

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于GM(0, N)模型的三元区间数序列预测

曾祥艳, 王旻燕, 何芳丽, 迟晓妮

引用本文:

曾祥艳, 王旻燕, 何芳丽, 等. 基于GM(0,N)模型的三元区间数序列预测[J]. *控制与决策*, 2020, 35(9): 2269–2276.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1710>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 基于遗传算法的灰色区间数的GM(1,1)优化模型

GM(1,1) model for interval grey number based on genetic algorithm

控制与决策. 2019, 34(2): 445–448 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1060>

### 具有交互效应的多变量GM(1,N)模型

Multivariable GM(1, N) model with interaction effects

控制与决策. 2017, 32(3): 515–520 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0138>

### 基于灰色理论的小样本振荡序列区间预测建模方法

Modeling method of interval prediction for oscillation sequence with poor samples based on grey theory

控制与决策. 2016, 31(7): 1311–1316 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0765>

### 灰色区间预测模型及其性质

Grey interval forecasting model and its properties

控制与决策. 2016, 31(12): 2293–2298 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0046>

### 正态分布区间灰数灰色预测模型

Gray prediction model of normal distribution interval grey number

控制与决策. 2015(9): 1711–1716 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0822>

# 基于 GM(0, N) 模型的三元区间数序列预测

曾祥艳<sup>†</sup>, 王旻燕, 何芳丽, 迟晓妮

(桂林电子科技大学 数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 在工程和经济领域, 很多数据序列具有很强的振荡性, 这些振荡序列用区间数表示将包含更多信息. 三元区间数不仅包含系统特征的上下界, 还在中间增加一个偏好值, 对三元区间数序列的预测研究具有很好的应用价值. 为了使灰色模型 GM(0, N) 能够直接对三元区间数序列建模, 改进了 GM(0, N) 模型方程的参数设置, 将整体贡献系数和滞后项系数取为精确数, 而将线性修正项系数和补偿系数设为三元区间数, 从而对三元区间数的不同界点进行线性修正和补偿. 进一步, 为了提高对振荡序列的预测精度, 结合马尔科夫预测和序列转换方法对模型的预测序列进行修正. 通过对我国用电量和社会消费品零售总额的预测, 表明了所提出的三元区间数多变量灰色模型比单变量灰色模型和区间数序列转换为精确数序列再预测的方法效果更好.

**关键词:** 多变量灰色模型; GM(0, N); 三元区间数; 振荡序列; 时间序列预测; 马尔科夫修正

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1710

引用格式: 曾祥艳, 王旻燕, 何芳丽, 等. 基于 GM(0, N) 模型的三元区间数序列预测 [J]. 控制与决策, 2020, 35(9): 2269-2276.

## Prediction of ternary interval number sequence based on GM(0, N) model

ZENG Xiang-yan<sup>†</sup>, WANG Min-yan, HE Fang-li, CHI Xiao-ni

(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract:** In the field of engineering and economics, many data sequences have strong oscillation. These oscillating sequences, represented by interval numbers, will contain more information. The ternary interval number not only contains the upper and lower bounds of the system characteristics, but also contains a preference value. It has a good application value to study the prediction of the sequence of ternary interval numbers. In order to make the multivariable grey model GM(0, N) be able to directly model the ternary interval number sequence, the parameter setting of the GM(0, N) model equation is improved. The global contribution coefficient and lag coefficient are taken as the exact number. The linear correction term coefficient and compensation coefficient are set as the ternary interval numbers to compensate the different boundary points of the ternary interval number. Furthermore, to improve the prediction accuracy of the oscillatory sequence, the prediction sequence of the model is modified with the Markov prediction and sequence transformation method. By forecasting China's electricity consumption and total retail sales of consumer goods, the comparison results show that the ternary interval number multivariate grey model presented in the paper is better than the single variable grey model and the method of forecasting after converting interval number series into exact number series.

**Keywords:** multivariable grey model; GM(0, N); ternary interval number; oscillatory sequence; time series prediction; Markov correction

## 0 引言

在工程和经济领域, 很多数据序列具有很强的振荡性, 如股票数据、电力负荷等. 这些振荡序列用区间数表示将包含更多信息, 更有利于实际决策. 由胡启洲<sup>[1]</sup>对区间数的定义可知, 区间数来源于模糊数. 三元区间数来源于三角模糊数, 只是它的表示式比三角模糊数更清晰. 三角模糊数显示了系统特征的上中

下三界点的隶属度, 而三元区间数直接显示了系统特征的上中下 3 个界点. 两者的基本原理都是系统特征取中界点的概率最大, 所以此中界点也称为偏好值, 并且系统特征从此中界点分别向两边取值的概率逐渐变小. 例如, 电力负荷是按小时记录, 某一区域 24 h 的最小值和最大值可以分别作为三元区间数的上界点和下界点. 偏好值或中界点可以设置为一段时间

收稿日期: 2018-12-17; 修回日期: 2019-05-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71801060; 11861026); 广西自然科学基金项目 (2017GXNSFBA198182); 广西区中青年骨干教师提升计划项目 (2017KY0193); 桂林电子科技大学研究生优秀学位论文培育项目 (2018YJSPY02).

责任编辑: 牛玉刚.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: zengxyhbc@163.com.

的均值,因为决策者往往偏好根据均值进行决策,也可以用统计理论中的直方图法来确定.例如,桂林市某地区一天24h电力负荷的记录值(单位:WM)的最小值、平均值和最大值分别为0.29、0.50和0.79,因此,可以用三元区间数 $[0.29, 0.50, 0.79]$ 记录这一天的电力负荷.也可以根据统计理论中的直方图法,将区间 $[0.2, 0.8]$ 平均分为3个小区间,其中小区间 $[0.4, 0.6]$ 包含的数据最多,则偏好值可以取为包含在该小区间内的所有数据的均值0.48.

邓聚龙在灰色系统理论中提出了区间灰数,罗党等<sup>[2]</sup>提出了三参数区间灰数的相关决策理论.灰色系统理论中指出,信息系统中对象属性值往往是只知道取值上下界,而不知其确定值的灰数,常用区间灰数表示<sup>[3]</sup>.罗党等对三参数区间灰数的定义指出,若区间灰数取值可能性最大的点已知,则区间灰数表示为三参数区间灰数<sup>[2]</sup>.所以,根据灰数的定义,不管是区间灰数还是三参数区间灰数,都是指一个值,只是这个值落在一个区间范围.例如,电力负荷在某个时刻的值是一个确定值,没有记录前,只知道这个值会落在一个区间内,这是区间灰数.而区间数是来源于模糊数,是充满一个区间并按概率分布的.例如,电力负荷在一天24h的取值可以表示成一个区间数.区间灰数和区间数虽然在内涵上不同,但是外形上类似,都有下界和上界.所以,区间灰数序列的预测方法可以作为区间数序列预测方法的借鉴.

目前,许多学者对区间数序列的分析和预测问题进行了研究. Wei等<sup>[4]</sup>基于中心的偏线性回归模型,提出了一种区间值数据的柔性半参数建模方法,并进行了广泛的仿真研究.陈立新等<sup>[5]</sup>提出了新的基于ARIMA的模糊时间序列预测模型,能够高效处理不完整的、含糊的历史数据. Wang<sup>[6]</sup>提出了基于模糊时间序列的股票价格预测大数据框架.赖丽洁等<sup>[7]</sup>将三元区间数序列转换为中点和左右半径序列后建立ARIMA模型.然而,这些研究都需要大样本,在许多实际问题中,很难收集大量的样本.如风力发电、地基沉降监测、水文监控和滑坡监测等问题,在这些领域,由于时间和成本的限制,只能收集到小样本.灰色预测模型适用于对“小样本”、“贫信息”的实际问题建模,弥补了统计型预测模型需要大量样本的不足,自提出以来,已广泛应用于工农业生产、经济、能源和管理等领域.很多学者采用序列转换的方法运用灰色模型对区间灰数序列建模.比如,李树良等<sup>[8]</sup>构建了标准化区间灰数的“白部序列”及“灰部序列”的无偏灰色预测模型.熊萍萍等<sup>[9]</sup>以核和灰度

两个维度为基础,分别建立核序列和灰度序列的MGM(1, m)模型,再还原计算得到区间灰数序列的上界和下界.类似的这种转换方法还有很多<sup>[10-12]</sup>,但是,序列转换方法并没有在实质上将灰色模型方程的适用序列拓广到区间数或区间灰数序列.并且,这些方法主要是针对只有下界和上界的区间灰数和二元区间数序列.目前,针对具有偏好值或中界点的三参数区间灰数和三元区间数的研究主要是在多属性决策领域,而对三元区间数时间序列的预测研究则较少.

三元区间数比二元区间数多了一个偏好值信息,包含的信息更加全面,所以在预测领域对三元区间数序列进行深入研究具有一定的实际应用意义. Zeng等<sup>[13-14]</sup>改进了GM(1, 1)和GM(1, N)模型方程的参数设置,将发展系数和灰色作用量分别设置为精确数和三元区间数,使模型方程能够直接对三元区间数序列建模.本文将在在此基础上,进一步对GM(0, N)模型的参数设置进行改进,使其能够直接对三元区间数序列建模.另外,传统GM(0, N)只考虑了因素变量对系统特征变量的影响,没有考虑系统特征变量的时滞影响,为此,本文引入自回归模型的建模机理对GM(0, N)模型添加系统特征变量的滞后项.而且,曾波在文献[15]中对传统GM(1, N)模型引入了线性修正项,优化了模型,本文也将在GM(0, N)模型中引入线性修正项.进一步,为了提高对振荡序列的预测精度,引入马尔科夫预测方法对此模型的预测序列进一步修正.为了避免修正时出现区间数各界点大小关系的错乱,将三元区间数序列先做转换后再修正.

## 1 三元区间数序列的GM(0, N)模型

**定义1** 设 $R$ 是实数集,  $x_L, x_M, x_R \in R$ 且 $x_L \leq x_M \leq x_R$ , 则 $\tilde{x} = [x_L, x_M, x_R]$ 称为一个三元区间数,其中 $x_L$ 是下界点或左界点,  $x_M$ 是偏好值或中界点,  $x_R$ 是上界点或右界点. 当 $x_L = x_M$ 或 $x_M = x_R$ 时,  $\tilde{x}$ 成为一个二元区间数; 当 $[x_L, x_R]$ 时,  $x_L = x_M = x_R$ 时,  $\tilde{x}$ 成为一个实数.

**定义2**  $\tilde{X}_i^{(0)} (i = 1, 2, \dots, N)$ 为 $N$ 个原始三元区间数序列,有

$$\tilde{X}_i^{(0)} = (\tilde{x}_i^{(0)}(1), \tilde{x}_i^{(0)}(2), \dots, \tilde{x}_i^{(0)}(n)).$$

其中:  $\tilde{x}_i^{(0)}(t) = [x_{iL}^{(0)}(t), x_{iM}^{(0)}(t), x_{iR}^{(0)}(t)] (t = 1, 2, \dots, n)$ 为三元区间数;  $\tilde{X}_1^{(0)}$ 为系统特征序列,  $\tilde{X}_i^{(0)} (i = 2, 3, \dots, N)$ 为相关因素序列.

下面给出系统特征序列 $(\tilde{X}_1^{(0)})$ 与因素序列 $(\tilde{X}_i^{(0)}, i = 2, 3, \dots, N)$ 的灰色关联分析.文献[16]定义了二元区间数序列之间的灰色关联度并分析了其

能有效地进行关联度排序. 类似地, 给出三元区间数序列之间的灰色关联度.

**定义3** 系统特征序列 $(\tilde{X}_1^{(0)})$ 与因素序列 $(\tilde{X}_i^{(0)})$ ,  $i = 2, 3, \dots, N$ 的灰色关联度为

$$r(\tilde{X}_1^{(0)}, \tilde{X}_i^{(0)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{d_{\min} + 0.5d_{\max}}{d_{1i}(k) + 0.5d_{\max}}, \quad i = 2, 3, \dots, N. \quad (1)$$

其中

$$d_{1i}(k) = \frac{\sqrt{3}}{3} [(x_{1L}^{(0)}(t) - x_{iL}^{(0)}(t))^2 + (x_{1M}^{(0)}(t) - x_{iM}^{(0)}(t))^2 + (x_{1R}^{(0)}(t) - x_{iR}^{(0)}(t))^2]^{\frac{1}{2}}$$

被称为 $\tilde{x}_1^{(0)}(k)$ 与 $\tilde{x}_i^{(0)}(k)$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ )的距离, 且 $d_{\min} = \min_t \min_i d_{1i}(t)$ ,  $d_{\max} = \max_t \max_i d_{1i}(t)$ . 当灰色关联度 $r(\tilde{X}_1^{(0)}, \tilde{X}_i^{(0)}) \geq 0.5$ 时, 说明系统特征序列 $\tilde{X}_1^{(0)}$ 和因素序列 $\tilde{X}_i^{(0)}$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ )的关系较强, 可以构建关联模型.

**定义4** 对定义2中的 $N$ 个原始三元区间数序列 $\tilde{X}_i^{(0)}$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ )分别做一次累加生成, 得其一次累加生成(1-AGO)序列为

$$\tilde{x}_i^{(1)}(t) = [x_{iL}^{(1)}(t), x_{iM}^{(1)}(t), x_{iR}^{(1)}(t)] = \left[ \sum_{j=1}^t x_{iL}^{(0)}(j), \sum_{j=1}^t x_{iM}^{(0)}(j), \sum_{j=1}^t x_{iR}^{(0)}(j) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

将一次累加生成序列记为

$$\tilde{X}_i^{(1)} = (\tilde{x}_i^{(1)}(1), \tilde{x}_i^{(1)}(2), \dots, \tilde{x}_i^{(1)}(n)), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

传统GM(0, N)只考虑了自变量对因变量的影响, 没有考虑因变量本身的时滞影响. 本文将对GM(0, N)模型添加系统特征变量的滞后项, 即自回归部分. 另外, 文献[15]对传统GM(1, N)模型引入了线性修正项, 优化了模型, 提高了模型预测精度. 本文也对GM(0, N)模型引入线性修正项.

**定义5** 三元区间数序列的GM(0, N)模型(TINGM(0, N))为

$$\tilde{x}_1^{(1)}(t) = \sum_{i=2}^N b_i \tilde{x}_i^{(1)}(t) + \sum_{j=1}^p a_j \tilde{x}_1^{(1)}(t-j) + \tilde{h}_1(t-1) + \tilde{h}_2 + \tilde{\varepsilon}(t). \quad (2)$$

其中: $\tilde{x}_i^{(1)}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )如定义4所述; $b_i$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ )为模型的整体贡献系数, 取为精确数; $p$ 为最大滞后阶数; $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ )为因变量滞后项系数, 取为精确数; $\tilde{h}_1$ 为线性修正项系数,  $\tilde{h}_2$ 为补偿系数,  $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 取为三元区间数, 即设 $\tilde{h}_1 = [h_{1L}, h_{1M}, h_{1R}]$ ,  $\tilde{h}_2 = [h_{2L}, h_{2M}, h_{2R}]$ ;  $\tilde{\varepsilon}_t = [\varepsilon_L(t), \varepsilon_M(t), \varepsilon_R(t)]$

为随机扰动项, 满足 $E(\tilde{\varepsilon}(t)) = 0$ .

可以看出TINGM(0, N)模型主要包含3个部分: $\sum_{i=2}^N b_i \tilde{x}_i^{(1)}(t)$ 是自变量(因素变量)的1-AGO序列对因变量(系统特征变量)的1-AGO序列线性回归部分; $\sum_{j=1}^p a_j \tilde{x}_1^{(1)}(t-j)$ 是因变量的1-AGO序列的自回归部分; $\tilde{h}_1(t-1)$ 是线性修正部分.

下、中、上界点序列的预测都将采用相同的整体贡献系数和滞后项系数. 这不仅反映了区间数各界点序列的整体性, 并且可以避免各界点大小次序混乱. 但是, 整体系数会弱化三元区间数各个界点序列不同的发展趋势, 而取为三元区间数的线性修正项系数和补偿系数可以弥补整体系数造成的不足.

## 2 TINGM(0, N)的最大滞后阶数和显著性检验

由建模方程可知, TINGM(0, N)模型就是对 $N$ 个原始序列的累加生成序列 $\tilde{x}_i^{(1)}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2, \dots, n$ )进行自回归和多元线性回归的联合. 模型中区间数3个界点的滞后项的系数采用同一个精确数, 所以区间数三个界点序列的最大滞后阶数必须取值相同. 因为在实际情况中, 区间数的3个界点序列在时间上的滞后性应该是一样的, 所以取三元区间数的偏好值即中点序列的最大滞后阶数作为3个界点统一的滞后阶数. 确定方法则采用自回归模型的最大滞后阶数的确定方法. 同时, 基于多元线性回归模型的显著性检验, 检验TINGM(0, N)模型的多元回归部分是否显著.

1) 拟合优度检验: 拟合优度 $R^2$ 可以度量样本回归方程拟合样本观察值的程度. 对于系统特征序列的累加生成序列 $\tilde{x}_1^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^t \tilde{x}_1^{(0)}(j)$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , 设TINGM(0, N)模型对累加生成序列的拟合值为 $\hat{\tilde{x}}_1^{(1)}(t) = [\hat{x}_{1L}^{(1)}(t), \hat{x}_{1M}^{(1)}(t), \hat{x}_{1R}^{(1)}(t)]$ , 设其残差平方和为

$$RSS = \sum_{k=1}^n [(x_{1L}^{(1)}(t) - \hat{x}_{1L}^{(1)}(t))^2 + (x_{1M}^{(1)}(t) - \hat{x}_{1M}^{(1)}(t))^2 + (x_{1R}^{(1)}(t) - \hat{x}_{1R}^{(1)}(t))^2],$$

与其平均值之间的离差平方和为

$$TSS = \sum_{t=1}^n [(x_{1L}^{(1)}(t) - \bar{x}_{1L}^{(1)})^2 + (x_{1M}^{(1)}(t) - \bar{x}_{1M}^{(1)})^2 + (x_{1R}^{(1)}(t) - \bar{x}_{1R}^{(1)})^2].$$

其中: $\bar{x}_{1L}^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{1L}^{(1)}(t)$ ,  $\bar{x}_{1M}^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{1M}^{(1)}(t)$ ,  $\bar{x}_{1R}^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{1R}^{(1)}(t)$ . 则模型的拟合优度(样本决定系数)定

义如下:  $R^2$  越接近1, 模型拟合得越好,  $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$ .

2) 模型方程的显著性检验: 旨在对模型中系统特征变量与因素变量之间的线性关系在总体上是否显著成立作出推断, 常采用  $F$  检验. 三元区间序列的累加生成序列的  $F$  统计量定义为

$$F = \frac{n - N}{(N - 1) \times RSS} \sum_{t=1}^n [(\hat{x}_{1L}^{(1)}(t) - \bar{x}_{1L}^{(1)})^2 + (\hat{x}_{1M}^{(1)}(t) - \bar{x}_{1M}^{(1)})^2 + (\hat{x}_{1R}^{(1)}(t) - \bar{x}_{1R}^{(1)})^2].$$

$F$  服从自由度为  $(N - 1, n - N)$  的  $F$  分布, 具体证明可参见多元线性回归方程的相关文献. 对于给定的显著性水平  $\alpha$ , 在  $F$  分布表中查出相应的临界值  $F_\alpha(N - 1, n - N)$ . 如果  $F > F_\alpha(N - 1, n - N)$ , 则认为模型方程显著成立; 如果  $F < F_\alpha(N - 1, n - N)$ , 则认为模型方程无显著意义.

### 3 参数估计

#### 3.1 整体贡献系数和滞后系数

首先基于最小二乘法给出三元区间数中界点序列的贡献系数  $b_{iM}(i = 2, 3, \dots, N)$  和滞后系数  $a_{jM}(j = 1, 2, \dots, p)$  的估计过程. 下界点和上界点序列对应的贡献和滞后系数的估计过程与此类似. 将 TINGM(0,  $N$ ) 模型方程(1)中的整体贡献和滞后系数改为中界点序列对应的贡献和滞后系数, 并代入中界点的 1-AGO 序列, 得

$$x_{1M}^{(1)}(t) = \sum_{i=2}^N b_{iM} x_{iM}^{(1)}(t) + \sum_{j=1}^p a_{jM} x_{1M}^{(1)}(t - j) + h_1(t - 1) + h_2, \quad (3)$$

则由最小二乘法得

$$\hat{b} = [b_{2M}, b_{3M}, \dots, b_{NM}, a_{1M}, \dots, a_{pM}, h_1, h_2]^T = (A^T A)^{-1} A^T Y. \quad (4)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} x_{2M}^{(1)}(p+1) & \dots & x_{NM}^{(1)}(p+1) & x_{1M}^{(1)}(p) \\ x_{2M}^{(1)}(p+2) & \dots & x_{NM}^{(1)}(p+2) & x_{1M}^{(1)}(p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2M}^{(1)}(n) & \dots & x_{NM}^{(1)}(n) & x_{1M}^{(1)}(n-1) \\ x_{1M}^{(1)}(p-1) & \dots & x_{1M}^{(1)}(1) & p & 1 \\ x_{1M}^{(1)}(p) & \dots & x_{1M}^{(1)}(2) & p+1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1M}^{(1)}(n-2) & \dots & x_{1M}^{(1)}(n-p) & n-1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \leftarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

$$Y = [x_{1M}^{(1)}(p+1) \quad x_{1M}^{(1)}(p+2) \quad \dots \quad x_{1M}^{(1)}(n)]^T.$$

由式(4)得到了三元区间数中界点序列的贡献

系数  $b_{iM}(i = 2, 3, \dots, N)$  和滞后系数  $a_{jM}(j = 1, 2, \dots, p)$  的估计. 但是, 此时所得到的  $h_1$  和  $h_2$  并不是模型最终所需要的线性修正系数和补偿系数, 后面还要根据整体贡献和滞后系数进行修正. 下、上界点序列各自对应的贡献和滞后系数分别设为  $b_{iL}, b_{iR}$  和  $a_{jL}, a_{jR}, i = 2, 3, \dots, N, j = 1, 2, \dots, p$ . 整体贡献和滞后系数取为

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} b_{2L} \\ b_{3L} \\ \vdots \\ b_{nL} \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} b_{2M} \\ b_{3M} \\ \vdots \\ b_{nM} \end{bmatrix} + \gamma_1 \begin{bmatrix} b_{2R} \\ b_{3R} \\ \vdots \\ b_{nR} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{1L} \\ a_{2L} \\ \vdots \\ a_{pL} \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} a_{1M} \\ a_{2M} \\ \vdots \\ a_{pM} \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} a_{1R} \\ a_{2R} \\ \vdots \\ a_{pR} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

其中:  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$ . 式(5)和(6)中, TINGM(0,  $N$ ) 模型的整体贡献和滞后系数取为三元区间数的各个界点序列对应的系数的加权平均, 体现了区间数的整体性, 反映了区间数序列的整体发展趋势. 各个界点序列的预测都将采用此整体系数, 而不是各自对应的系数. 因为若三元区间数的3个界点序列的发展趋势相差较大, 则分开取各自的贡献和滞后系数进行预测, 可能会导致预测结果出现3个界点的顺序错乱, 所以, 需将系数进行整合, 保证区间预测的有效性.

对于权重的确定, 可以根据三元区间数的中界点是区间中的偏好值, 将  $\beta_1$  和  $\beta_2$  的取值略高于其他权重. 也可以建立如下优化模型, 使模型的拟合值  $\hat{x}_1^{(0)}(t) = [\hat{x}_{1L}^{(0)}(t), \hat{x}_{1M}^{(0)}(t), \hat{x}_{1R}^{(0)}(t)]$  的平均相对误差最小:

$$\begin{aligned} \min f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \left| \frac{x_{1L}^{(0)}(t) - \hat{x}_{1L}^{(0)}(t)}{x_{1L}^{(0)}(t)} \right| + \left| \frac{x_{1M}^{(0)}(t) - \hat{x}_{1M}^{(0)}(t)}{x_{1M}^{(0)}(t)} \right| + \right. \\ & \left. \left| \frac{x_{1R}^{(0)}(t) - \hat{x}_{1R}^{(0)}(t)}{x_{1R}^{(0)}(t)} \right| \right). \\ \text{s.t. } & \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1; \\ & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1; \\ & \hat{x}_1^{(0)}(t) = \hat{x}_1^{(1)}(t) - \hat{x}_1^{(1)}(t-1), t = 1, 2, \dots, n; \\ & \tilde{x}_1^{(1)}(t) = \\ & \sum_{i=2}^N b_i \tilde{x}_i^{(1)}(t) + \sum_{j=1}^p a_j \tilde{x}_1^{(1)}(t-j) + \tilde{h}_1(t-1) + \tilde{h}_2. \end{aligned}$$

### 3.2 线性修正系数和补偿系数

下面根据整体贡献和滞后系数线性修正项系数和补偿系数, 将式(5)和(6)所得的整体系数代入式(3), 得

$$h_{1M}(t-1) + h_{2M} = x_{1M}^{(1)}(t) - \sum_{i=2}^N b_i x_{iM}^{(1)}(t) + \sum_{j=1}^p a_j x_{1M}^{(1)}(t-j), \quad (7)$$

则由最小二乘法求出中界点序列对应的线性修正和补偿系数为

$$[h_{1M} \ h_{2M}] = (B^T B)^{-1} B^T Y_M. \quad (8)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} p & p+1 & \dots & n-1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad Y_M = \begin{bmatrix} x_{1M}^{(1)}(p+1) - \sum_{i=2}^N b_{iM} x_{iM}^{(1)}(p+1) - \sum_{j=1}^p a_{jM} x_{1M}^{(1)}(p+1-j) \\ x_{1M}^{(1)}(p+2) - \sum_{i=2}^N b_{iM} x_{iM}^{(1)}(p+2) - \sum_{j=1}^p a_{jM} x_{1M}^{(1)}(p+2-j) \\ \vdots \\ x_{1M}^{(1)}(n) - \sum_{i=2}^N b_{iM} x_{iM}^{(1)}(n) - \sum_{j=1}^p a_{jM} x_{1M}^{(1)}(n-j) \end{bmatrix}.$$

同理可得下、上界点序列的线性修正和补偿系数为

$$[h_{1L} \ h_{2L}] = (B^T B)^{-1} B^T Y_L, \quad (9)$$

$$[h_{1R} \ h_{2R}] = (B^T B)^{-1} B^T Y_R. \quad (10)$$

至此, TINGM(0, N)模型的所有参数估计都已得出.

### 4 马尔科夫修正过程

TINGM(0, N)是线性模型, 当序列有较大的振荡时, TINGM(0, N)的预测精度可能不令人满意. 这里继续采用马尔科夫预测方法来修正TINGM(0, N)的预测结果.

step 1(序列转换): 马尔科夫预测也是只能适用于精确数序列, 而且不能将三元区间数的下、中、上界点分开单独修正, 否则会出现界点相对应位置的错乱, 所以先对三元区间数进行转换. 对于系统特征的原始三元区间数  $\hat{x}_1^{(0)}(t) = [x_{1L}^{(0)}(t), x_{1M}^{(0)}(t), x_{1R}^{(0)}(t)]$  与 TINGM(0, N)的预测值  $\hat{\hat{x}}_1^{(0)}(t) = [\hat{x}_{1L}^{(0)}(t), \hat{x}_{1M}^{(0)}(t), \hat{x}_{1R}^{(0)}(t)]$ , 令

$$c(t) = \frac{1}{3}(x_{1L}^{(0)}(t) + x_{1M}^{(0)}(t) + x_{1R}^{(0)}(t)),$$

$$r_L(t) = x_{1M}^{(0)}(t) - x_{1L}^{(0)}(t),$$

$$r_R(t) = x_{1R}^{(0)}(t) - x_{1M}^{(0)}(t),$$

分别为原始三元区间数的重心和左右半径. 类似地, TINGM(0, N)的预测值的重心和左右半径分别记为  $\hat{c}(t)$ 、 $\hat{r}_L(t)$ 、 $\hat{r}_R(t)$ . 分别对他们进行马尔科夫修正

后的值记为  $c'(t)$ 、 $r'_L(t)$ 、 $r'_R(t)$ . 下面只给出重心  $\hat{c}(t)$  的马尔科夫修正过程,  $\hat{r}_L(t)$  与  $\hat{r}_R(t)$  的修正与此类似.

step 2(状态划分): 计算比值  $c(t)/\hat{c}(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , 将比值范围划分成  $s$  个状态, 表示为  $E_i \in [A_i, B_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

step 3(计算状态转移概率矩阵): 设  $N_{ij}(1)$  为由状态  $E_i$  经过 1 步转移到状态  $E_j$  的样本数,  $N_i$  为状态  $E_i$  出现的总次数, 则由状态  $E_i$  经过 1 步转移到状态  $E_j$  的状态转移概率为  $P_{ij}(1) = N_{ij}(1)/N$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, s$ , 则 1 步状态转移概率矩阵为  $P(1) = (P_{ij}(1))_{S \times S}$ , 而  $k$  步状态转移概率矩阵取为  $P^k(1)$ .

step 4( $k$ 步修正值): 设第  $n$  时刻,  $c(n)/\hat{c}(n)$  处于  $E_i$  状态, 如果  $P^k(1)$  的第  $i$  行的最大值为第  $j$  列的元素 ( $P_{ij}^k(1)$ ), 则  $c(n)/\hat{c}(n)$  从  $E_i$  状态经过  $k$  步转移到  $E_j$  状态的概率最大, 所以在第  $n+k$  时刻,  $\hat{c}(n+k)$  的修正值为  $c'(n+k) = \hat{c}(n+k) \times (A_j + B_j)/2$ . 若  $P^k(1)$  的第  $i$  行没有最大元素, 则  $\hat{c}(n+k)$  的修正值为所有状态的数学期望, 即

$$c'(n+k) = \hat{c}(n+k) \times \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s P_{ij}^k(1) \times (A_j + B_j).$$

step 5(还原): 将重心和左右半径的修正值还原为三元区间数, 还原公式为

$$\begin{aligned} [x'_{1L}(t), x'_{1M}(t), x'_{1R}(t)] = & \left[ c'(t) - \frac{2r'_L(t)}{3} - \frac{r'_R(t)}{3}, c'(t) + \frac{r'_L(t)}{3} - \frac{r'_R(t)}{3}, \right. \\ & \left. c'(t) + \frac{r'_L(t)}{3} + \frac{2r'_R(t)}{3} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

显然  $x'_{1L}(t) \leq x'_{1M}(t) \leq x'_{1R}(t)$ , 此转换方法保证了各界点的修正值的大小关系.

### 5 预测精度的评价标准

平均绝对百分比误差(MAPE)常被用来评价时间序列预测精度. 这里, 三元区间数序列的原始值与预测值的MAPE由下式给出:

$$\begin{aligned} \text{MAPE} = & \frac{1}{3n} \sum_{t=1}^n \left( \left| \frac{x_{1L}^{(0)}(t) - \hat{x}_{1L}^{(0)}(t)}{x_{1L}^{(0)}(t)} \right| + \right. \\ & \left. \left| \frac{x_{1M}^{(0)}(t) - \hat{x}_{1M}^{(0)}(t)}{x_{1M}^{(0)}(t)} \right| + \left| \frac{x_{1R}^{(0)}(t) - \hat{x}_{1R}^{(0)}(t)}{x_{1R}^{(0)}(t)} \right| \right). \end{aligned} \quad (12)$$

均方误差(MSE)能够反映预测值与原始值的离散程度. 三元区间数序列的MSE由下式计算:

$$\begin{aligned} \text{MSE} = & \frac{1}{3n} \sum_{t=1}^n [(x_{1L}^{(0)}(t) - \hat{x}_{1L}^{(0)}(t))^2 + (x_{1M}^{(0)}(t) - \\ & \hat{x}_{1M}^{(0)}(t))^2 + (x_{1R}^{(0)}(t) - \hat{x}_{1R}^{(0)}(t))^2]. \end{aligned} \quad (13)$$

文献[17]给出了几种针对二元区间数序列的预

测精度的评价准则. 类似于文献[17]的二元区间数的平均平方误差(MSEI), 提出三元区间数的平均平方误差(MSET)如下:

$$MSET = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (c(t) - \hat{c}(t))^2 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_L(t) - \hat{r}_L(t))^2 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_R(t) - \hat{r}_R(t))^2. \quad (14)$$

其中:  $\hat{c}(t)$ 、 $\hat{r}_L(t)$ 、 $\hat{r}_R(t)$  为三元区间数的原始值的重点和左右半径, 计算公式已在第4节给出. MAPE, MSE 和 MSET 将作为三元区间数序列预测精度的3种评价标准.

## 6 实例分析

### 6.1 社会消费品零售总额预测

将社会消费品零售总额(CTRS)作为系统特征变量, 国内生产总值(GDP)作为相关因素. 在易获数据网(www.yihuodata.com)获取2010-01~2017-03的GDP的月度数据. 为了增加样本容量, 使得TINGM(0, N)模型的最大滞后阶数能够确定, 以季度为时间单位, 每个季度的月度数据的最小值、均值、最大值分别作为季度三元区间数的下、中、上界点. CTRS和GDP的原始区间数序列见表1和表2.

基于CTRS和GDP从2010年第1季度到2017年第1季度的原始区间数序列, 建立TINGM(0, 2)模型, 预测CTRS从2017年第2季度到2018年第4季度的区间数. 其中, 对于GDP从2017年第2季度到2018年第4季度的预测值, 去掉TINGM(0, N)模型的多元线性回归部分, 只用模型的自回归部分、线性修正项和

表1 社会消费品零售总额的观察数据

年度	季度	下界点	中界点	上界点
2010	1	11 322	12 107	12 500
	2	11 510	12 098	12 455
	3	12 253	12 786	13 536
	4	13 911	14 508	15 329
2011	1	13 588	14 202	14 509
	2	13 649	14 303	14 697
	3	14 408	14 993	15 865
	4	16 129	16 805	17 740
2017	1	27 864	28 608	28 980
	2	27 278	28 848	29 808
	3	29 610	30 270	30 870
	4	34 108	34 361	34 734
2018	1	29 194	30 092	30 541
	2	28 542	29 914	30 842
	3	30 734	31 427	32 005
	4	35 260	35 563	35 893

表2 GDP的观察数据

年度	季度	下界点	中界点	上界点
2010	1	24 581.09	29 205.57	32 003.72
	2	32 500.49	33 177.47	33 707.69
	3	32 688.52	35 412.90	37 142.91
	4	38 613.52	39 880.83	41 731.38
2011	1	30 069.97	34 880.43	37 291.09
	2	38 718.86	39 724.77	40 739.25
	3	39 435.62	42 327.20	43 802.79
	4	44 177.18	46 167.77	49 700.47
2015	1	42 073.73	50 328.90	56 860.28
	2	54 284.37	56 167.67	58 067.10
	3	54 776.89	58 903.46	61 503.86
	4	61 123.81	64 283.96	68 341.98
2016	1	45 536.61	53 857.57	59 146.82
	2	58 054.46	60 247.90	62 581.92
	3	58 687.38	63 509.83	66 557.75
	4	67 393.60	70 427.10	73 988.68
2017	1	55 949.14	60 227.57	64 058.31

补偿系数进行预测, 即

$$\tilde{x}_1^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^p a_j \tilde{x}_1^{(1)}(t-j) + \tilde{h}_1(t-1) + \tilde{h}_2. \quad (15)$$

由式(1)计算得CTRS和GDP的2010年第1季度到2017年第1季度的原始区间数序列的灰色关联度为  $r(\tilde{X}_1^{(0)}, \tilde{X}_2^{(0)}) = 0.91$ . 由此可知, GDP在很大程度上可以反映CTRS的发展趋势. 基于中点序列一次累加生成序列的自回归模型的滞后阶数确定为  $p = 1$ . TINGM(0, 2)模型的整体贡献系数和滞后项系数取为各界点序列对应的系数的均值  $b_2 = 0.1882$ ,  $a_1 = 0.6921$ . 线性修正项系数和补偿系数分别为

$$\tilde{h}_1 = [-2 328.20, -2 761.56, -3 158.67],$$

$$\tilde{h}_2 = [6 846.56, 8 092.28, 9 808.39].$$

TINGM(0, 2)对CTRS的拟合结果能够大致拟合出原始曲线的振荡趋势. TINGM(0, 2)对三元区间数下、中、上界点序列的拟合MAPE分别为3.65%, 2.68%, 3.12%. 所以, 从拟合误差也可看出, TINGM(0, 2)模型的拟合精度较高.

TINGM(0, 2)模型对CTRS从2017年第2季度到2018年第4季度的区间数的预测结果见表3.

由表3可以看出, TINGM(0, 2)模型对CTRS从2017年第2季度到2018年第4季度的预测曲线呈现整体上升趋势, 但是振荡规律却没有表现出来. 所以, 继续对TINGM(0, 2)模型的预测结果进行马尔科夫修正, 修正结果也见表3. 由表3可以看出, 修正后CTRS的振荡趋势在第2季度有所降低, 在第4季度则

表3 各模型对社会消费品零售总额的预测结果

年度	季度	TINGM(0, 2)	修正 TINGM(0, 2)
2017	2	[28 245, 29 218, 30 427]	[27 680, 28 633, 29 819]
	3	[28 054, 29 784, 30 847]	[28 896, 30 677, 31 772]
	4	[28 669, 30 329, 31 273]	[30 103, 31 846, 32 836]
2018	1	[29 238, 30 858, 31 699]	[28 653, 30 241, 31 066]
	2	[29 772, 31 373, 32 123]	[28 581, 30 118, 30 838]
	3	[30 280, 3 1875, 32 540]	[30 128, 31 716, 32 377]
	4	[30 768, 32 366, 32 949]	[31 691, 33 337, 33 938]
MAPE		6.20%, 4.64%, 4.28%	4.24%, 2.54%, 2.39%

达到极大值. 由表1的误差比较也可以看出, 修正后的下、中、上界点的MAPE均有所下降. 所以, 马尔科夫修正有效的.

### 6.2 中国发电量预测

以全国发电量作为系统特征变量, 全国用电量作为相关因素建模. 中国电力企业联合会官网 (<http://www.cec.org.cn/guihuayutongji/tongjixinxi/yuedushuju/index.html>) 只给出了2009年至2018年全国发电量和用电量的月度数据, 中国统计年鉴则只给出了年度数据. 而且, 我国发电量发展速度较快, 太早以前的数据并不具有好的参考价值. 所以, 只对2010年至2018年的全国发电量进行三元区间数拟合和预测. 由于一些年份的发电量缺少1、2月份的数据, 用电量缺乏12月的数据, 不好确定季度的区间数. 以年度为时间单位, 以每年3~11月的数据的最小值、均值、最大值分别作为年度三元区间数的下、中、上界点. 由于只有9年的数据, 不够确定TINGM(0, N)模型的滞后阶数, 去掉TINGM(0, N)模型的回归部分, 只用模型的多元线性回归部分、线性修正项和补偿系数进行预测, 即

$$\tilde{x}_1^{(1)}(t) = \sum_{i=2}^N b_i \tilde{x}_i^{(1)}(t) + \tilde{h}_1(t-1) + \tilde{h}_2. \quad (16)$$

以2010~2015年的数据建立TINGM(0, 2)模型来预测2016~2018年的全国发电量. 对于2016~2018年的用电量的预测值可以采用文献[14]给出的三元区间数序列的GM(1, 1)模型预测得到. 全国发电量和用电量的原始三元区间数序列见表4. 首先由式(1)计算发电量( $\tilde{X}_1^{(0)}$ )与用电量( $\tilde{X}_2^{(0)}$ )的灰色关联度为 $r(\tilde{X}_1^{(0)}, \tilde{X}_2^{(0)}) = 0.94$ . 所以, 用电量对发电量起很大的影响作用. TINGM(0, 2)模型方程的整体贡献系数取为各界点序列对应的系数的均值 $b_2 = 1.1611$ ; 线性修正项系数和补偿系数分别为

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= [-787.60, -798.48, -875.89], \\ \tilde{h}_2 &= [-610.36, -602.40, -683.12]. \end{aligned}$$

表4 全国发电量与用电量的观察数据

年度	发电量/TWh	用电量/TWh
2010	[3 316, 3 501, 3 903]	[3 394, 3 562, 3 975]
2011	[3 640, 3 885, 4 260]	[3 768, 3 970, 4 349]
2012	[3 718, 4 022, 4 373]	[3 899, 4 166, 4 556]
2013	[3 994, 4 370, 4 987]	[4 165, 4 491, 5 103]
2014	[4 250, 4 584, 5 048]	[4 356, 4 651, 5 097]
2015	[4 450, 4 686, 5 155]	[4 415, 4 669, 5 124]
2016	[4 445, 4 968, 5 617]	[4 569, 5 007, 5 631]
2017	[4 767, 5 281, 6 047]	[4 847, 5 335, 6 072]
2018	[5 108, 5 616, 6 405]	[5 217, 5 735, 6 521]

TINGM(0, 2)模型对2010~2015年的全国发电量三元区间数序列的下、中、上界点的拟合值平均绝对百分比误差(MAPE)分别为1.27%, 1.02%, 1.18%, 可以看出拟合精度很好. 2016~2018年的预测区间数见表5. 为了比较, 表5还给出了文献[14]提出的单变量的三元区间数GM(1, 1)(TINGM(1, 1)模型的预测结果. 文献[18]将二元区间数转换为中点和半径后再建模, 类似地, 将三元区间数转换为重心和左右半径再建模, 此转换方法记为TINCM, 其结果见表5. 可以看出, 序列转换方法TINCM优于单变量的TINGM(1, 1)模型, 而TINGM(0, 2)的MAPE、MSE和MSET都是3个模型中最小的, 所以预测精度最高. 另外, 可以看出2010~2018年全国发电量呈现整体上升趋势, 振荡性不大, 所以不必进行马尔科夫修正.

表5 各模型对全国发电量的预测结果

年	(原始值/TWh)	TINGM(0, 2)	TINGM(1, 1)	TINCM
2016	4445	4 517.36	4 375.87	4 759.22
	4968	5 015.03	4 701.58	5 168.25
	5617	5 662.13	5 213.05	5 820.47
2017	4767	4 840.14	4 585.36	5 089.15
	5281	5 395.86	4 902.32	5 476.16
	6047	6 174.17	5 484.56	6 201.25
2018	5108	5 269.74	4 788.74	5 379.60
	5616	5 860.29	5 123.45	5 789.32
	6405	6 695.49	5 757.35	6 598.16
MAPE		2.36%	6.61%	4.35%
MSE		71 473.62	498 549.18	162 337.53
MSET		40 043.48	244 542.08	137 906.04

## 7 结论

本文对传统GM(0, N)模型添加了因变量的滞后项和线性修正项,而新的参数设置方法使模型能直接对三元区间数序列建模.整体贡献系数和滞后项系数能够保证区间数的整体性,体现区间数的整体发展趋势,而取为三元区间数的线性修正项系数和补偿系数可以弥补整体系数的不足,提高区间数序列的预测精度.马尔科夫修正方法又进一步提高了对振荡型三元区间数序列的预测精度.

近几年,多变量灰色预测模型涌现出许多新的优化模型,较大程度上提高了其拟合和预测性能.今后,将进一步研究新的方法,使这些新的预测模型能够直接对区间数序列建模.

### 参考文献(References)

- [1] Hu Q Z. Research and application of interval number theory[M]. Beijing: Science Press, 2010: 1-20.
- [2] 罗党, 毛文鑫, 孙慧芳. 三参数区间灰数信息下系统属性约简方法[J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(16): 156-161.  
(Luo D, Mao W X, Sun H F. Attributes reduction of information system with three-parameter interval grey number[J]. Computer Engineering and Applications, 2016, 52(16): 156-161.)
- [3] Deng J L. Grey theory foundation[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002: 200-230.
- [4] Wei Y, Wang S, Wang H. Interval-valued data regression using partial linear model[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2017(8): 1-20.
- [5] 陈立新, 张磊. 一种面向金融数据的基于ARIMA的模糊时间序列预测模型[J]. 现代计算机, 2014(7): 3-13.  
(Chen L X, Zhang L. A fuzzy time series prediction model based on ARIMA for financial data[J]. Modern Computer, 2014(7): 3-13.)
- [6] Wang W N. A big data framework for stock price forecasting using fuzzy time series[J]. Multimedia Tools and Applications. 2018, 77(8): 10123-10134.
- [7] 赖丽洁, 曾祥艳. 基于ARIMA与数据累加生成的区间时间序列混合预测模型[J]. 桂林电子科技大学学报, 2017, 37(1): 79-86.  
(Lai L J, Zeng X Y. Interval time series hybrid prediction model based on ARIMA and data accumulation[J]. Journal of Guilin University of Electronic Technology, 2017, 37(1): 79-86.)
- [8] 李树良, 曾波, 孟伟. 基于克莱姆法则的无偏区间灰数预测模型及其应用研究[J]. 控制与决策, 2017, 32(12): 1-6.  
(Li S L, Zeng B, Meng W. Study on unbiased grey prediction model of interval grey numbers and its application by using Cramer rule[J]. Control and Decision, 2017, 32(12): 1-6.)
- [9] 熊萍萍, 张悦, 姚天祥, 等. 基于区间灰数序列的多变量灰色预测模型[J]. 数学的实践与认识, 2018(9): 181-189.  
(Xiong P P, Zhang Y, Yao T X, et al. Multivariable grey prediction model based on interval grey number sequence[J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2018(9): 181-189.)
- [10] 曾波, 刘思峰, 孟伟. 基于核和面积的离散灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2011, 26(9): 1421-1424.  
(Zeng B, Liu S F, Meng W. Prediction model of discrete grey number based on kernel and area[J]. Control and Decision, 2011, 26(9): 1421-1424.)
- [11] 郭丽云, 吴正鹏, 齐英剑. 基于遗传算法的灰色区间数的GM(1, 1)优化模型[J]. 控制与决策, 2019, 34(7): 445-448.  
(Wu L Y, Wu Z P, Qi Y J. Optimization model of grey interval number based on genetic algorithm for GM(1, 1)[J]. Control and Decision, 2019, 32(7): 445-448.)
- [12] 曾波, 石娟娟, 周雪玉. 基于Cramer法则的区间灰数预测模型参数优化方法研究[J]. 统计与信息论坛, 2015, 30(8): 9-15.  
(Zeng B, Shi J J, Zhou X Y. Research on parameter optimization of interval grey prediction model based on cramer rule[J]. Statistics and Information Forum, 2015, 30(8): 9-15.)
- [13] Zeng X Y, Shu L, Huang G M, et al. Triangular fuzzy series forecasting based on grey model and neural network[J]. Applied Mathematical Modeling, 2016, 40: 1717-1727.
- [14] Zeng X Y, Shu L, Yan S L. A novel multivariate grey model for forecasting the sequence of ternary interval numbers[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 69: 273-286.
- [15] Zeng B, Luo C M, Liu S F. Development of an optimization method for the GM(1, N) model[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2016, 55: 353-362.
- [16] Xiao X P, Mao S H. Grey prediction and decision making method[M]. Beijing: Science Press, 2013: 210-230.
- [17] Hsu H L, Wu B. Evaluating forecasting performance for interval data[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2008, 56(9): 2155-2163.
- [18] Zeng X Y, Shu L, Huang G M. Fluctuating interval number series forecasting based on GM(1, 1) and SVM[J]. The Journal of Grey System, 2016, 28(3): 1-15.

### 作者简介

曾祥艳(1978—),女,副教授,博士,从事灰色系统理论、数量经济等研究, E-mail: zengxyhbyc@163.com;

王旻燕(1994—),女,硕士生,从事灰色系统理论与应用的研究, E-mail: wangmyly@163.com;

何芳丽(1979—),女,讲师,博士,从事公司治理、数理金融等研究, E-mail: 562972278@qq.com;

迟晓妮(1979—),女,副教授,博士,从事最优化理论与算法、锥优化等研究, E-mail: chixiaoni@126.com.