度$\mathrm{GCD}(E,X)=0.42<0.5$,根据表2、表4数据及式(6)构建0-1规划模型,利用Lingo 11计算专家个体评价结果的排序妥协解为$S: x_5\to x_3\to x_1\to x_2\to x_6\to x_4$,即$x_5\succ x_3\succ x_1\succ x_2\succ x_6\succ x_4$.

表3 各决策矩阵对应的正负理想方案

	CVDM_1	CVDM_2	CVDM_3
$x^{(k)+}$	((0.55, 0.4), (0.6, 0.18), (0.75, 0.26))	((0.7, 0.4), (0.7, 0.2), (0.75, 0.2))	((0.65, 0.47), (0.55, 0.44), (0.8, 0.2))
$x^{(k)-}$	((0.3, 0.82), (0.2, 0.66), (0.3, 0.77))	((0.35, 0.68), (0.2, 0.58), (0.2, 0.82))	((0.37, 0.82), (0.45, 0.82), (0.2, 0.61))

表4 各方案与正负理想方案的加权相似度

	$x^{(1)+}$	$x^{(1)-}$	$x^{(2)+}$	$x^{(2)-}$	$x^{(3)+}$	$x^{(3)-}$
x_1	0.43	0.65	0.55	0.45	0.50	0.49
x_2	0.53	0.57	0.28	0.70	0.59	0.44
x_3	0.59	0.52	0.61	0.42	0.40	0.56
x_4	0.26	0.69	0.38	0.76	0.16	0.71
x_5	0.65	0.34	0.34	0.56	0.71	0.43
x_6	0.41	0.68	0.35	0.68	0.48	0.55

表5 专家$e_k(k=1,2,3)$对方案集X的排序结果

	e_1	e_2	e_3
ranking	$x_5\succ x_3\succ x_2\succ x_1\succ x_6\succ x_4$	$x_3\succ x_1\succ x_5\succ x_6\succ x_4\succ x_2$	$x_5\succ x_2\succ x_1\succ x_6\succ x_3\succ x_4$

决策结果分析: $\mathrm{GCD}(E,X)=0.42<0.5$说明专家对于方案集的排序结果分歧较大,排序结果不满足多数专家认可. 对于买房,由于个人需求不同,对不同房源的评价自然不同,很难达成共识,这是符合实际情况的结果. 如果决策者身份是开发商,则可以根据客户背景,有针对性地进行房产开发设计;如果决策者身份为购房者,则可以根据排序妥协解及自身情况,在x_5与x_3间选购,减小决策压力.

与文献[42]比较: 1) 文献[42]得到的排序结果为$x_5\succ x_6\succ x_1\succ x_2\succ x_3\succ x_4$,通过表5的结果不难发现,3位专家中均认为$x_1\succ x_6$,显然,本文方法的结果更有效; 2) 文献[42]未进行专家个体意见的共识性分析,而是在个体意见分歧较大的背景下,通过信息互补的信息处理方法得到群排序结果,显然结果不会满足多数一致性原则.

为了更全面地展示本文方法的有效性,下面对文献[43]中实例4.3利用本文方法进行决策分析:

$$W^{(1)}=(0.13,0.12,0.12,0.12,0.12,0.09,\\0.07,0.18,0.05)^{\mathrm{T}},$$
$$W^{(2)}=(0.16,0.14,0.11,0.09,0.05,0.09,\\0.09,0.18,0.09)^{\mathrm{T}},$$
$$W^{(3)}=(0.14,0.14,0.12,0.07,0.05,0.09,\\0.14,0.16,0.09)^{\mathrm{T}}.$$

根据评价信息和权重信息容易得到3位专家对于3个供应商的排序结果分别为$S_1: x_3\succ x_2\succ x_1$, $S_2: x_3\succ x_2\succ x_1$, $S_3: x_1\succ x_2\succ x_3$. 根据式(5)计算群一致性测度$\mathrm{GCD}(E,X)=0.64>0.5$. 满足多数一致性原则,构造群判断信息矩阵

$$\mathrm{DM}=\begin{bmatrix}\{0.3,0.6,0.7\} & \{0.5,0.7\} & \{0.4,0.6\}\\\{0.3,0.5\} & \{0.4\} & \{0.5,0.6,0.7\}\\\{0.4,0.5,0.6\} & \{0.4,0.6\} & \{0.5\}\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{array}{cccc} & \{0.5,0.6,0.7\} & \{0.5\} & \{0.6,0.7\} \\ \leftarrow & \{0.2,0.3,0.4\} & \{0.3,0.5\} & \{0.6\} & \rightarrow \\ & \{0.3,0.4,0.6\} & \{0.4\} & \{0.5,0.6,0.8\} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} & \{0.4,0.6,0.9\} & \{0.6,0.8\} & \{0.7,0.8,0.9\} \\ \leftarrow & \{0.6,0.8\} & \{0.7,0.9\} & \{0.6,0.7,0.8\} \\ & \{0.5,0.7,0.8\} & \{0.7\} & \{0.6,0.9\} \end{array}\right].$$

针对决策矩阵DM执行step 8 $\sim$ step 10得到供应商的排序为$S_1 : x_3 \succ x_2 \succ x_1$.

排序结果与文献[43]一致,从一定程度上反映本文所提出方法的有效性,显然,本文方法的计算过程较文献[43]更为简便.

7 结 论

通过分析文献针对犹豫模糊群决策中两个关键问题展开研究. 首先,以犹豫模糊熵函数和犹豫模糊信息特征向量为切入点,对犹豫模糊熵测度、距离测度和相似性测度进行了研究;然后,定义了群一致性测度并对其性质进行了研究;最后,提出了一种基于犹豫模糊相似性测度和群一致性测度的多因素群决策方法. 通过对算例结果的分析可以发现,本文提出的方法具有以下特点: 1) 通过犹豫模糊信息特征向量有效避免了在对犹豫模糊集测度研究等方面需要长度处理数据的问题; 2) 结合TOPSIS思想和相对熵思想中的相似性测度,能够提高方案间的分辨率; 3) 专家根据自身专长和经验自由选择评价因素并给出决策信息,可提高决策信息的可信度; 4) 本文基于划分思想提出了群一致性测度,各序数位置上方案的分布通过专家支持率确定,因此可根据少数服从多数原则,确定群共识性阈值为0.5; 5) 决策过程中,先通过专家提供的基数决策信息得到序数结果,再基于序数信息进行群一致性分析,本质上是一种同时考虑基数决策信息和位置序数信息的群共识性判定过程; 6) 当个体排序结果的群一致性测度小于阈值时,在不改变决策信息的情况下,以排序妥协解作为群决策结果,能够克服传统的信息互补的决策方法无法兼顾多数一致性的问题. 基于犹豫模糊信息特征向量对犹豫模糊集理论与应用的后续研究将是有意义的课题.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. The 18th IEEE International Conference on Fuzzy systems. Jeju Island: IEEE, 2009: 1378-1382.

[3] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[4] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Science, 2011, 181(11): 2128-2138.

[5] Li D Q, Zeng W Y, Li J H. New distance and similarity measures on hesitant fuzzy sets and their application in multiple criteria. decision making[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2015, 40: 11-16.

[6] Li D Q, Zeng W Y, Li J H. Note on distance measure of hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2015, 321: 103-115.

[7] Hesamian G, Shams M. Measuring similarity and ordering based on hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2015, 28(2): 983-990.

[8] Xu Z S, Xia M M. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2011, 26(5): 410-425.

[9] Tang Xiaoan, Peng Zhanglin, Ding Haining, et al. Novel distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2018, 34(6): 3903-3916.

[10] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2015, 52(3): 395-407.

[11] Meng F Y, Chen X H, Zhang Q. Induced generalized hesitant fuzzy Shapley hybrid operators and their application in multi-attribute decision making[J]. Applied Soft Computing, 2015, 28: 599-607.

[12] Torres R, Salas R, Astudillo H. Time-based hesitant fuzzy information aggregation approach for decision-making problems[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2014, 29(6): 579-595.

[13] Tan C Q, Yi W T, Chen X H. Hesitant fuzzy Hamacher aggregation operators for multicriteria decision making[J]. Applied Soft Computing, 2015, 26: 325-349.

[14] Wang H. Exended hesitant fuzzy linguistic term sets and their aggregation in group decision making[J]. International Journal of Computational Intelligent System, 2015, 8(1): 14-33.

[15] Yang X B, Song X N, Qi Y S. Constructive and axiomatic approaches to hesitant fuzzy rough set[J]. Soft Computing, 2014, 18(6): 1067-1077.

[16] Wang F Q, Li X H, Chen X H. Hesitant fuzzy soft set and its applications in multicriteria decision making[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 12(1): 1-10.

[17] Deqing Li, Wenyi Zeng, Junhong Li. New distance and similarity measures on hesitant fuzzy sets and their application in multiple criteria decision making[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2015, 40: 11-16.

[18] Li Xin, Xiaohong Zhang. New distance measures on dual hesitant fuzzy sets and their application in pattern

recognition[J]. Journal of Artificial Intelligence Practice, 2016, 1(1): 8-13.

[19] Herrera F, Martinez L, Torra V, et al. Hesitant fuzzy sets: A emerging tool in decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2014, 29(6): 493-494.

[20] Meimei Xia, Zeshui Xu. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 395-407.

[21] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37: 528-540.

[22] Yu D, Zhang W, Xu Y. Group decision making under hesitant fuzzy environment with application to personnel evaluation[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(6): 1-10.

[23] Ye J. Correlation coefficient of dual hesitant fuzzy sets and its application to multiple attribute decision making[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(2): 659-666.

[24] Zeshui Xu, Xiaolu Zhang. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(6): 53-64.

[25] Zhu B, Xu Z S, Xia M M. Dual hesitant fuzzy sets[J]. Journal of Applied Mathematics, 2012, 25(2): 1-13.

[26] Nian Zhang, Guiwu Wei. Extension of VIKOR method for decision making problem based on hesitant fuzzy set[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(7): 4938-4947.

[27] Liu H. A fuzzy envelope for hesitant fuzzy linguistic term set and its application to multicriteria decision making[J]. Information Sciences, 2014, 258(3): 220-238.

[28] Rodriguez R M, Martinez L, Herrera F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, 20(1): 109-119.

[29] Ding-hong Peng, Chang-yuan Gao, Zhi-fang Gao. Generalized hesitant fuzzy synergetic weighted distance measures and their application to multiple criteria decision-making[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(8): 5837-5850.

[30] Rosa M Rodrignez, Suis Martinez, Franciss Herrera. A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Information Sciences. 2014, 241(12): 28-42.

[31] Bin Zhu. Studies on consistency measure of hesitant fuzzy preference relations[J]. Procedia Computer Science, 2013, 17(17): 457-464.

[32] Zhu B, Xu Z S, Xu J P. Deriving a ranking from hesitant fuzzy preference relations under group decision making[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2014, 44(8): 1328-1337.

[33] Zhang Z M, Wu C. A decision support model for group decision making with hesitant multiplicative preference relations[J]. Information Science, 2014, 282: 136-166.

[34] Liao H C, Xu Z S, Xia M M. Multiplicative consistency of hesitant fuzzy preference relation and its application in group decision making[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making, 2014, 13(1): 47-76.

[35] Palomares I, Estrella F J, Mareinez L, et al. Consensus under a fuzzy context: Taxonomy, analysis framework AFRYCA and experimental case of study[J]. Information Fusion, 2014, 20(15): 252-271.

[36] Dong Y C, Zhang G Q, Hong W C, et al. Consensus models for AHP group decision making under row geometric mean prioritization method[J]. Decision Support System, 2010, 49(3): 281-289.

[37] Xia M M, Xu Z S, Chen J. Algorithms for improving consistency or consensus of reciprocal[0,1]-valued preference relation[J]. Fuzzy Set & Systems, 2013, 216(8): 108-133.

[38] Kacprzyk J, Zadrozny S. Soft computing and web intelligence for supporting consensus reaching[J]. Soft Computing, 2010, 14(8): 833-846.

[39] Dong Y C, Chen X, Herrera F. Minimizing adjusted simple terms in the consensus reaching process with hesitant linguistic assessments in group decision making[J]. Information Sciences, 2015, 297: 95-117.

[40] Farhadinia B. Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2013, 240: 129-144.

[41] Roy B, Slowinski R. Criterion of distance between technical programming and socio-economic priority[J]. Rairo Recherche Operationnelle, 1993, 27(1): 45-60.

[42] 周小强. 软集与犹豫模糊集理论及其在决策中的应用[D]. 长沙: 湖南大学数学与计量经济学院, 2014: 56-66.
(Zhou X Q. Soft set and hesitant fuzzy set with their application in decision making[D]. Changsha: College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, 2014: 56-66.)

[43] 张小路. 基于犹豫模糊信息的多属性决策方法研究[D]. 南京: 东南大学经济与管理学院, 2015: 40-45.
(Zhang X L. Research on multiple attribute decision making methods with hesitant fuzzy information[D]. Nanjing: School of Economics and Management, Southeast University, 2015: 40-45.)

作者简介

吕金辉 (1984–), 男, 博士生, 从事因素空间、模糊决策的研究, E-mail: 359656336@qq.com;

郭嗣琮 (1951–), 男, 教授, 博士生导师, 从事模糊分析学、模糊预测与决策等研究, E-mail: guosizong@163.com;

郭芳芳 (1986–), 女, 讲师, 从事区域经济学的研究, E-mail: 361835130@qq.com.

(责任编辑: 闫 妍)