控制与决策
Control and Decision

基于群的非完整局势势博弈

徐勇，时胜男，王金环，苏雪

引用本文:
徐勇, 时胜男, 王金环, 等. 基于群的非完整局势势博弈[J]. 控制与决策, 2020, 35(9): 2207-2214.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1724

第35卷 第9期
2020年 9月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.35 No.9
Sep. 2020

基于群的非完整局势势博弈

徐 勇†, 时胜男, 王金环, 苏 雪

(河北工业大学 理学院，天津 300401)

摘 要: 针对带有不可行局势的基于群的势博弈,提出基于群的非完整局势势博弈. 首先,利用矩阵的半张量积理论,给出判别一个有限博弈是否是基于(强)群的非完整局势势博弈的充分必要条件,即检验一个线性等式是否有解;其次,研究基于群的势博弈与基于群的非完整局势势博弈的关系;最后,给出一个寻找最小不可行局势集的算法,使得有限博弈在剩余局势下是一个基于群的势博弈.

关键词: 势博弈；有限博弈；不可行局势；半张量积；可行集

中图分类号: O225 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1724 **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

引用格式: 徐勇,时胜男,王金环,等. 基于群的非完整局势势博弈[J]. 控制与决策, 2020, 35(9): 2207-2214.

Group-based potential games with incomplete-profile

XU Yong†, SHI Sheng-nan, WANG Jin-huan, SU Xue

(School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: In order to investigate the group-based potential games with infeasible profiles, the group-based potential games with incomplete-profile is proposed. Firstly, using the semi-tensor product theory, a method is provided to verify whether a finite game is a (strongly) group-based potential game with incomplete-profile by checking whether a linear equation has a solution. Then, the relationship between the group-based potential games and the group-based potential games with incomplete-profile is studied. Finally, an algorithm is proposed to find the smallest set of infeasible profiles, such that the finite game will be a group-based potential game in the remaining profiles.

Keywords: potential games; finite games; infeasible profiles; semi-tensor product; feasible sets

0 引 言

势博弈的概念最早由Rosenthal提出[1],其证明了任意一个拥塞博弈都是势博弈. 由此,势博弈理论在众多研究者的研究下得到发展[2-6]. 文献[3]对势博弈进行了系统的研究,并给出了几个基本的结果,例如势博弈与有限增长性质的关系等. 势博弈有许多较好的性质,如纯策略纳什均衡的存在性和有限增长性质. 基于这些性质,势博弈理论被应用到许多方面,例如分布式优化、分布式功率控制与调度、协同控制与博弈等[7-9].

近几年来,众多研究者将矩阵半张量积理论[10-12]应用于势博弈的研究中. Cheng等[11]将普通矩阵乘积推广到任意维数的矩阵之间,提出了半张量积理论,为解决有限博弈问题提供了新的思路. 半张量积作为一种有效工具,可以将逻辑系统转化为相应的代数形式并由此分析其性质. 半张量积理论已经成功地应用于布尔网络、多值逻辑网络以及网络演化博弈等方面[13-15]. 近些年来,将半张量积理论应用于现实问题也成为热点,例如半张量积在电网和破产机制等方面的应用[16-18].

Cheng在文献[19]中运用半张量积理论给出了判别一个有限博弈是否是势博弈的充分必要条件,即检验一个线性等式是否有解. 在此基础上,已有众多学者运用半张量积理论对解决势博弈的相关问题做出贡献. 例如,Cheng等[20]研究了有限博弈的分解子空间,得到了势博弈的子空间以及纯势子空间;Wang等[21]证明了有限非合作博弈的向量空间可以被分解成3个正交子空间(纯势博弈、非策略博弈、纯调和博弈);Li等[22]给出了当线性等式有解时利用逻辑信息设计有限势博弈的方法.

Marden等[9]引入基于群的势博弈概念,在协同控制与博弈理论之间建立了桥梁. 在此基础上,Li等[23]设计了一个博弈作为基于群的势博弈,并给出了判别一个博弈是否是基于群的势博弈的充分必要条件. 类似于有限势博弈[19]的判别方法,通过解一个线性等式是否有解可以判定一个有限博弈是否是基

收稿日期: 2018-12-18; **修回日期:** 2019-02-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71371186).

†通讯作者. E-mail: xuyong@hebut.edu.cn.

于群的势博弈.

在现实生活中,人们在一些特殊环境下做决定时可能会受到某些约束限制,这就有可能会出现一些局势是不可行的. 基于此, Zhang等[24]提出了非完整局势正规形式博弈的概念,它与正规形式博弈的区别在于非完整局势正规形式博弈存在某些不可行局势. 基于演化博弈理论[25-27], Zhang等[24]还指出了非完整局势正规形式博弈的演化取决于策略更新规则和可行集. 文献[24]研究了非完整局势势博弈,给出了判别一个博弈是否是非完整局势势博弈的充分必要条件,同时给出了势函数的计算公式.

本文主要考虑基于群的非完整局势势博弈,给出判别一个有限博弈是否是基于(强)群的非完整局势势博弈的充分必要条件,即判断相应的势等式是否有解. 此外,给出基于群的非完整局势势博弈的势函数的结构向量,并研究基于群的非完整局势势博弈的性质. 在此基础上,给出一个寻找最小不可行局势集的算法,使得有限博弈在剩余局势下是一个基于群的势博弈.

本文的主要创新如下: 1)首次提出基于(强)群的非完整局势势博弈的概念,并将基于群的非完整局势势博弈的动态表示成相应的代数形式; 2)给出判别一个有限博弈是否是基于群的非完整局势势博弈的充分必要条件,即判断相应的势等式是否有解,并给出基于群的非完整局势势博弈的势函数的结构向量计算公式; 3)探究基于群的非完整局势势博弈与基于群的势博弈之间的关系; 4)给出一个寻找最小不可行局势集的算法,使得有限博弈在剩余局势下是一个基于群的势博弈.

1 预备知识

1.1 矩阵半张量积理论

首先,列出本文所用到有关半张量积的符号、定义及基本性质如下:

1) $\Delta_n := \{\delta_n^k | 1 \leqslant k \leqslant n\}$;

2) δ_n^i 为单位矩阵 I_n 的第 i 列;

3) $\mathrm{Col}_i(M)$ 为矩阵 M 的第 i 列;

4) 假设 $L \in \mathcal{L}_{m\times n}$,则 $L = [\delta_m^{i_1}\ \ \delta_m^{i_2}\ \ \ldots\ \ \delta_m^{i_n}]$,可简写成 $L = \delta_m[i_1\ \ i_2\ \ \ldots\ \ i_n]$;

5) $\mathbf{1}_n$ 为 n 维列向量,且所有元素均为1;

6) $\mathcal{M}_{m\times n}$ 为 $m\times n$ 维矩阵集.

定义1[10] 设 $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}, B = (b_{ij})_{p\times q} \in \mathcal{M}_{p\times q}$,则 A 与 B 的Kronecker积记作 $A\otimes B$,定义为

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mp\times nq}.$$

定义2[10] 给定两个矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}, B = (b_{ij})_{p\times q} \in \mathcal{M}_{p\times q}$,令 $t = \mathrm{lcm}(n,p)$ 是 $\{n,p\}$ 的最小公倍数,则矩阵 A、B 的半张量积记为

$$A \ltimes B = (A\otimes I_{t/n})(B\otimes I_{t/p}).$$

定义3[10] 设 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times r}, B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times r}$,则 A 与 B 的Khatri-Rao乘积记作 $A * B$,定义为

$$A * B = \\ [\mathrm{Col}_1(A)\otimes \mathrm{Col}_1(B), \ldots, \mathrm{Col}_r(A)\otimes \mathrm{Col}_r(B)].$$

引理1[10] 令 $f: \Delta_k^n \to \boldsymbol{R}$ 是一个伪逻辑函数,则存在唯一的矩阵 $M_f \in \boldsymbol{R}_{1\times k^n}$,称为 f 的结构矩阵,满足

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M_f \ltimes_{i=1}^n x_i,$$

其中 $x_i \in \Delta_k, i = 1, 2, \ldots, n$.

引理2[10] 假设 $X \in \Delta_m, Y \in \Delta_n$. 定义前保持矩阵和后保持矩阵分别为

$$F_{[m,n]} := I_m \otimes \mathbf{1}_n^{\mathrm{T}},\ R_{[m,n]} := \mathbf{1}_m^{\mathrm{T}} \otimes I_n,$$

则

$$F_{[m,n]}XY = X,\ R_{[m,n]}XY = Y.$$

引理3[10] 令 $X \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ 和 $Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ 是两个列向量,则

$$YX = W_{[m,n]}XY,$$

其中 $W_{[m,n]} \in \mathcal{M}_{mn\times nm}$ 为换位矩阵.

1.2 势博弈

定义4[19] 一个(有限)正规博弈由3个部分组成, $G = (N, S, C)$,这里:

1) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ 表示有 n 个玩家(局中人);

2) $S = \prod_{i=1}^n S_i$ 称为局势,其中 $S_i = \{s_1^i, s_2^i, \ldots, s_{k_i}^i\}, i = 1, 2, \ldots, n$,是第 i 个玩家的策略集,表示第 i 个玩家有 k_i 个策略可供选择. 局势是所有玩家策略集的笛卡尔积.

3) $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$,其中 $c_i: S \to \boldsymbol{R}$ 是第 i 个玩家的收益函数.

利用策略的向量表示,可以将收益函数表示为

$$c_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_i \ltimes_{j=1}^n x_j,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

记有限博弈 $G \in \mathcal{G}_{[n,k_1,k_2,\ldots,k_n]}$ 的收益向量为 $V = [V_1, V_2, \ldots, V_n] \in \boldsymbol{R}^{nk}$,其中 $\mathcal{G}_{[n,k_1,k_2,\ldots,k_n]}$ 代表 $|N| = n, |S_i| = k_i, i = 1, 2, \ldots, n$,且 $k = \prod_{i=1}^n k_i$

的有限博弈集. 令$U \subset N$,记$S_U = \prod_{i\in U} S_i, S^{-U} = \prod_{j\notin U} S_j, k_U = \prod_{j\in U} k_j, k_{-U} = k/k_U$. 此外,记$S^{-i} = \prod_{j\neq i} S_j, k_{-i} = k/k_i$.

定义5[19]　一个有限博弈$G \in \mathcal{G}_{[n,k_1,k_2,\dots,k_n]}$称为势博弈,如果存在一个函数$P: S \to \boldsymbol{R}$,使得对于每个$i$和每个$s^{-i} \in S^{-i}$以及任意的$x, y \in S_i$均有

$$c_i(x, s^{-i}) - c_i(y, s^{-i}) = P(x, s^{-i}) - P(y, s^{-i})$$

成立,则称其为势函数.

定义6[19]　一个有限博弈$G \in \mathcal{G}_{[n,k_1,k_2,\dots,k_n]}$是势博弈,当且仅当势等式

$$E_P \xi = V^{\mathrm{T}}$$

有解. 如果解存在,则

$$V_P = V_1 - \xi_1^{\mathrm{T}} \varGamma_1.$$

其中:$\xi_i \in \boldsymbol{R}^{k/k_i}$, $\varGamma_i = \otimes_{l=1}^{i-1} I_{k_l} \otimes 1_{k_i}^{\mathrm{T}} \otimes_{l=i+1}^{n} I_{k_l}$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$E_P = \begin{bmatrix} -\varGamma_1^{\mathrm{T}} & \varGamma_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\varGamma_1^{\mathrm{T}} & 0 & \varGamma_3^{\mathrm{T}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -\varGamma_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & \dots & \varGamma_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

2　基于群的势博弈

2.1　基于群的势博弈

考虑一个有限博弈$G \in \mathcal{G}_{[n;k_1,\dots,k_n]}$. 假设有$m$个群组的玩家

$$N = \bigcup_{j=1}^{m} N_j. \tag{1}$$

其中: N_j是第j个群组的玩家集, N是所有玩家的集合,且$N_j \subset N, |N_j| = n_j, j = 1, 2, \dots, m$.

定义7[23]　一个有限博弈G被称为关于群组(1)的基于群的势博弈,如果存在一个函数$P: S \to \boldsymbol{R}$满足对于任意的$x^{-N_i} \in S^{-N_i}$和任意的$x, y \in S_{N_i}, i = 1, 2, \dots, m$, 有下式成立:

$$\sum_{j\in N_i} [c_j(x, x^{-N_i}) - c_j(y, x^{-N_i})] = P(x, x^{-N_i}) - P(y, x^{-N_i}).$$

定义8[23]　定义群指示函数F_U和群删除算子$\varGamma_U$如下所示:

$$F_U := [a_1, a_2, \dots, a_n],\ \varGamma_U := \otimes_{i=1}^{n} \gamma_i.$$

其中

$$a_j := \begin{cases} 1,\ j \in U; \\ 0,\ \text{otherwise}. \end{cases}$$

$$\gamma_i := \begin{cases} 1_{k_i}^{\mathrm{T}},\ i \in U; \\ I_{k_i},\ \text{otherwise}. \end{cases} \tag{2}$$

$U \subset N$是博弈$G \in \mathcal{G}_{[n;k_1,\dots,k_n]}$中的一个玩家群组. 群删除算子通常被用来从$N$中“删除”群组$U$中的玩家:

$$\ltimes_{j\notin U} x_j = \varGamma_U \ltimes_{j=1}^{n} x_j,$$

其中x_i是玩家i的策略. 特别地,

$$\varGamma_i := \varGamma_{\{i\}}.$$

引理4[23]　一个有限博弈$G \in \mathcal{G}_{[n;k_1,\dots,k_n]}$是一个关于群组(1)的基于群的势博弈,当且仅当存在一个函数集$d_{N_i}(\widehat{x}_{N_i}, x^{-N_i})$满足对于任意的$x_{N_i} \in S_{N_i}, x^{-N_i} \in S^{-N_i}, i = 1, 2, \dots, m$,有下式成立:

$$\sum_{j\in N_i} c_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) + d_{N_i}(\widehat{x}_{N_i}, x^{-N_i}). \tag{3}$$

其中: P表示势函数, $\widehat{x}_{N_i}$表示没有该项.

将式(3)表示成如下向量形式:

$$\sum_{j\in N_i} V_j \ltimes_{l=1}^{n} x_l = V_P \ltimes_{l=1}^{n} x_l + V_{N_i}^{d} \ltimes_{l\notin N_i} x_l,$$

其中V_j、V_P和$V_{N_i}^{d}$分别是c_j、P和d_{N_i}的结构向量.

因为$x_l \in \varDelta_{k_l} (l = 1, 2, \dots, n)$是任意的,利用式(2)有

$$V \ltimes F_{N_i}^{\mathrm{T}} = V_P + V_{N_i}^{d} \varGamma_{N_i},\ i = 1, 2, \dots, m, \tag{4}$$

其中$V = [V_1, V_2, \dots, V_n]$.

当$i = 1$时,有

$$V \ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}} = V_P + V_{N_1}^{d} \varGamma_{N_1},$$

由此可得

$$V_P = V \ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}} - V_{N_1}^{d} \varGamma_{N_1}. \tag{5}$$

将式(5)代入(4)中,得到

$$V \ltimes F_{N_i}^{\mathrm{T}} - V \ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}} = V_{N_i}^{d} \varGamma_{N_i} - V_{N_1}^{d} \varGamma_{N_1}, \tag{6}$$

其中$i = 2, 3, \dots, m$. 对式(6)取转置,得到

$$(V \ltimes F_{N_i}^{\mathrm{T}} - V \ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\varGamma_{N_i})^{\mathrm{T}} (V_{N_i}^{d})^{\mathrm{T}} - (\varGamma_{N_1})^{\mathrm{T}} (V_{N_1}^{d})^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

记$\xi_i = (V_{N_i}^{d})^{\mathrm{T}}, E_i = (\varGamma_{N_i})^{\mathrm{T}}$,其中$i = 1, 2, \dots, m$; 记$b = (b_2^{\mathrm{T}}, b_3^{\mathrm{T}}, \dots, b_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,其中$b_i = (V \ltimes F_{N_i}^{\mathrm{T}} - V \ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, i = 2, 3, \dots, m$. 则式(7)可以表示成一个线性系统

$$E_G \xi = b. \tag{8}$$

其中

$$E_G = \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 & 0 & \dots & 0 \\ -E_1 & 0 & E_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E_1 & 0 & 0 & \dots & E_m \end{bmatrix},$$

且$\xi = (\xi_1^{\mathrm{T}}, \xi_2^{\mathrm{T}}, \dots, \xi_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

定理1 一个有限博弈$G \in \mathcal{G}_{[n;k_1,\ldots,k_n]}$是关于群组(1)的基于群的势博弈,当且仅当势等式(8)至少有一个解. 如果解存在,则势函数P的结构向量为

$$V_P = V \ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}} - \xi_1^{\mathrm{T}} \Gamma_{N_1}.$$

注1 该部分给出的判别一个有限博弈是否是基于群的势博弈的充分必要条件与文献[23]中给出结果的形式不同,在本文给出的判别条件形式下,考虑基于群的非完整局势势博弈更为方便简洁. 下面证明以上结论的有效性.

例1 为了与文献[23]进行对比,在这里采用文献[23]中例3.8给出的收益矩阵以及分组. 考虑博弈G,该博弈的收益矩阵如表1所示.

表1 例1的收益矩阵

V_i	s							
	111	112	121	122	211	212	221	222
V_1	26	9	12	4	14	6	14	6
V_2	−5	−5	2	2	2	2	4	4
V_3	18	10	4	5	7	8	7	8

群组$N_1 = \{1,2\}, N_2 = \{2,3\}, N_3 = \{3\}$. 利用定理1,记$V = [V_1, V_2, V_3]$,可以计算得到

$$b_2 = [-8,1,-8,1,-7,2,-7,2]^{\mathrm{T}},$$

$$b_3 = [-3,6,-10,-1,-9,0,-11,-2]^{\mathrm{T}},$$

$$E_G = \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 & 0 \\ -E_1 & 0 & E_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1_2 \otimes 1_2 \otimes I_2 & I_2 \otimes 1_2 \otimes 1_2 & 0 \\ -1_2 \otimes 1_2 \otimes I_2 & 0 & I_2 \otimes I_2 \otimes 1_2 \end{bmatrix}.$$

由此可得

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1&0\\0&1\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1&0\\1&0\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\\0&1\\0&1 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

令$\xi \in \boldsymbol{R}^8$,解线性等式$E_G \xi = b$可得

$$\xi = c[1_2^{\mathrm{T}}, 1_2^{\mathrm{T}}, 1_4^{\mathrm{T}}] + [0,-9,-8,-7,-3,-10,-9,-11],$$

其中c是任意常数. 由此可得势函数的结构向量为

$$V_P = V \ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}} - \xi_1^{\mathrm{T}} \Gamma_{N_1} = -c1_8^{\mathrm{T}} + [21,13,14,15,16,17,18,19].$$

例1证明了该博弈是基于群的势博弈,这与文献[23]的结果一致.

2.2 基于强群的势博弈

定义9 [23] 一个有限博弈G被称为关于群组(1)的基于强群的势博弈,如果存在一个函数$P: S \to \boldsymbol{R}$满足对于任意的$j \in N_i,\ x^{-N_i} \in S^{-N_i},\ x, y \in S_{N_i},\ i = 1,2,\ldots,m$,都有下式成立:

$$c_j(x, x^{-N_i}) - c_j(y, x^{-N_i}) = P(x, x^{-N_i}) - P(y, x^{-N_i}),$$

其中$N_l \bigcap N_q = \varnothing (l \neq q,\ l, q = 1,2,\ldots,m)$.

引理5 [23] 一个有限博弈$G \in \mathcal{G}_{[n;k_1,\ldots,k_n]}$是一个关于群组(1)的基于强群的势博弈,当且仅当存在一个函数集$d_j(\widehat{x}_{N_i}, x^{-N_i})$,满足对于任意的$j \in N_i, x_{N_i} \in S_{N_i}, x^{-N_i} \in S^{-N_i}$,都有下式成立:

$$c_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) + d_j(\widehat{x}_{N_i}, x^{-N_i}). \tag{9}$$

其中: P表示一个势函数,$\widehat{x}_{N_i}$表示没有该项,$i = 1,2,\ldots,m$.

将式(9)转化为如下向量形式:

$$V_j \ltimes_{l=1}^n x_l = V_P \ltimes_{l=1}^n x_l + V_j^d \ltimes_{l \notin N_i} x_l.$$

其中: $j \in N_i, i = 1,2,\ldots,m$; V_j、V_P和V_j^d分别是c_j、P和d_j的结构向量.

假设$i \in N_{l_i}, i = 1,2,\ldots,n$. 因为$x_l \in \Delta_{k_l} (l = 1,2,\ldots,n)$是任意的,利用式(2)有

$$V_j = V_P + V_j^d \Gamma_{N_{l_j}},\ j = 1,2,\ldots,n. \tag{10}$$

同样地,记$\xi_i = (V_i^d)^{\mathrm{T}}, E_i = (\Gamma_{N_{l_i}})^{\mathrm{T}}$,其中$i = 1,2,\ldots,n$;记$b = (b_2^{\mathrm{T}}, b_3^{\mathrm{T}}, \ldots, b_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,其中$b_i = (V_i - V_1)^{\mathrm{T}}, i = 2,3,\ldots,n$. 则式(10)可以表示成一个线性系统

$$E_S \xi = b. \tag{11}$$

其中

$$E_S = \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 & 0 & \ldots & 0 \\ -E_1 & 0 & E_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E_1 & 0 & 0 & \ldots & E_n \end{bmatrix},$$

且$\xi = (\xi_1^{\mathrm{T}}, \xi_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \xi_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

定理2 一个有限博弈$G \in \mathcal{G}_{[n;k_1,\ldots,k_n]}$是关于群组(1)的基于强群的势博弈,当且仅当势等式(11)至少有一个解. 如果解存在,势函数P的结构向量为

$$V_P = V_1 - \xi_1^{\mathrm{T}} \Gamma_{N_{l_1}}.$$

注2 该部分给出的判别一个有限博弈是否是基于强群的势博弈的充分必要条件与文献[23]中给出结果的形式不同.

3 基于群的非完整局势势博弈

本节给出非完整局势正规形式博弈和基于群的非完整局势势博弈的定义及判别定理.

3.1 非完整局势正规形式博弈

定义10[24] 考虑一个正规形式博弈$G=(N,S,C)$,假设可行集Ω是S的真子集,则G被称为一个非完整局势正规形式博弈,被记为$G=(N,S,C,\Omega)$,它的动态为

$$\begin{cases}x_1(t+1)=f_1(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)),\\ x_2(t+1)=f_2(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)),\\ \quad\vdots\\ x_n(t+1)=f_n(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)).\end{cases}$$

其中:$x_i(t)\in\mathcal{D}_{k_i}$是玩家$i$在$t$时刻的策略,策略局势$(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega$; $f_i:\prod_{j=1}^{n}\mathcal{D}_{k_j}\to\mathcal{D}_{k_i}, i=1,2,\dots,n$,是混合值逻辑函数.

记一个非完整局势正规形式博弈$G=(N,S,C,\Omega)$的结构矩阵为$L^{\Omega}\in\mathcal{M}_{k\times k}$,其中$\mathrm{Col}(L^{\Omega})\subset\Delta_k\bigcup\{0_k\}, k=\prod_{i=1}^{n}k_i$.

引理6[24] 非完整局势正规形式博弈$G=(N,S,C,\Omega)$的代数状态表示为

$$x(t+1)=L^{\Omega}x(t),$$

其中$\mathrm{Col}_i(L^{\Omega})=0_k$,当且仅当$\delta_k^i\in S\backslash\Omega$.

3.2 基于群的非完整局势势博弈

定义11 一个非完整局势正规形式博弈$G=(N,S,C,\Omega)$被称为关于群组(1)的基于群的势博弈,如果存在一个函数$P:\Omega\to\boldsymbol{R}$满足对于任意的$x^{-N_i}\in S^{-N_i}, x,y\in S_{N_i}, i=1,2,\dots,m, (x,x^{-N_i})\in\Omega, (y,x^{-N_i})\in\Omega$,都有下式成立:

$$\sum_{j\in N_i}[c_j(x,x^{-N_i})-c_j(y,x^{-N_i})]=P(x,x^{-N_i})-P(y,x^{-N_i}). \tag{12}$$

命题1 假设一个非完整局势正规形式博弈是基于群的势博弈,则势函数在容许一个常数差的意义下唯一.

证明 假设可行集为Ω_0的基于群的势博弈G存在两个势函数$P_1\neq P_2$,则对于任意的$(x,x^{-N_i})\in\Omega_0, (y,x^{-N_i})\in\Omega_0$,有

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in N_i}[c_j(x,x^{-N_i})-c_j(y,x^{-N_i})]=\\&P_1(x,x^{-N_i})-P_1(y,x^{-N_i})=\\&P_2(x,x^{-N_i})-P_2(y,x^{-N_i})\Leftrightarrow\\&P_1(x,x^{-N_i})-P_2(x,x^{-N_i})=\\&P_1(y,x^{-N_i})-P_2(y,x^{-N_i}).\end{aligned}$$

如果P_1-P_2不是一个常数,则至少存在两种局势$s_1^*,s_2^*\in\Omega_0$,使得

$$P_1(s_1^*)-P_2(s_1^*)\neq P_1(s_2^*)-P_2(s_2^*).$$

这与G是基于群的非完整局势势博弈的定义矛盾,证明成立. □

命题2 一个非完整局势正规形式博弈$G=(N,S,C,\Omega)$是一个基于群的势博弈,当且仅当存在一个函数集$d_{N_i}(\widehat{x}_{N_i},x^{-N_i})$,满足对于任意的$x_{N_i}\in S_{N_i}, x^{-N_i}\in S^{-N_i}, i=1,2,\dots,m$,以及$(x_{N_i},x^{-N_i})\in\Omega$,有下式成立:

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in N_i}c_j(x_1,x_2,\dots,x_n)=\\&P(x_1,x_2,\dots,x_n)+d_{N_i}(\widehat{x}_{N_i},x^{-N_i}),\end{aligned} \tag{13}$$

其中$\widehat{x}_{N_i}$表示没有该项.

证明 在一个基于群的势博弈中

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in N_i}[c_j(x,x^{-N_i})-c_j(y,x^{-N_i})]=\\&P(x,x^{-N_i})-P(y,x^{-N_i})\Leftrightarrow\\&\sum_{j\in N_i}c_j(x,x^{-N_i})-P(x,x^{-N_i})=\\&\sum_{j\in N_i}c_j(y,x^{-N_i})-P(y,x^{-N_i}),\end{aligned}$$

其中$x,y\in S_{N_i}$.

由此可知,该等式与群N_i的策略局势S_{N_i}无关,因此将它记为$d_{N_i}(x^{-N_i})$,可得等式(13). □

下面考虑等式(13)的矩阵表示.

假设可行集$\Omega:=\{\delta_k^{i_j}|j=1,2,\dots,s\}$,其中$i_1<i_2<\dots<i_s$,且$|\Omega|=s$. 由此定义一个矩阵

$$\Delta_{\Omega}:=[\delta_k^{i_1},\delta_k^{i_2},\dots,\delta_k^{i_s}]\in\mathcal{M}_{k\times s}.$$

对于等式(8)中的元素,定义$(V\ltimes F_{N_i}^{\mathrm{T}})^{\Omega}:=(V\ltimes F_{N_i}^{\mathrm{T}})\Delta_{\Omega}, (E_i^{\Omega})^{\mathrm{T}}=E_i^{\mathrm{T}}\Delta_{\Omega}$. 由此,等式(13)可以表示成如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}-E_1^{\Omega} & E_2^{\Omega} & 0 & \dots & 0\\ -E_1^{\Omega} & 0 & E_3^{\Omega} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -E_1^{\Omega} & 0 & 0 & \dots & E_m^{\Omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_2^{\Omega}\\ b_3^{\Omega}\\ \vdots\\ b_m^{\Omega}\end{bmatrix}, \tag{14}$$

其中$b_i^{\Omega}=((V\ltimes F_{N_i}^{\mathrm{T}})^{\Omega}-(V\ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}})^{\Omega})^{\mathrm{T}}, i=2,3,\dots,m$. 式(14)可被简记为$E_G^{\Omega}\xi=b^{\Omega}$.

定理3 一个非完整局势正规形式博弈$G=(N,S,C,\Omega)$是基于群的势博弈,当且仅当势等式(14)至少有一个解. 如果解存在,则势函数的结构向量为

$$V_P^{\Omega}=(V\ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}})^{\Omega}-\xi_1^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}\Delta_{\Omega}.$$

证明 1) 由命题2可知,若等式(14)至少有一个解ξ^*,则等式(13)对于任意的$j\in N_i(i=1,2,\dots,m)$和任意的$(x_{N_i},x^{-N_i})\in\Omega$均成立,因此该博弈是基于群的非完整局势势博弈.

2) 不失一般性,取玩家1计算势函数,对于一个

基于群的非完整局势势博弈,等式(13)可以被写成向量形式

$$V_P^{\Omega}=(V\ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}})^{\Omega}-(V_{N_1}^{d}\Gamma_{N_1})^{\Omega}=$$
$$(V\ltimes F_{N_1}^{\mathrm{T}})^{\Omega}-\xi_1^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}\Delta_{\Omega}.\quad\square$$

命题3 假设$G=(N,S,C)$是一个基于群的势博弈,且可行集$\Omega\in S$,则$G'=(N,S,C,\Omega)$是一个基于群的非完整局势势博弈.

证明 G是一个基于群的势博弈,因此对于任意的$x^{-N_i}\in S^{-N_i}$和任意的$x,y\in S_{N_i},i=1,2,\ldots,m$, $(x,x^{-N_i}),(y,x^{-N_i})\in S$,都有$\sum\limits_{j\in N_i}[c_j(x,x^{-N_i})-c_j(y,x^{-N_i})]=P(x,x^{-N_i})-P(y,x^{-N_i})$成立. 又因为$\Omega\in S$,上式对于任意的$(x,x^{-N_i}),(y,x^{-N_i})\in\Omega$均成立. $\square$

命题3反之不成立. 下面给出例子证明如果一个博弈不是基于群的势博弈,则它可以有一个子博弈是基于群的非完整局势势博弈.

例2 考虑一个博弈$G=(N,S,C)$,它的收益矩阵如表2所示.

表2 例2的收益矩阵

V_i	s							
	111	112	121	122	211	212	221	222
V_1	2	1	2	1	0	2	0	3
V_2	1	2	2	1	2	3	2	2
V_3	1	3	1	3	2	5	2	8

下面证明G不是一个关于群组$N_1=\{1,2\}$, $N_2=\{2\},N_3=\{2,3\}$的基于群的势博弈,但它有一个子博弈是基于群的非完整局势势博弈.

1) 由G的收益矩阵可以得到

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},E_3=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\\0&1\\0&1\end{bmatrix},$$

$$b_2=[-2,-1,-2,-1,0,-2,0,-3]^{\mathrm{T}},$$
$$b_3=[-1,2,-1,2,2,3,2,5]^{\mathrm{T}}.$$

将它们代入式(8),可知式(8)无解,因此$G=(N,S,C)$不是一个基于群的势博弈.

2) 令$\Omega=\Delta_8\backslash\{\delta_8^6\}$,由此可得

$$\Delta_{\Omega}=[\delta_8^1,\delta_8^2,\delta_8^3,\delta_8^4,\delta_8^5,\delta_8^7,\delta_8^8],$$
$$b_2^{\Omega}=[-2,-1,-2,-1,0,0,-3]^{\mathrm{T}},$$
$$b_3^{\Omega}=[-1,2,-1,2,2,2,5]^{\mathrm{T}},$$

$$E_1^{\Omega}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\\1&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\ E_2^{\Omega}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ E_3^{\Omega}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

将它们代入式(14),可知式(14)的解为

$$\xi=c\mathbf{1}_8^{\mathrm{T}}+[2,-1,0,-2,2,-4,1,4].$$

由此,$G'=(N,S,C,\Omega)$是一个基于群的非完整局势势博弈,G'的势函数的结构向量为

$$V_P^{\Omega}=c\mathbf{1}_7^{\mathrm{T}}+[2,-1,2,-1,2,2,-1].$$

例2证明了如果一个有限博弈不是基于群的势博弈,则它可以有一个子博弈是基于群的非完整局势势博弈.

3.3 基于强群的非完整局势势博弈

定义12 一个非完整局势正规形式博弈$G=(N,S,C,\Omega)$被称为关于群组(1)的基于强群的势博弈,如果存在一个函数$P:\Omega\to\boldsymbol{R}$满足对于任意的$j\in N_i$, $x^{-N_i}\in S^{-N_i}$, $x,y\in S_{N_i}$, $i=1,2,\ldots,m$,且$(x,x^{-N_i})\in\Omega,(y,x^{-N_i})\in\Omega$,有下式成立:

$$c_j(x,x^{-N_i})-c_j(y,x^{-N_i})=$$
$$P(x,x^{-N_i})-P(y,x^{-N_i}),$$

其中$N_l\bigcap N_q=\varnothing(l\neq q,\ l,q=1,2,\ldots,m)$.

命题4 假设一个非完整局势正规形式博弈是基于强群的势博弈,则势函数在容许一个常数差的意义下唯一.

证明 假设可行集为Ω_0的基于强群的势博弈G存在两个势函数$P_1\neq P_2$,则对于任意的$(x,x^{-N_i})\in\Omega_0,(y,x^{-N_i})\in\Omega_0$,有

$$c_j(x,x^{-N_i})-c_j(y,x^{-N_i})=$$
$$P_1(x,x^{-N_i})-P_1(y,x^{-N_i})=$$
$$P_2(x,x^{-N_i})-P_2(y,x^{-N_i})\Leftrightarrow$$
$$P_1(x,x^{-N_i})-P_2(x,x^{-N_i})=$$
$$P_1(y,x^{-N_i})-P_2(y,x^{-N_i}).$$

如果P_1-P_2不是一个常数,则至少存在两种局势$s_1^*,s_2^*\in\Omega_0$,使得

$$P_1(s_1^*)-P_2(s_1^*)\neq P_1(s_2^*)-P_2(s_2^*).$$

这与G是基于强群的非完整局势势博弈矛盾,证明成立. $\square$

命题5 一个非完整局势正规形式博弈$G=(N,$

$C, S, \Omega)$ 是基于强群的势博弈, 当且仅当存在一个函数集 $d_{N_i}(\widehat{x}_{N_i}, x^{-N_i})$, 满足对于任意的 $x_{N_i} \in S_{N_i}$, $x^{-N_i} \in S^{-N_i}, i = 1, 2, \ldots, m$, 以及 $(x_{N_i}, x^{-N_i}) \in \Omega$, 有下式成立:

$$c_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) + d_j(\widehat{x}_{N_i}, x^{-N_i}), \tag{15}$$

其中 $\widehat{x}_{N_i}$ 表示没有该项.

证明 在一个基于强群的势博弈中

$$\begin{aligned} & c_j(x, x^{-N_i}) - c_j(y, x^{-N_i}) = \\ & P(x, x^{-N_i}) - P(y, x^{-N_i}) \Leftrightarrow \\ & c_j(x, x^{-N_i}) - P(x, x^{-N_i}) = \\ & c_j(y, x^{-N_i}) - P(y, x^{-N_i}). \end{aligned}$$

可知该等式与 j 所在的群 N_i 的策略局势 S_{N_i} 无关, 因此将它记为 $d_j(x^{-N_i})$, 可得等式(15). □

下面考虑等式(15)的矩阵表示, 对于等式(11)中的元素, 定义 $V_i^{\Omega} := V_i \Delta_{\Omega}, E_i^{\Omega} := E_i^{\mathrm{T}} \Delta_{\Omega}$. 由此, 等式(15)可以表示成以下形式:

$$\begin{bmatrix} -E_1^{\Omega} & E_2^{\Omega} & 0 & \ldots & 0 \\ -E_1^{\Omega} & 0 & E_3^{\Omega} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E_1^{\Omega} & 0 & 0 & \ldots & E_n^{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2^{\Omega} \\ b_3^{\Omega} \\ \vdots \\ b_n^{\Omega} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

其中 $b_i^{\Omega} = (V_i^{\Omega} - V_1^{\Omega})^{\mathrm{T}}, i = 2, 3, \ldots, n$. 等式(16)可被简记为 $E_S^{\Omega} \xi = b^{\Omega}$.

定理4 一个非完整局势正规形式博弈 $G = (N, S, C, \Omega)$ 是关于群组(1)的基于强群的势博弈, 当且仅当势等式(16)至少有一个解. 如果解存在, 则势函数的结构向量为

$$V_P^{\Omega} = V_1^{\Omega} - \xi_1^{\mathrm{T}} E_1^{\mathrm{T}} \Delta_{\Omega}.$$

证明 1) 由命题5可知, 若等式(16)至少有一个解 ξ^*, 则等式(15)对于任意的 $j \in N_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ 和任意的 $(x_{N_i}, x^{-N_i}) \in \Omega$ 均成立, 因此该博弈是基于强群的势博弈.

2) 不失一般性, 取玩家1计算势函数, 对于一个非完整局势正规形式博弈, 等式(15)可以被写成向量形式:

$$V_P^{\Omega} = V_1^{\Omega} - (V_1^d \Gamma_{N_{l_1}})^{\Omega} = V_1^{\Omega} - \xi_1^{\mathrm{T}} (E_1^{\mathrm{T}}) \Delta_{\Omega}. \quad \square$$

命题6 假设 $G = (N, S, C)$ 是一个基于强群的势博弈, 且可行集 $\Omega \in S$, 则 $G' = (N, S, C, \Omega)$ 是一个基于强群的非完整局势势博弈.

证明 G 是一个基于强群的势博弈, 因此对于任意的 $x^{-N_i} \in S^{-N_i}, x, y \in S_{N_i}, i = 1, 2, \ldots, m$, 且 $(x, x^{-N_i}), (y, x^{-N_i}) \in S$, 都有下式成立:

$$\begin{aligned} & c_j(x, x^{-N_i}) - c_j(y, x^{-N_i}) = \\ & P(x, x^{-N_i}) - P(y, x^{-N_i}). \end{aligned}$$

又因为 $\Omega \in S$, 上式对于任意的 $(x, x^{-N_i}), (y, x^{-N_i}) \in \Omega$ 均成立, 证明成立. □

注3 命题6反之不成立.

3.4 算 法

假设一个博弈 $G = (N, S, C)$ 不是基于群的势博弈, 该部分的主要目的是设计一个算法, 找到最小的不可行局势集 Ω^c, 使得 $G' = (N, S, C, \Omega)$ 是基于群的非完整局势势博弈.

step 1: 考虑 $|\Omega^c| = 1$ 时的情况, 记 $N_{P1} = [1, 2, \ldots, k]$, 则相应地有 $\Delta_{\Omega} = S \backslash \{\delta_k^i\}$, 其中 $i \in N_{P1}$.

按照 N_{P1} 中元素的顺序, 找到相应的 Δ_{Ω}, 解方程 $E_G^{\Omega} \xi = b^{\Omega}$. 若存在 $j \in N_{P1}, \Delta_{\Omega} = S \backslash \{\delta_k^j\}$, 使得 $E_G^{\Omega} \xi = b^{\Omega}$ 有解, 则算法结束, 此时 $\Omega^c = \{\delta_k^j\}$; 否则, 进行下一步.

step 2: 考虑 $|\Omega^c| = 2$ 时的情况, 记 $N_{P2} = [12, 13, \ldots, 1k, 23, 24, \ldots, 2k, \ldots, (k-1)k]$, 则 $\Delta_{\Omega} = S \backslash \{\delta_k^i, \delta_k^j\}$, 其中 $i, j \in N_{P2}$.

按照 N_{P2} 中元素的顺序, 找到相应的 Δ_{Ω}, 解方程 $E_G^{\Omega} \xi = b^{\Omega}$. 若存在 $p, q \in N_{P2}, \Delta_{\Omega} = S \backslash \{\delta_k^p, \delta_k^q\}$, 使得 $E_G^{\Omega} \xi = b^{\Omega}$ 有解, 则算法结束, 此时 $\Omega^c = \{\delta_k^p, \delta_k^q\}$; 否则, 进行下一步.

step $k-1$: 考虑 $|\Omega^c| = k-1$ 时的情况, 记 $N_{P(k-1)} = [123 \ldots (k-2)(k-1), 123 \ldots (k-2)k, \ldots, 234 \ldots (k-1)k]$, 则 $|\Delta_{\Omega}| = 1$. 在这种情况下, 方程 $E_G^{\Omega} \xi = b^{\Omega}$ 必然有解, 算法结束.

注4 在该算法进行到 $k-1$ 步之前必然能够找到一个最小的 Ω^c, 使得有限博弈 G 在剩余局势下是一个基于群的非完整局势势博弈, 但该算法存在计算复杂度过大的问题, 接下来将会继续考虑如何降低计算复杂度的问题.

将所提算法运用到例2中, 可以得到最小的不可行局势集为 $\Omega^c = \{\delta_8^6\}$. 由例2可知, 在剩余局势下, 有限博弈 $G' = (N, S, C, \Omega)$ 是基于群的非完整局势势博弈.

4 结 论

本文研究了基于群的非完整局势势博弈, 即带有不可行局势的基于群的势博弈. 利用矩阵半张量积理论, 分析基于群的非完整局势势博弈的结构, 给出判别一个有限博弈 G 是否是基于群的非完整局势势博弈的充分必要条件, 同时给出一个算法, 找到最小的不可行局势集, 使得有限博弈 G 在剩余局势下是基于群的非完整局势势博弈.

参考文献(References)

[1] Rosenthal R W. A class of games possessing pure-strategy nash equilibria[J]. International Journal of Game Theory, 1973, 2(1): 65-67.

[2] Hart S, Mas-Colell A. Potential, value, and consistency[J]. Econometrica, 1989, 57(3): 589-614.

[3] Monderer D, Shapley L S. Potential games[J]. Games and Economic Behavior, 1996, 14(1): 124-143.

[4] Liu T, Wang Y H, Cheng D Z. Dynamics and stability of potential hyper-networked evolutionary games[C]. Proceedings of 34th Chinese Control Conference. Hangzhou: IEEE, 2015: 9090-9097.

[5] Liu X Y, Zhu J D. On potential equations of finite games[J]. Automatica, 2016, 68: 245-253.

[6] Cheng D Z, Liu T. From Boolean game to potential game[J]. Automatica, 2018, 96: 51-60.

[7] Yang B, Johansson M. Distributed optimization and games: A tutorial overview[J]. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2010, 406: 109-148.

[8] Heikkinen T. A potential game approach to distributed power control and scheduling[J]. Computer Networks, 2006, 50(13): 2295-2311.

[9] Marden J R, Arslan G, Shamma J S. Cooperative control and potential games[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2009, 39(6): 1393-1407.

[10] Qi H S, Cheng D Z. Analysis and control of Boolean networks: A semi-tensor product approach[C]. Proceedings of 7th Asian Control Conference. Hong Kong: IEEE, 2009: 1352-1356.

[11] Cheng D Z, Qi H S, He F H, et al. Semi-tensor product approach to networked evolutionary games[J]. Control Theory and Technology, 2014, 12(2): 198-214.

[12] Guo P L, Wang Y Z, Li H T. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method[J]. Automatica, 2013, 49(11): 3384-3389.

[13] Li H T, Wang Y Z, Xie L H. Output tracking control of boolean control networks via state feedback: Constant reference signal case[J]. Automatica, 2015, 59: 54-59.

[14] Laschov D, Margaliot M, Even G. Observability of boolean networks: A graph-theoretic approach[J]. Automatica, 2013, 49(8): 2351-2362.

[15] Liu Z B, Wang Y Z, Li H T. Two kinds of optimal controls for probabilistic mix-valued logical dynamic networks[J]. Science China Information Sciences, 2014, 57(5): 1-10.

[16] Zhu B, Xia K W, Xia X H. Game-theoretic demand-side management and closed-loop control for a class of networked smart grid[J]. IET Control Theory and Applications, 2017, 11(13): 2170-2176.

[17] Fu S H, Wang Y Z, Zhao G D. A matrix approach to the analysis and control of networked evolutionary games with bankruptcy mechanism[J]. Asian Journal of Control, 2017, 19(2): 717-727.

[18] Zhu B, Xia X H, Wu Z. Evolutionary game theoretic demand-side management and control for a class of networked smart grid[J]. Automatica, 2016, 70: 94-100.

[19] Cheng D Z. On finite potential games[J]. Automatica, 2014, 50(7): 1793-1801.

[20] Cheng D Z, Liu T, Zhang K Z, et al. On decomposed subspaces of finite games[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(11): 3651-3656.

[21] Wang Y H, Liu T, Cheng D Z. From weighted potential game to weighted harmonic game[J]. IET Control Theory and Applications, 2017, 11(13): 2161-2169.

[22] Li C X, He F H, Qi H S, et al. Potential games design using local information[C]. The 57th IEEE Conference on Decision and Control. Miami Beach: IEEE, 2018: 1911-1916.

[23] Li C X, He F H, Liu T, et al. Verification and dynamics of group-based potential games[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2019, 6(1): 215-224.

[24] Zhang X, Hao Y Q, Cheng D Z. Incomplete-profile potential games[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(2): 862-877.

[25] Cheng D Z, He F H, Qi H S, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(9): 2402-2415.

[26] Friedman D. On economic applications of evolutionary game theory[J]. Journal of Evolutionary Economics, 1998, 8(1): 15-43.

[27] Taylor C, Fudenberg D, Sasaki A, et al. Evolutionary game dynamics in finite populations[J]. Bulletin Mathematical Biology, 2004, 66(6): 1621-1644.

作者简介

徐勇 (1971−), 男, 教授, 博士, 从事非线性系统、复杂网络等研究, E-mail: xuyong@hebut.edu.cn;

时胜男 (1995−), 女, 硕士生, 从事有限博弈理论及应用的研究, E-mail: 583005375@qq.com;

王金环 (1980−), 女, 副教授, 博士, 从事多智能体系统控制、网络演化博弈等研究, E-mail: jinhuan@hebut.edu.cn;

苏雪 (1993−), 女, 硕士生, 从事网络演化博弈理论及应用的研究, E-mail: suxue1213@163.com.

(责任编辑：齐 霁)