控制与决策
Control and Decision

广义q-ROF TODIM方法及应用

刘熠，秦亚，刘好斌，许雷

引用本文:
刘熠, 秦亚, 刘好斌, 等. 广义q-ROF TODIM方法及应用[J]. 控制与决策, 2020, 35(8): 2021-2028.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1683

文章编号: 1001-0920(2020)08-2021-08 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1683

广义q-ROF TODIM方法及应用

刘 熠[1,2†], 秦 亚[2], 刘好斌[1,2], 许 雷[1,2]

(1. 内江师范学院 数据恢复四川省重点实验室，四川 内江 641000；
2. 内江师范学院 数学与信息科学学院，四川 内江 641000)

摘 要: 基于Pythagorean模糊迭代多准则决策(TODIM)方法和简化的TODIM方法, 首先给出简化的q-ROF TODIM方法, 并分析该方法产生的悖论; 其次, 结合广义TODIM方法的思想, 提出广义q-ROF TODIM方法; 再次, 通过一个实例来说明广义q-ROF TODIM方法的可行性和有效性; 最后, 结合该实例, 将所提出的方法与其他q-ROF决策方法进行比较分析, 同时分析参数的变化对决策结果的影响, 进一步阐明所提出方法的优越性.

关键词: 不确定性；多准则决策；q-ROF集；广义TODIM方法

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Generalized q-ROF TODIM method and its application

LIU Yi[1,2†], *QIN Ya*[2], *LIU Hao-bin*[1,2], *XU Lei*[1,2]

(1. Data Recovery Key Lab of Sichuan Province，Neijiang Normal University，Neijiang 641000，China；2. School of Mathematics and Information Science，Neijiang Normal University，Neijiang 641000，China)

Abstract: To begin with, the simplification of q-ROF TODIM method is established based on the the Pythagorean fuzzy TODIM method and classic TODIM method, a paradox of the q-ROF TODIM method is also analyzed. Then, the generalized Pythagorean fuzzy TODIM method is built based on the generalized TODIM method. Furthermore, the proposed generalized Pythagorean fuzzy TODIM method is applied to the numerical example to verify the effectiveness of the proposed method. Finally, some comparisons are made between the proposed method and some existed decision making methods, the sensibility analysis of the proposed method are also carried out when parameters changed, and the advantages of proposed method are also analyzed.

Keywords: uncertainty；multicriteria decision making；q-ROF set；generalized TODIM method

0 引 言

前景理论[1]是一种描述性的风险决策理论. 在前景理论的基础上, Gomes等[2]建立了一种多准则决策(MCDM)方法, 称为迭代多准则决策(TODIM), 该方法能够有效地解决考虑决策者心理行为的MCDM问题. 此外, 对于不确定的MCDM问题, 决策者很难提供关于备选项的精确评价. 为了解决这类问题, Zadeh[3]提出了模糊集理论(FS), 为复杂问题的描述提供了一种重要的方法. 作为模糊集的扩充, Atanassov[4]提出了一种高效的具有不确定性多准则决策理论的直觉模糊集(IFS). IFS应用隶属度和非隶属度从正反两方面同时评价一个对象, 且隶属度与非隶属度之和不超过1. Yager[5]指出, 在实际决策问题中存在这样一类问题, 尽管是用隶属度和非隶属度从正反两方面评价一个对象, 但隶属度与非隶属度之和可能大于1, 而其平方和小于等于1. 显然, 基于直觉模糊集的决策方法对这种决策问题是失效的. 为此, Yager[5]提出了一种处理多准则决策问题中的不确定性信息的新工具, 即Pythagorean模糊集(PFS). 显然, 在处理不确定性信息上, PFS比IFS具有更强的能力. 随着社会的不断复杂化和理论的发展, Yager[6]提出了q-Rung orthopair模糊集(q-ROF)的概念, 这里$q \geqslant 1$. 在q-ROF模糊集中, 隶属度的q次方与非隶属度的q次方之和不超过1. 因此, 与IFS和PFS相比, q-ROF更具一般性, 具有更加广泛且更强的表达模糊信息的能力.

由于MCDM问题的复杂性, 不确定性与风险是在MCDM中应考虑的两种典型因素. 在MCDM问题

收稿日期: 2018-12-09；**修回日期:** 2019-04-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61673320)；四川省青年科技创新研究团队项目(2019JDTD0015)；四川省科技厅科技计划重点项目(2017JY0199)；四川省教育厅科研创新团队项目(15TD0027)；四川省教育厅重点项目(18ZA0273)；四川省教育厅面上项目(17ZB0220)；内江师范学院科研创新团队项目(18TD008).

†通讯作者. E-mail: liuyiyl@126.com.

中考虑决策者的风险态度是非常重要的,而考虑决策者在风险行为下的心理行为,TODIM是一种非常有价值的方法.为了同时描述MCDM问题中的不确定和风险,相关的模糊TODIM方法[7-14]、直觉TODIM方法[15-18]、语言TODIM方法[19-20]、Pythagorean模糊TODIM方法[21]等均已得到深入研究.基于经典的TODIM方法,Liamazares[22]分析了经典TODIM方法的两个悖论,并建立了广义的TODIM方法[22].尽管考虑决策者行为的TODIM方法已经取得了丰富的研究成果,但现有的TODIM方法仍有一些不足之处: 1) Yager[6]指出,在实际问题中,若所给出的是具有q-ROF决策信息,则现有的TODIM方法不能再处理这种情况; 2) Felsenthal[23]指出,当多准则方法产生不可期望的结果时,就会产生一个悖论,而这个结果可能被认为是与直觉相悖的.尽管Pythagorean模糊TODIM方法可以解决具有Pythagorean信息的MCDM问题,但是在某些特殊情况下,Pythagorean TODIM方法容易受到关于准则权重的悖论的影响(见3.2节的分析).

鉴于以上的研究动机,本文基于Pythagorean模糊TODIM方法和简化的TODIM方法,给出简化的q-ROF TODIM方法,并分析该方法的不足,进而提出广义q-ROF TODIM方法.通过实例将该方法与其他q-ROF决策方法进行比较,分析一些参数的变化对决策结果的影响以及该方法的优点.

1 q-ROF集与简化的TODIM方法

1.1 q-ROF集

本节回顾q-ROF的相关概念,这是本文的基础. q-ROF由Yager提出,其定义如下.

定义1[6] 设X是任一非空集合,X上q-次orthopair模糊集(q-ROF)P定义如下:

$$P = \{\langle x, (u_p(x), v_p(x))\rangle | x \in X\}. \tag{1}$$

其中: $u_p(x), v_p(x): x \to [0,1]$,对于任意的$x \in X$,使得$u_p^q(x) + v_p^q(x) \leqslant 1 (q \geqslant 1)$; $u_p(x)$、$v_p(x)$分别是x隶属于X和非隶属于X的程度.

为了方便起见,Liu等[24]称$\beta = (u_\beta, v_\beta)$为$q$-ROFN.为了比较两$q$-ROFNs,Liu等[24]给出了记分函数,其定义如下.

定义2[24] 设$\beta = (u_\beta, v_\beta)$是$q$-ROFN,则$\beta$的记分函数定义为$S(\beta) = u_\beta^q - v_\beta^q$.

定义3[24] 设$\beta = (u_\beta, v_\beta)$是$q$-ROFN,则$\beta$的准确函数定义为$H(\beta) = u_\beta^q + v_\beta^q$.

基于定义2和定义3,对于任意的两q-ROFNs的比较可由如下方式得到.

定义4[24] 设β_1、β_2是两q-ROFNs,则:

1) 如果$S(\beta_1) < S(\beta_2)$,则$\beta_1 < \beta_2$.

2) 如果$S(\beta_1) = S(\beta_2)$,则:

① 当$H(\beta_1) \leqslant H(\beta_2)$时,$\beta_1 \leqslant \beta_2$;

② 当$H(\beta_1) > H(\beta_2)$时,$\beta_1 > \beta_2$.

两q-ROFNs间的Minkowski距离定义如下.

定义5[25] 设$\beta_1 = (u_{\beta_1}, v_{\beta_1}), \beta_2 = (u_{\beta_2}, v_{\beta_2})$是两$q$-ROFNs,则$\beta_1$、$\beta_2$间的Minkowski距离可定义为

$$d(\beta_1, \beta_2) = \left[\frac{1}{2}|u_{\beta_1} - u_{\beta_2}|^q + \frac{1}{2}|v_{\beta_1} - v_{\beta_2}|^q\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

其中$q \geqslant 1$.

1.2 TODIM方法

TODIM方法[1]能够有效处理MCDM问题,MCDM问题可以描述如下:

设$A = \{A_i | i = 1,2,\ldots,m\}$是备选方案的集合,$C = \{C_j | j = 1,2,\ldots,n\}$是一个准则集,$w = (w_1, w_2,\ldots,w_n)^{\mathrm{T}}$是准则的权重向量,其中$w_j \in [0,1]$ $(j = 1,2,\ldots,n)$且$\sum\limits_{i=j}^{n} w_j = 1$.对备选方案$A_i$关于准则$C_j$的评价值可表示为$R = (r_{ij})_{m\times n}$,其中$r_{ij}$表示备选方案$A_i$关于准则$C_j$的评价值.

基于以上问题的描述,TODIM方法描述如下.

step 1: 将R规范化得到矩阵$\tilde{R} = (l_{ij})_{m\times n}$.

step 2: 计算每一准则C_j的相对权重w_{jr},即

$$w_{jr} = \frac{w_j}{w_r},\ j = 1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

其中w_j是准则C_j的权重且

$$w_r = \max\{w_j | j = 1,2,\ldots,n\}.$$

step 3: 计算方案A_i相对于方案A_t在准则C_j下的优势度$\phi_j(A_i, A_t)$,有

$$\phi_j(A_i, A_t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{w_{jr}(l_{ij} - l_{tj})}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_{j_r}}},\ l_{ij} > l_{tj}; \\ 0,\ l_{ij} = l_{tj}; \\ -\dfrac{1}{\theta}\sqrt{\dfrac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} w_{j_r}\Big)(l_{tj} - l_{ij})}{w_{j_r}}},\ l_{ij} < l_{tj}. \end{cases} \tag{4}$$

其中θ表示损失“衰减系数”,可以根据决策者的偏好进行调整.当$\theta > 1$时,表示决策者面对风险的损失被缩小,即决策者是风险规避的,θ越大,损失规避程度越高;当$\theta < 1$时,表示决策者面对风险的损失被扩大,即决策者是风险偏爱的.显然,不同的θ值会得到

不同的前景价值.

step 4: 通过如下方式计算方案A_i相对于方案A_t在准则C_j下的优势度($i, t = 1, 2, \ldots, m$):

$$\delta(A_i, A_t) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(A_i, A_t). \tag{5}$$

从而,全部优势度矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta(A_1, A_2) & \ldots & \delta(A_1, A_m) \\ \delta(A_2, A_1) & 0 & \ldots & \delta(A_2, A_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta(A_m, A_1) & \delta(A_m, A_2) & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

step 5: 通过式(6)得到每个方案A_i的值,即

$$\xi_i = \frac{\sum_{t=1}^{m} \delta(A_i, A_t) - \min_i \left\{ \sum_{t=1}^{m} \delta(A_i, A_t) \right\}}{\max_i \left\{ \sum_{t=1}^{m} \delta(A_i, A_t) \right\} - \min_i \left\{ \sum_{t=1}^{m} \delta(A_i, A_t) \right\}}. \tag{7}$$

step 6: 根据ξ_i 的大小获得备选方案$A_i (i = 1, 2, \ldots, m)$的序,$\xi_i$越大,$A_i$越好.

1.3 简化的TODIM方法

在1.2节中的TODIM模型主要依赖于$\phi_j(A_i, A_t)$,但该模型可通过以下方式进行简化[22]:

$$\frac{w_{jr}}{\sum_{t=1}^{m} w_{tr}} = \frac{w_j / w_r}{\sum_{t=1}^{m} w_t \big/ w_r} = \frac{w_j}{\sum_{t=1}^{m} w_t} = w_j, \tag{8}$$

$$j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

类似地

$$\frac{\sum_{t=1}^{m} w_{tr}}{w_{jr}} = \frac{1}{w_j}. \tag{9}$$

因此,当i、$t \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$时,$\phi_j(A_i, A_t)$可表示为

$$\phi_j(A_i, A_t) = \begin{cases} \sqrt{w_j (l_{ij} - l_{tj})}, \ l_{ij} > l_{tj}; \\ 0, \ l_{ij} = l_{tj}; \\ -\dfrac{1}{\theta} \sqrt{\dfrac{(l_{tj} - l_{ij})}{w_j}}, \ l_{ij} < l_{tj}. \end{cases} \tag{10}$$

注意到,由$\phi_j(A_i, A_t)$可得到A_i的优势度矩阵为

$$\phi(A_i) = (\phi_j(A_i, A_t))_{n \times m}, \tag{11}$$

其中: $j = 1, 2, \ldots, n; t = 1, 2, \ldots, m.$

备选方案的顺序可以不必计算ξ而直接通过计算$\phi(A_i)$得到,从而简化的TODIM方法可表述如下.

step 1: 将R规范化得到矩阵$\tilde{R} = (l_{ij})_{m \times n}$;

step 2: 通过式(10)计算方案A_i相对于方案A_t在准则C_j下的优势度$\phi_j(A_i, A_t)$;

step 3: 基于step 2所给出的$\phi_j(A_i, A_t)$计算式(11);

step 4: 对于$i = 1, 2, \ldots, m$,计算A_i总的优势度为

$$\Phi(A_i) = \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \phi_j(A_i, A_t); \tag{12}$$

step 5: 根据$\Phi(A_i)$的值确定A_i的顺序.

从简化的TODIM方法的实现过程可以看出,简化的TODIM方法与原始的TODIM方法在本质上是一样的,只是处理过程中简化了相关计算, 更容易实现.

2 广义q-ROF TODIM方法

由1.2节中的TODIM方法以及1.3节中的简化TODIM方法可以看出,A_i相对于方案A_t关于指标C_j的优势度$\phi_j(A_i, A_t)$在TODIM方法中起着关键作用. 在本节中,首先给出q-ROF TODIM方法,并分析该方法的不足,进而提出广义的q-ROF TODIM方法.

2.1 q-ROF TODIM方法

Ren等[21] 建立了基于Pythagorean模糊信息的TODIM方法,本文结合简化的TODIM方法[22] 的思想,给出一种q-ROF TODIM方法,具体如下.

step 1: 将R规范化得到矩阵$\tilde{R} = (l_{ij})_{m \times n}$.

step 2: 计算方案A_i相对于方案A_t在准则C_j下的优势度

$$\phi_j(A_i, A_t) = \begin{cases} \sqrt{w_j d(l_{ij}, l_{tj})}, \ l_{ij} > l_{tj}; \\ 0, \ l_{ij} = l_{tj}; \\ -\dfrac{1}{\theta} \sqrt{\dfrac{d(l_{tj}, l_{ij})}{w_j}}, \ l_{ij} < l_{tj}. \end{cases} \tag{13}$$

其中$d(l_{ij}, l_{tj})$为l_{ij}与l_{tj}间的Minkowski距离.

step 3: 基于式(13), 计算A_i的优势度矩阵式(11).

step 4: 根据式(12),计算A_i总的优势度$\Phi(A_i)$.

step 5: 根据$\Phi(A_i)$的值确定A_i的顺序.

注1 在q-ROF TODIM方法中,如果$q = 2$,则得到简化的Pythagorean TODIM方法[21];如果$q = 1$,则得到简化的直觉TODIM方法[12]. 而且可以证明,简化TODIM方法与原方法是等价的.

2.2 q-ROF TODIM方法分析

首先分析q-ROF(或Pythagorean)TODIM方法可能产生的一个悖论. 针对q-ROF TODIM方法,本文将通过具体例子表明该TODIM方法更容易受到关于属性权重的悖论的影响. 例如,考虑如表1所示的决策矩阵.

表1 规范化的 q-ROF 决策矩阵

	C_1	C_2
A_1	$(0,1)$	$(1,0)$
A_2	$(1,0)$	$(0,1)$

假设权重向量 $w=(w_1,w_2)$,直觉认为:若 $w_1>w_2$,则 $A_2>A_1$;若 $w_2>w_1$,则 $A_1>A_2$. 但运用上述 q-ROF TODIM 方法时,可得

$$\phi(A_1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\dfrac{1}{\theta\sqrt{w_1}} & \sqrt{w_2}\end{bmatrix},$$

$$\phi(A_2)=\begin{bmatrix}\sqrt{w_1} & -\dfrac{1}{\theta\sqrt{w_2}}\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

从而

$$\varPhi(A_1)=\sqrt{w_2}-\frac{1}{\theta\sqrt{w_1}},\ \varPhi(A_2)=\sqrt{w_1}-\frac{1}{\theta\sqrt{w_2}}.$$

例如:当 $\theta=1, w=(0.8,0.2)$ 时,$\varPhi(A_1)=-0.670$,$\varPhi(A_2)=1.342$. 因此 $\varPhi(A_1)<\varPhi(A_2)$,即 $A_1<A_2$,这是一个悖论.

2.3 广义 q-ROF TODIM 方法

在2.2节中,举例说明了一个关于准则权重的悖论,因此,有必要引入一些新的性质来阻止这类悖论的发生. Liamazares[22] 引入了权重一致性与权重单调的定义. 借鉴广义的TODIM方法的学术思想,为了阻止 q-ROF TODIM 方法中悖论的产生,本节将提出广义的 q-ROF TODIM 方法. 为此,引入更广义的 $\phi_j(A_i,A_t)$,即

$$\phi_j(A_i,A_t)=\begin{cases}g_1(w_j)f_1(d(l_{ij},l_{tj})),\ l_{ij}>l_{tj};\\ 0,\ l_{ij}=l_{tj};\\ -g_2(w_j)f_2(d(l_{ij},l_{tj})),\ l_{ij}<l_{tj}.\end{cases}\tag{14}$$

其中: $g_1,g_2:(0,1)\to(0,+\infty)$; $f_1,f_2:[0,1]\to[0,+\infty)$; $d(l_{ij},l_{tj})$ 表示两 q-ROFNs 的 Minkowski 距离.

显然,式(14)是原式(13)的更一般的表达式,如果 $g_1(x)=f_1(x)=f_2(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $g_2(x)=\dfrac{1}{\theta\sqrt{x}}$,则式(14)便退化到式(13). 因此,广义的 q-ROF TODIM 方法可以通过如下步骤实现.

step 1: 给出 MCDM 的 q-ROF 决策矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times n}$,其中 r_{ij} 是 q-ROFN.

step 2: 将 $R=(r_{ij})_{m\times n}$ 通过如下方式规范化得到规范的 q-ROF 决策矩阵 $\tilde{R}=(l_{ij})_{m\times n}$:

$$l_{ij}=\begin{cases}r_{ij},\ C_j\text{是效益型准则};\\ r_{ij}^c,\ C_j\text{是成本型准则}.\end{cases}\tag{15}$$

其中 $r_{ij}^c=(v_{ij},\mu_{ij})$.

step 3: 通过式(14)计算方案 A_i 相对于方案 A_t 在准则 C_j 下的优势度 $\phi_j(A_i,A_t)$.

step 4: 根据式(14)和(11)计算 A_i 的优势度矩阵 $\phi(A_i)$.

step 5: 对于 $i=1,2,\ldots,m$,计算 A_i 总的优势度

$$\varPhi(A_i)=\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\phi_j(A_i,A_t).\tag{16}$$

step 6: 根据 $\varPhi(A_i)$ 的值确定 A_i 的顺序.

类似于文献[22], 可得到如下定理.

定理1 在广义 q-ROF TODIM 方法中,如果优势度函数(式(18))中的 g_1、g_2、f_1、f_2 均是不减的,则广义 q-ROF TODIM 方法是权重一致性的.

定理1从理论上保证了2.2节中的悖论将不会产生. 在 q-ROF TODIM 方法中,当 g_1、g_2、f_1、f_2 取不同的函数时,即可得到一些特殊的广义 q-ROF TODIM 方法. 例如,当 $g_1(x)=g_2(x)=x$ 时,有

$$\phi_j(A_i,A_t)=\begin{cases}w_jf_1(d(l_{ij},l_{tj})),\ l_{ij}>l_{tj};\\ 0,\ l_{ij}=l_{tj};\\ -w_jf_2(d(l_{ij},l_{tj})),\ l_{ij}<l_{tj}.\end{cases}\tag{17}$$

1) 如果 $f_1(x)=x^\alpha$, $f_2(x)=0$,则

$$\phi_j(A_i,A_t)=\begin{cases}w_j(d(l_{ij},l_{tj}))^\alpha,\ l_{ij}>l_{tj};\\ 0,\ l_{ij}\leqslant l_{tj}.\end{cases}\tag{18}$$

2) 如果 $f_1(x)=0$, $f_2(x)=\lambda x^\beta$,则

$$\phi_j(A_i,A_t)=\begin{cases}0,\ l_{ij}\geqslant l_{tj};\\ -\lambda w_j(d(l_{ij},l_{tj}))^\beta,\ l_{ij}<l_{tj}.\end{cases}\tag{19}$$

3) 如果 $f_1(x)=x^\alpha$, $f_2(x)=\lambda x^\beta$,则

$$\phi_j(A_i,A_t)=\begin{cases}w_j(d(l_{ij},l_{tj}))^\alpha,\ l_{ij}>l_{tj};\\ 0,\ l_{ij}=l_{tj};\\ -\lambda w_j(d(l_{ij},l_{tj}))^\beta,\ l_{ij}<l_{tj}.\end{cases}\tag{20}$$

在式(17) ∼ (20)中,α、$\beta\in(0,1)$, $\lambda>0$.

3 案例分析

为说明广义 q-ROF TODIM 方法的应用,以及相关的比较分析,本节应用所提出的广义TODIM方法求解2.2节中的悖论,并求解文献[24]的多属性决策的例子,同时展开相关分析.

3.1 广义 q-ROF TODIM 方法的应用

例1 考虑表1中的决策信息. 在广义 q-ROF TODIM 方法中,选择式(20)对 $\phi_j(A_i,A_t)$ 进行计算,其中 $\alpha=\beta=0.5$, $\lambda=1$. 运用上述广义 q-ROF TODIM 方法,可得

$$\phi(A_1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -w_1 & w_2\end{bmatrix},\ \phi(A_2)=\begin{bmatrix}w_1 & -w_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

从而$\varPhi(A_1)=w_2-w_1,\varPhi(A_2)=w_1-w_2$. 因此:

若$w_1>w_2$,则$\varPhi(A_2)>\varPhi(A_1)$,即$A_2>A_1$;

若$w_2>w_1$,则$\varPhi(A_1)>\varPhi(A_2)$,即$A_1>A_2$.

相关文献中已经提出了在q-ROF环境下的MCDM方法,如IFWA算子[26]、PFWG算子[27]、PFEWG算子[27]、q-ROFWA算子[24]以及q-ROFWG算子[24]. 然而这些方法对于例1这种情况均是失效的,不论准则的权重如何,都将得到同样的序关系,即$A_1=A_2$,这显然是不合理的,而本文所提出的方法能有效处理这种情况.

例2 一投资公司为了增加盈利准备投资一家公司,现有3个公司作为备选,分别为A_1、A_2、A_3. 为了评估这3个公司,考虑以下5个属性:风险分析(C_1)、成长条件(C_2)、社会政治影响(C_3)、环境影响(C_4)、社会发展(C_5). 这些属性的权重向量为$w=(0.25,0.20,0.15,0.18,0.22)^{\mathrm{T}}$. q-ROF决策矩阵如表2所示.

表2 q-ROF决策矩阵

	A_1	A_2	A_3
C_1	$(0.5,0.2)$	$(0.7,0.2)$	$(0.7,0.2)$
C_2	$(0.4,0.2)$	$(0.6,0.3)$	$(0.5,0.3)$
C_3	$(0.5,0.4)$	$(0.4,0.3)$	$(0.4,0.5)$
C_4	$(0.3,0.3)$	$(0.4,0.4)$	$(0.3,0.4)$
C_5	$(0.7,0.1)$	$(0.6,0.1)$	$(0.6,0.2)$

现应用广义q-ROF TODIM方法对备选方案进行排序. 在广义q-ROF TODIM中,选择式(20)对$\phi_j(A_i,A_t)$进行计算,其中$\alpha=\beta=0.5,\lambda=1$.

step 1: 因为风险分析C_1是成本型的,应用式(19)得到规范化的决策矩阵,见表3.

表3 规范的q-ROF决策矩阵

	A_1	A_2	A_3
C_1	$(0.2,0.5)$	$(0.2,0.7)$	$(0.2,0.7)$
C_2	$(0.4,0.2)$	$(0.6,0.3)$	$(0.5,0.3)$
C_3	$(0.5,0.4)$	$(0.4,0.3)$	$(0.4,0.5)$
C_4	$(0.3,0.3)$	$(0.4,0.4)$	$(0.3,0.4)$
C_5	$(0.7,0.1)$	$(0.6,0.1)$	$(0.6,0.2)$

step 2～step 4: 根据式(11),计算A_i的优势度矩阵分别为

$$\phi(A_1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.0996 & -0.0811 & 0.0474 & -0.0789 & 0.0620\\ 0.0996 & -0.0631 & 0.0474 & 0.0704 & 0.0696\end{bmatrix},$$

$$\phi(A_2)=\begin{bmatrix}-0.0996 & 0.0813 & -0.0474 & 0.0569 & -0.0618\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.0563 & 0.0598 & 0.0704 & 0.0620\end{bmatrix},$$

$$\phi(A_3)=\begin{bmatrix}-0.0996 & 0.0632 & -0.0474 & -0.0507 & -0.0694\\ 0 & 0.0563 & -0.0596 & -0.0704 & -0.0618\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

step 5: 计算A_i总的优势度

$$\varPhi(A_1)=0.2749,\ \varPhi(A_2)=0.1580,\ \varPhi(A_3)=-0.3201.$$

step 6: 对所有的备选公司进行排序. 根据式(16)可得其顺序为$A_1>A_2>A_3$.

3.2 比较分析

为了表明本文所提出广义q-ROF TODIM方法的有效性以及凸显的优势,将其他在q-ROF环境下的MCDM方法用来求解上述案例,这些方法包括IFWA算子、PFWG算子、PFEWG算子q-ROFWA以及q-ROFWG($q=3$)算子,其计算结果见表4.

表4 不同方案的值及排序

方法	得分	排序
IFWA[26]	$S(A_1)=0.1885$, $S(A_2)=0.1496$, $S(A_3)=0.0298$	$A_1>A_2>A_3$
PFWG[26]	$S(A_1)=0.0216$, $S(A_2)=-0.0503$, $S(A_3)=-0.1039$	$A_1>A_2>A_3$
PFEWG[27]	$S(A_1)=0.0756$, $S(A_2)=0.0222$, $S(A_3)=-0.0519$	$A_1>A_2>A_3$
q-ROFWA[24]	$S(A_1)=0.1071$, $S(A_2)=0.0896$, $S(A_3)=0.0352$	$A_1>A_2>A_3$
q-ROFWG[24]	$S(A_1)=0.0033$, $S(A_2)=-0.0556$, $S(A_3)=-0.0856$	$A_1>A_2>A_3$
本文方法		$A_1>A_2>A_3$

3.3 灵敏度分析

在TODIM方法中,方案A_i相对于方案A_t在准则C_j的优势度$\phi_j(A_i,A_t)$的计算是至关重要的. 在广义的q-ROF TODIM方法中,$\phi_j(A_i,A_t)$有很多选择,在3.1节中,讨论了式(20)中的参数$q=3,\alpha=\beta=0.5,\lambda=1$时的决策结果. 在本节中,讨论当参数发生

改变时,应用广义的q-ROF TODIM方法对决策结果的影响.

1) 当$\alpha=\beta=0.5$时,λ的改变对结果的影响.

应用上述广义q-ROF TODIM方法,在λ不同的取值情况下,所获得的结果见表5.

表5 $\alpha=\beta=0.5$时,λ的改变对结果的影响

λ	备选项的总的优势度	排序
1	$\Phi(A_1)=0.275$, $\Phi(A_2)=0.158$, $\Phi(A_3)=-0.320$	$A_1>A_2>A_3$
2	$\Phi(A_1)=0.074$, $\Phi(A_2)=-0.051$, $\Phi(A_3)=-0.758$	$A_1>A_2>A_3$
4	$\Phi(A_1)=-0.329$ $\Phi(A_2)=-0.469$, $\Phi(A_3)=-1.638$	$A_1>A_2>A_3$
5	$\Phi(A_1)=-0.531$, $\Phi(A_2)=-0.678$, $\Phi(A_3)=-2.079$	$A_1>A_2>A_3$
10	$\Phi(A_1)=-1.537$, $\Phi(A_2)=-1.723$, $\Phi(A_3)=-4.278$	$A_1>A_2>A_3$

2) 当$\lambda=1,\beta=0.5$时,α的改变对结果的影响.

应用上述广义q-ROF TODIM方法, 在α不同的取值情况下,所获得的结果见表6.

表6 $\lambda=1,\beta=0.5$时,α的改变对结果的影响

α	备选项的总的优势度	排序
0.1	$\Phi(A_1)=0.938$, $\Phi(A_2)=0.772$, $\Phi(A_3)=-0.039$	$A_1>A_2>A_3$
0.3	$\Phi(A_1)=0.534$, $\Phi(A_2)=0.365$, $\Phi(A_3)=-0.246$	$A_1>A_2>A_3$
0.5	$\Phi(A_1)=0.275$, $\Phi(A_2)=0.158$, $\Phi(A_3)=-0.320$	$A_1>A_2>A_3$
0.7	$\Phi(A_1)=-0.108$, $\Phi(A_2)=-0.049$, $\Phi(A_3)=-0.347$	$A_1>A_2>A_3$
0.9	$\Phi(A_1)=-0.000\,3$, $\Phi(A_2)=-0.056$, $\Phi(A_3)=-0.394$	$A_1>A_2>A_3$

3) 当$\lambda=1,\alpha=0.5$时,β的改变对结果的影响.

应用上述广义q-ROF TODIM方法,在β不同的取值情况下,所获得的结果见表7.

表7 $\lambda=1,\alpha=0.5$时,β的改变对结果的影响

β	备选项的总的优势度	排序
0.1	$\Phi(A_1)=0.008$, $\Phi(A_2)=-0.115$, $\Phi(A_3)=-0.957$	$A_1>A_2>A_3$
0.3	$\Phi(A_1)=0.169$, $\Phi(A_2)=0.045$, $\Phi(A_3)=-0.567$	$A_1>A_2>A_3$
0.5	$\Phi(A_1)=0.275$, $\Phi(A_2)=0.158$, $\Phi(A_3)=-0.320$	$A_1>A_2>A_3$
0.7	$\Phi(A_1)=0.344$, $\Phi(A_2)=0.200$, $\Phi(A_3)=-0.194$	$A_1>A_2>A_3$
0.9	$\Phi(A_1)=0.389$, $\Phi(A_2)=0.228$, $\Phi(A_3)=-0.063$	$A_1>A_2>A_3$

从表5可以看出,随着λ的增加,备选项的总的优势度在减小. 这表明,当$\lambda>0$时,随着λ的增加,表示决策者面对风险的损失被扩大,即决策者是风险偏爱的. 由表6可知,随着α的增加,备选项的总的优势度在减小. 从表7可以看出,随着β的增加,备选项的总的优势度是逐渐增大的.

在3.1节中,求解了$q=3,\lambda=1,\alpha=\beta=0.5$时的情况,下面给出当$\lambda=1,\alpha=\beta=0.5$时,$q$取不同的值时,最优备选方案的变化情况,其结果见表8.

从以上的分析可以看到,A_1均是最好的选择. 现将广义q-ROF TODIM的优越性概括如下.

1) 模糊TODIM方法是解决MCDM问题的有效方法,它也可以描述决策者的心理行为. 但是值得一提的是,模糊TODIM方法只能根据隶属度来描述事物,而直觉模糊TODIM方法是解决隶属度与非隶属度之和不超过1的MCDM决策问题. 但在实际决策问题中,有可能存在更为复杂的问题,即隶属度的q次方与非隶属度的q次方之和不超过1. 这是直觉模糊TODIM方法所不能处理的问题. 因此,相对于直觉模糊集而言,q-ROF TODIM方法有着更加广泛的适用范围.

表8 $\lambda=1,\alpha=\beta=0.5$时,$q$的改变对结果的影响

q	备选项的总的优势度	排序
1	$\varPhi(A_1)=0.214$, $\varPhi(A_2)=0.140$, $\varPhi(A_3)=-0.265$	$A_1>A_2>A_3$
2	$\varPhi(A_1)=0.259$, $\varPhi(A_2)=0.153$, $\varPhi(A_3)=-0.305$	$A_1>A_2>A_3$
5	$\varPhi(A_1)=0.287$, $\varPhi(A_2)=0.164$, $\varPhi(A_3)=-0.332$	$A_1>A_2>A_3$
10	$\varPhi(A_1)=0.296$, $\varPhi(A_2)=0.169$, $\varPhi(A_3)=-0.342$	$A_1>A_2>A_3$
15	$\varPhi(A_1)=0.299$, $\varPhi(A_2)=0.171$, $\varPhi(A_3)=-0.345$	$A_1>A_2>A_3$
20	$\varPhi(A_1)=0.300$, $\varPhi(A_2)=-0.171$, $\varPhi(A_3)=-0.347$	$A_1>A_2>A_3$
50	$\varPhi(A_1)=0.303$, $\varPhi(A_2)=0.173$, $\varPhi(A_3)=-0.350$	$A_1>A_2>A_3$

2) 广义q-ROF TODIM方法更具一般性. 因为直觉模糊集与Pythagorean模糊集均是q-ROF的特殊形式. 当$q=1$时,广义q-ROF TODIM方法将退化为广义直觉模糊TODIM方法; 当$q=2$时,广义q-ROF TODIM方法将退化为广义Pythagorean TODIM方法. 此外,广义q-ROF TODIM方法更加灵活,决策者能根据不同的风险态度选择不同的参数q.

3) 相比于Pythagorean TODIM方法,广义q-ROF TODIM方法除了上述的优势外,还能有效克服2.2节中分析的权重不一致性的产生.

4) 从例1可以看出,广义q-ROF TODIM方法能够解决基于IFWA算子[26]、PFWG算子[27]、PFEWG算子[27]、q-ROFWA算子[24]以及q-ROFWG算子[24]的决策方法所不能求解的问题,因此,本文所提出的方法更加有效且合理.

4 结 论

q-ROF是直觉模糊集以及Pythagorean模糊集的更一般的形式,是描述一种不确定性的有效数学方法. 本文提出了广义q-ROF TODIM方法,该方法可解决在不确定环境下考虑决策者心理行为的MCDM问题. 将该方法用于投资公司选择的案例,所得结果表明了该方法的适用性和实现方法,同时还比较了该方法与已有的其他方法的异同. 为此,本文提出了一个有效的方法来处理更为复杂的MCDM问题,它不仅可以代表不确定性,而且可以描绘处于风险下的决策者的心理行为. 在未来进一步的研究中,将讨论定性和定量信息的方法以描述不确定性和风险.

参考文献(References)

[1] Tversky K A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-292.

[2] Gomes L, Lima M. TODIM: Basics and application to multicriteria ranking of projects with environmental impacts[J]. Foundations of Computing and Decision Sciences, 1992, 16: 113-127.

[3] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[4] Atanassov K T. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33(1): 37-45.

[5] Yager R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.

[6] Yager R. Generalized orthopair fuzzy sets[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 25(5): 1222-1230.

[7] Mishra A R, Rani P. Biparametric information measures-based TODIM technique for interval-valued intuitionistic fuzzy environment[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2018, 43(6): 3291-3309.

[8] Jiang Y, Liang X, Liang H. An I-TODIM method for multi-attribute decision making with interval numbers[J]. Soft Computing, 2016, 21(18): 5489-5506.

[9] Qin J, Liu X, Pedrycz W. An extended TODIM multi-criteria group decision making method for green supplier selection in interval type-2 fuzzy environment[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 258(2): 626-638.

[10] Zhang X. A closeness index-based TODIM method for hesitant qualitative group decision making[J]. Informatica-Lithuan, 2017, 28(3): 565-581.

[11] Yu W, Zhang Z, Zhong Q, et al. Extended TODIM for multi-criteria group decision making based on unbalanced hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Computers and Industrial Engineering, 2017, 114(12): 316-328.

[12] Yu S, Wang J. An extended TODIM approach with intuitionistic linguistic numbers[J]. International

Transactions in Operational Research, 2018, 25(3): 781-805.

[13] Wang F, Li H. Novel method for hybrid multiple attribute decision making based on TODIM method[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2015, 26(5): 1023-1031.

[14] Wei G. TODIM method for picture fuzzy multiple attribute decision making[J]. Informatica-Lithuan, 2018, 29(3): 555-566.

[15] Geng Y, Liu P, Teng F, et al. Pythagorean fuzzy uncertain linguistic TODIM method and their application to multiple criteria group decision making[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 33(6): 3383-3395.

[16] Huang Y, Wei G. TODIM method for Pythagorean 2-tuple linguistic multiple attribute decision making[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2018, 35(1): 901-915.

[17] Li Y, Shan Y, Liu P. An extended TODIM method for group decision making with the interval intuitionistic fuzzy sets[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 672140: 1-9.

[18] Qin Q, Liang F, Li L, et al. A TODIM-based multi-criteria group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers[J]. Applied Soft Computing, 2017, 55(6): 93-107.

[19] 孔令艳, 谭倩云. 犹豫模糊语言TODIM法及其应用[J]. 统计与决策, 2017(5): 98-100.
(Kong L Y, Tan Q Y. Hesitant fuzzy linguistic TODIM method and its applications[J]. Statistics and Decision, 2017(5): 98-100.)

[20] 梁霞, 刘政敏, 刘培德. 基于广义Choquet积分的Pythagorean不确定语言TODIM方法及其应用[J]. 控制与决策, 2018, 33(7): 1303-1312.
(Liang X, Liu Z M, Liu P D. Pythagorean uncertain linguistic TODIM method based on generalized Choquet integral and its application[J]. Control and Decision, 2018, 33(7): 1303-1312.)

[21] Ren P, Xu Z, Gou X. Pythagorean fuzzy TODIM approach to multi-criteria decision making[J]. Applied Soft Computing, 2016, 42(5): 246-259.

[22] Liamazares B. An analysis of the generalized TODIM method[J]. European Journal of Operational Research, 2018, 269(3): 1041-1049.

[23] Felsenthal D S. Review of paradoxes afflicting procedures for electing a single candidate, studies in choice and welfare[M]. Berlin: Springer, 2012: 19-91.

[24] Liu P, Wang P. Some q-Rung orthopair fuzzy aggregation operators and their applications to multi-attribute decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2017, 33(2): 259-280.

[25] Du W. Minikowski-tpye distance measures for generalized orthopair fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2018, 33(4): 802-817.

[26] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179-1187.

[27] Garg H. Generalized Pythagorean fuzzy geometric aggregation operators using einstein t-norm and t-conorm for multicriteria decision making process[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2017, 32(6): 597-630.

作者简介

刘熠 (1979−), 男, 教授, 博士, 从事决策理论与方法、自动推理等研究, E-mail: liuyiyl@126.com;

秦亚 (1984−), 女, 副教授, 硕士, 从事决策理论与方法等研究, E-mail: qinyaqy@126.com;

刘好斌 (1983−), 男, 讲师, 硕士, 从事决策理论与方法的研究, E-mail: njtcliuhb@163.com;

许雷 (1986−), 男, 副教授, 博士, 从事决策理论与方法的研究, E-mail: 1986_xulei@163.com.

(责任编辑：李君玲)